Sur la description des formations de singularités pour l'équation de la chaleur non-linéaire

Hatem Zaag

23 mars 1998

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u + F(u) & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T) \\ u & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T) \\ u(.,0) & = & u_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right.$$

où

$u : (x,t) \in \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^M$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^M$,

Ω est un ouvert convexe borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $F : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ est de classe C^1.

Déf: Problème de Cauchy $\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{soit existence globale en temps} \\ \text{soit existence sur}[0,T),\ T < +\infty \text{ et} \end{array}\right.$$

$$\lim_{t \to T} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty :$$

EXPLOSION EN TEMPS FINI T.

Déf: $a \in \Omega$ est point d'explosion pour $u