

# Universalité et singularités pour certaines équations aux dérivées partielles

Hatem Zaag

30 juin 2003

## Motivation : les singularités dans les EDP

Des solutions régulières à  $t = 0$ , deviennent "infinies" en temps fini  $T$ . Exemple : la chaleur, Schrödinger, les ondes, KdV généralisé, flots géométriques, etc...

### Problématique commune :

- Trouver le(s) comportement(s) asymptotique(s) au voisinage de la singularité.

- Dégager ceux qui sont **stables**.

- Obtenir des estimations **uniformes** / données initiales, etc..

- Comprendre les interactions entre les zones singulières et les

zones régulières.

## Plan

- **Equation semilineaire de la chaleur :**

- Approche classique

- Nouvelle approche : Théorème de Liouville

- Point d'explosion isolé (stabilité / données initiales)

- Point d'explosion non isolé (régularité de l'ensemble

d'explosion)

- **Equation semilineaire des ondes :**

- Taux d'explosion

- **Perspectives**

## Cas modèle : l'équation semilinéaire de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \\ u(0) = u_0, \end{array} \right.$$

où  $u(t) : x \in \mathbb{R}^N \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$  et

$$1 < p < \frac{N+2}{N-2} \text{ si } N \geq 3.$$

(Exposant critique pour l'injection de Sobolev).

**Rq.** Équation modèle pour développer des outils et comprendre l'interaction entre la nonlinéarité, la diffusion, l'auto-similarité et le changement d'échelle.

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + a u &= f \\ \Delta v + b v &= g \end{aligned} \right\}$$

- cas de systèmes sans structure de gradient, comme

avec  $a(x) > a_0 > 0$  et  $f(n) \sim |n|^{-d} |n|^{-1}$  qd  $|n| \rightarrow \infty$ ,

$$u = \text{div}(a(x)\nabla u) + f(n)$$

- cas de l'équation

$$-u \in \mathbf{R}^M,$$

- Un ouvert borné,

**Généralisation :**

## Explosion en temps fini

Une solution  $u(x, t)$  explose en temps fini  $T$  lorsque

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_{T^\infty} = +\infty.$$

Un point  $a$  de l'espace est un point d'explosion lorsqu'il existe  $a_n \rightarrow a$  et  $t_n \rightarrow T$  tels que

$$|u(a_n, t_n)| \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

On note  $S_u \subset \mathbb{R}^N$  l'ensemble de tous les points d'explosion.

**But** : Étudier  $S_u$ .

## Plan

- **Equation semilinéaire de la chaleur :**

- *Approche classique*

- Nouvelle approche : Théorème de Liouville

- Point d'explosion isolé (stabilité / données initiales)

- Point d'explosion non isolé (régularité de l'ensemble

d'explosion)

- **Equation semilinéaire des ondes :**

- Taux d'explosion

- **Perspectives**

## Approche classique

Soit  $u$  une solution de  $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$  qui explose en temps fini!  $T$  et soit  $a \in S_u$ .

## Variables auto-similaires

$$w_a(y, s) = (T - t)^{\frac{1}{1-d}} n_{T-d}(x, t), \quad \hat{y} = \frac{\sqrt{T-t}}{a-x}, \quad s = -\log(T-t).$$

Étudier  $u$  au voisinage de la singularité  $(a, T)$

$\iff$  Étudier  $w_a$  au voisinage de  $y = 0$  quand  $s \rightarrow \infty$ .



**Equation :**

Pour tous  $s \in [-\log T, +\infty)$  et  $y \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\partial_s w_a = \frac{1}{2} \operatorname{div}(p \Delta w_a) - \frac{d-1}{2} |w_a|^{p-1} w_a$$

avec

$$p(y) = e^{-\frac{|y|^2}{4}}.$$

**Energie (décroissante) :**

$$E(w) = \int p dy \left( \frac{1}{2} |\Delta w|_2^2 + \frac{1-d}{2} |w|_2^2 - \frac{1+d}{2} |w|_{p+1}^2 \right)$$

## Borne uniforme (Giga-Kohn 1987, Giga et al. 2002)

Pour tout  $s \geq -\log T$ ,

$$\frac{1}{C_0} \leq \|w_a(s)\|_{T^\infty} \leq C_0.$$

**Convergence** Dans  $L^2_p$  et  $L^\infty_{loc}$  (Giga-Kohn)

$$w_a(y, s) \rightarrow \pm \kappa \equiv (d-1) \frac{1}{d-1} \text{ qd } s \rightarrow \pm \infty.$$

**Rq.** (Giga-Kohn) 0,  $\kappa$  et  $-\kappa$  sont les seules solutions station-

naires.

**Rq.**  $u(a, t) \sim \pm \kappa (T-t)^{\frac{1}{d-1}}$  qd  $t \rightarrow T$  : comparaison "locale" avec la solution de  $u' = u^d$ .

**Rq.** Raffinement du développement : Herrero-Velázquez, Bricmont-Kupainen, Filippas-Kohn.

**Problème** : la *stabilité*. Les estimations sont *trop locales* : elles dépendent de la donnée initiale et du point d'explosion.

Si  $a$  est isolé dans  $\overline{S^u}$  : Que se passe-t-il si on perturbe la donnée initiale (pour  $u$ ) ?

Si  $a$  est non isolé : Pour une même solution  $u(x, t)$ , comment se comporte  $w_b(y, s)$  où  $b \in S^u$  est voisin de  $a$  ?

## Plan

- **Equation semi-linéaire de la chaleur :**

- Approche classique

- *Nouvelle approche : Théorème de Liouville*

- Point d'explosion isolé (stabilité / données initiales)

- Point d'explosion non isolé (régularité de l'ensemble

d'explosion)

- **Equation semi-linéaire des ondes :**

- Taux d'explosion

- **Perspectives**

## Nouvelle approche : Théorème de Liouville (Merle, Z.)

$$1 > d > \frac{N-2}{N+2}$$

Soit  $u(x, t)$  une solution de  $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$  telle que

$$|u(x, t)| \leq C(T-t)^{-\frac{d-1}{2}}$$

Alors,

soit  $u \equiv 0$ ,

soit il existe  $T^* \geq T$  tel que

$$u(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [-\infty, T^*), \quad u(x, t) = (T^* - t)^{-\frac{d-1}{2}}$$

## Généralisation

- Exposant critique  $p = \frac{N+2}{N-2}$ .
- Même équation avec  $u \in \mathbb{R}^M$  (il y a encore une énergie).

- Cas de systèmes sans structure de gradient, comme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \Delta u + u^p, \\ u_t = \Delta u + u^q, \end{array} \right.$$

avec  $p$  et  $q$  sous-critiques et proches.

$$n_d(1 - \epsilon) - C^\epsilon \leq n_t \leq n_d(1 + \epsilon) + C^\epsilon.$$

**Rq.** Si  $n \geq 0$ , alors

$C^\epsilon$ .

contrôlée par un terme local  $\epsilon|n|_d$  et une constante uniforme

**Rq.** Localisation de l'équation. L'interaction due à  $\Delta n$  est

où  $C^\epsilon$  ne dépend que de  $\epsilon$  et de bornes sur  $T$  et  $\|n_0\|$ .

$$|\Delta n| = |n_t - |n|_{d^{-1}n}| \leq \epsilon|n|_d + C^\epsilon$$

$$A(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T],$$

qui explose en temps fini  $T$ , alors  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists C^\epsilon > 0$  tel que

**Cor.** (Merle-Z.) Si  $n$  est une solution de  $n_t = \Delta n + |n|_{d^{-1}n}$

## Plan

- Equation semi-linéaire de la chaleur :

- Approche classique

- Nouvelle approche : Théorème de Liouville

- *Point d'explosion isolé (stabilité / données initiales)*

- Point d'explosion non isolé (régularité de l'ensemble

d'explosion)

- Equation semi-linéaire des ondes :

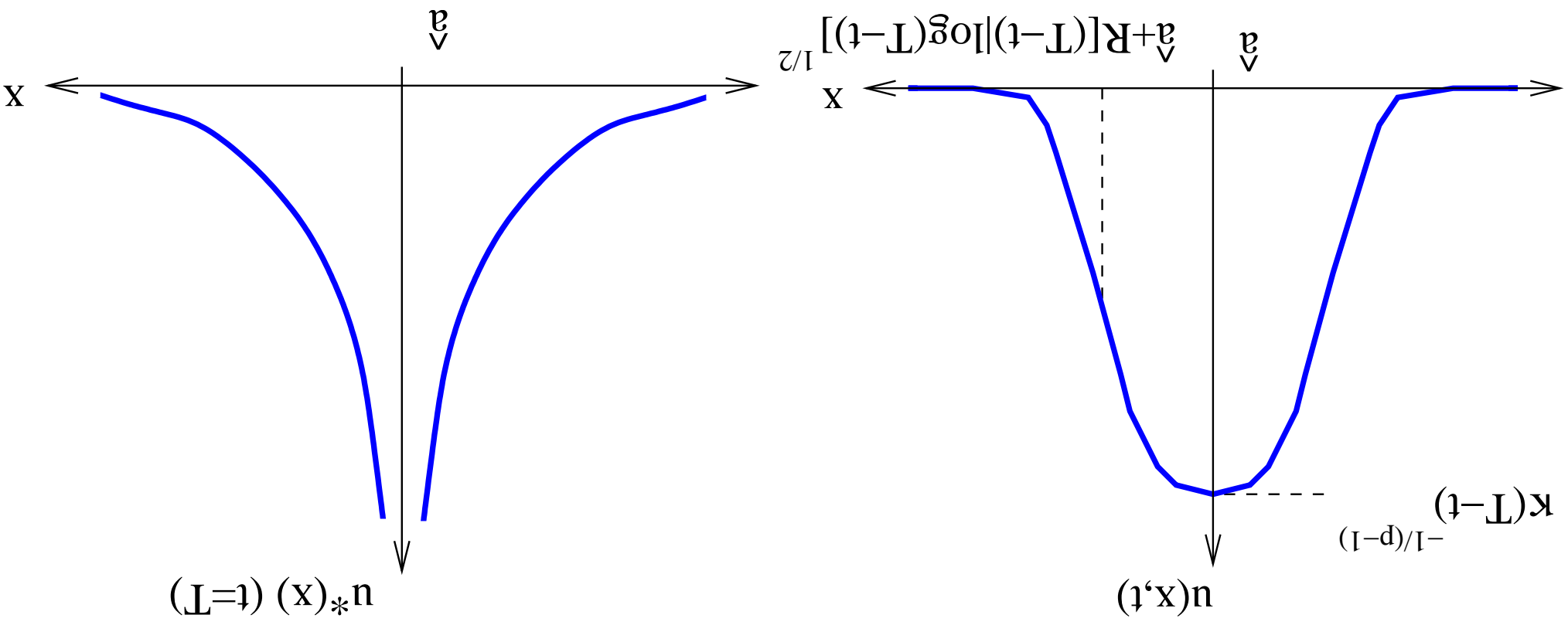
- Taux d'explosion

- Perspectives



# Cas d'un point d'explosion $\hat{a}$ isolé dans $S_u$

**Profil à l'explosion** (Herrero-Velázquez, Bricmont-Kupiainen, Merle-Z).



et Velázquez).

**Rq.** C'est le profil générique (démontré en dim. 1 par Herrero

**Rq.** Le profil est radial (ne dépend que de  $|x - \hat{a}|$ ).

$$f(z) = (d - 1 + b(d)z^{\frac{d-1}{1}}) \text{ et } U(z) = \left( \frac{2}{z} \frac{|\log z|}{z^{\frac{d-1}{1}}} \right)^{\frac{1}{1-d}}$$

où

$$\hat{a} \leftarrow x \text{ pb } (|x - \hat{a}|) U \sim (x)_*^n$$

et  $\forall x \neq \hat{a}, n(x, t) \leftarrow (x)_*^n \text{ pb } t \leftarrow T \text{ et}$

$$n(x, t) \sim (t - T)^{\frac{1-d}{1}} f \left( \frac{|(t - T) \log(t - T)|^{\frac{1}{1-d}}}{x - \hat{a}} \right)$$

**Th.** Ce comportement est stable par rapport aux données initiales (la solution explose en un point d'explosion unique avec le même profil).

**Rq.** Deux preuves :

- une approche géométrique, avec construction d'une variété stable autour du profil limite (Merle-Z.).

- une approche "systèmes dynamiques" (Fermanian, Merle, Z.)

## Plan

- **Equation semilinéaire de la chaleur :**

- Approche classique

- Nouvelle approche : Théorème de Liouville

- Point d'explosion isolé (stabilité / données initiales)

- *Point d'explosion non isolé (régularité de l'ensemble*

*d'explosion)*

- **Equation semilinéaire des ondes :**

- Taux d'explosion

- **Perspectives**

## Cas d'un point d'explosion non isolé

**Th. (Z.)** ( $N = 2$ ) Soit  $u$  solution de  $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$ . Soit  $\hat{a}$  un point d'explosion non isolé dans  $S_u$  tel que :

**1/ (Continuum)**

$\exists a \in C((-1, 1), \mathbb{R}^2)$ ,  $a(0) = \hat{a}$  et  $\text{Im } a \subset S_u$ .

**2/ ( $\hat{a}$  n'est pas une "extrémité")**

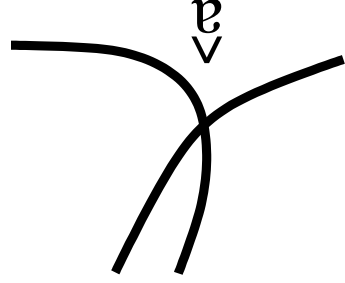
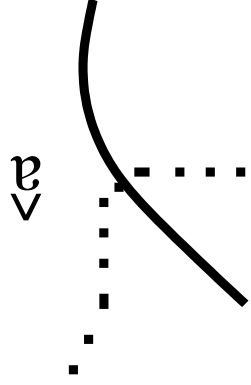
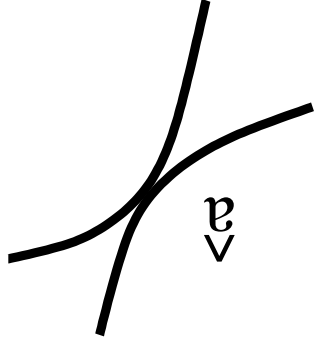
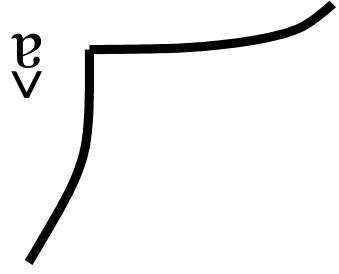
**3/ (Condition technique "raisonnable")**

**Conclusion :** Localement au voisinage de  $\hat{a}$ ,  $S_u$  est le graphe d'une fonction  $C^1$ .

**Rq.** Vrai en dimension  $N$ .

**Rq.** Si  $\text{codim } S_u = 1$ , alors  $S_u$  est  $C^{1,\alpha}$  pour tout  $\alpha \in (0, \frac{2}{1})$ .

Quelques figures géométriques qui ne peuvent être des ensembles d'explosion



**Rq.** Uniquement la variable unidimensionnelle  $d(x, S_n)$  (normale à  $S_n$ ) est responsable de la taille de  $u$  à l'explosion.

**Rq.**  $U$  est le profil générique en dimension 1.

$$f(z) = (d - 1 + b(d)z)^{\frac{1}{1-d}} \text{ et } U(z) = \left[ \frac{2}{b(d)} \frac{|\log z|}{z} \right]^{\frac{1}{1-d}}.$$

où

$$u(x)_*^n \sim U(d(x, S_n)) \text{ et } p(x, S_n) \rightarrow 0$$

et  $\forall x \notin S_n, u(x, t) \rightarrow u(x)_*^n$  et  $T \rightarrow t$

$$u(x, t) \sim (t - T)^{\frac{1}{1-d}} f \left( \frac{\sqrt{|(t - T) \log(t - T)|}}{p(x, S_n)} \right)$$

**Th. (Profil à l'explosion)** (mêmes hypothèses)

**Rappel : cas d'un point d'explosion  $\hat{a}$  isolé**  
**Profil à l'explosion**

Pour tout  $x \neq \hat{a}$ ,  $u(x, t) \rightarrow u_*(x)$  qd  $t \rightarrow T$  et

$$u_*(x) \sim U(|x - \hat{a}|) \text{ qd } x \rightarrow \hat{a}$$

ou

$$U(z) = \left[ \frac{dg}{z^2 (1-d)} \frac{|\log z|}{z^2} \right]^{-\frac{1}{1-d}}$$

**Rq.** Localement,  $S^n = \{\hat{a}\}$ , donc  $|x - \hat{a}| = d(x, S^n)$ . Formelle-

ment on retrouve le même énoncé que pour un point d'explosion

non isolé.

$\Leftrightarrow$  **Universalité.**



“est” le profil générique en dimension 1.

$$\frac{1-d}{1} \left[ \frac{2}{z^2} \frac{2}{|z \log z|} \right] = \text{et } U(z) \text{ ou } f(z) = (d-1)z^{d-1} \text{ et } U(z)$$

$$0 \leftarrow (n_{S^1}, x) p \text{ par } ((n_{S^1}, x) p) \cup \sim (x)_* n$$

et  $\forall x \notin S^1, n(x, t) \leftarrow (x)_* n \text{ par } t \leftarrow T \text{ et}$

$$\left( \frac{\sqrt{|(t-T) \log(t-T)|}}{p(n_{S^1}, x)} \right) f \frac{1-d}{1} (t-T) \sim n(x, t)$$

- Soit une variété  $C^1$  de dimension 1, ...,  $N-1$ .

- Soit un point isolé (de dimension 0),

voisinage de  $\hat{a}$ ) :

cence en  $\hat{a} \in S^1$ , l'ensemble d'explosion est (localement au

**Th (Universalité) (Z.)** : Sous une condition de non dégénéres-

## Plan

- **Equation semilinéaire de la chaleur :**

- Approche classique

- Nouvelle approche : Théorème de Liouville

- Point d'explosion isolé (stabilité / données initiales)

- Point d'explosion non isolé (régularité de l'ensemble

d'explosion)

- *Equation semilinéaire des ondes :*

- *Taux d'explosion*

- **Perspectives**

## Cas de l'équation semilinéaire des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \\ u(0) = u_0 \text{ et } u_t(0) = u_1, \end{array} \right.$$

où  $u(t) : x \in \mathbb{R}^N \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ ,

$$1 < p \leq 1 + \frac{N-1}{4} \text{ si } N \geq 2.$$

(Exposant critique pour l'invariance conforme).  
**Rq.** Le cas  $p$  critique a été récemment achevé.

### Th. (Taux d'explosion) (Merle, Z.)

Pour toute solution  $u$  qui explose en temps fini  $T$ , pour tout  $t \in [\frac{T}{2}, T)$  et  $a \in \mathbb{R}_N$ ,

$$\|u\|_{L^2(B(a,1))} \leq K(T-t)^{-\frac{d-1}{2}}$$

$$\left( \|u_t\|_{L^2(B(a,1))} + \|\Delta u\|_{L^2(B(a,1))} \right) \leq K(T-t)^{-\frac{d-1}{2}-1}$$

où  $K$  dépend de  $N$ ,  $p$  et d'une borne sur  $\|u_0\|$  et sur  $T$ .

**Rq.** Il y a une borne inférieure (facile).

**Rq.** Giga et Kohn avaient fait de même pour la chaleur.

**Preuve :** Approche parabolique.

## Variables auto-similaires

$$w^a(y, s) = (T - t)^{\frac{1-d}{2}} n(x, t), \quad y = \frac{x - a}{x - a}, \quad s = -\log(T - t).$$

Problème équivalent sous forme divergence :

Pour tous  $y \in \mathbb{R}^N$  et  $s \geq -\log T$  :

$$\partial_2^s w - \frac{d}{2} \operatorname{div} [d \Delta w - d(y \cdot \nabla w)(y)] + \frac{2(d+1)}{2} w - |w|^{d-1} w = -\frac{d+3}{3} \partial_2^s w - 2y \cdot \nabla \partial_2^s w$$

$$\text{ou } p(y) = (1 - |y|_2)^\alpha \text{ et } \alpha \equiv \frac{d-1}{2} - \frac{N-1}{2} \geq 0.$$

**Rq.** On travaille pour  $y \in B(0, 1)$ , qui correspond à  $(x, t)$  dans le cône de lumière de sommet  $(a, T)$ .

# La clé de la preuve : une fonctionnelle de Lyapunov

(Antonini, Merle)

$$E(w) = \int_{B(0,1)} \left( \frac{1}{2} (\partial_s w)^2 + \frac{(d+1)}{2} w^2 - \frac{1}{d+1} |w|^{d+1} \right) dy$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{B(0,1)} |\Delta w|^2 - (y \cdot \nabla w)^2 dy$$

$$p(y) = (1 - |y|^2)^\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{d-1}{2} - \frac{1}{N-1} > 0.$$

## Plan

- **Equation semilinéaire de la chaleur :**

- Approche classique

- Nouvelle approche : Théorème de Liouville

- Point d'explosion isolé (stabilité / données initiales)

- Point d'explosion non isolé (régularité de l'ensemble

d'explosion)

- **Equation semilinéaire des ondes :**

- Taux d'explosion

- *Perspectives*

## **Perspectives**

Equation de la chaleur

- Cas des systèmes.

- Courbure de l'ensemble d'explosion (en cours de redaction). C'est un invariant géométrique. Cela nécessite un affinement du développement asymptotique.

- Classification des ensembles d'explosion.



## Perspectives

Equation des ondes : un théorème de Liouville, profils à l'explosion  
stabilité.

Problèmes sur-critiques : Chaleur, Ondes.

Autres équations : Ginzburg-Landau, Équations d'ordre 4.

Math-biologie : l'angiogénèse (avec Perthame et Corrias).

## Perspectives

Nouveau thème : Math-biologie

Étude de l'angiogénèse (croissance de vaisseaux sanguins autour d'une tumeur cancéreuse, avec Perthame et Corrias)

$$\left\{ \begin{array}{l} n_t = \Delta n - \operatorname{div}(n\chi(c)\nabla c) \\ c_t = \nu \Delta c - cn. \end{array} \right.$$

avec

$n(x, t)$  : concentration des cellules endothéliales (qui tapissent l'intérieur des vaisseaux sanguins),

$c(x, t)$  : concentration de l'attracteur chimique.

## Singularités en math-biologie

Expérience de Budrene et Berg : Des bactéries *E. Coli* dans une boîte de Petri. Chacune sécrète un agent chimique pour attirer les autres.

⇔ concentration des bactéries.

Equations : Modèle de Keller-Segal)

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= \Delta p - \nabla \cdot (p \nabla c) + \delta p \\ \epsilon \frac{\partial c}{\partial t} &= \Delta c + p,\end{aligned}$$

où  $p$  est la densité des bactéries et  $c$  est la densité de l'agent chimique.

(Brenner, Levitov and Budrene)

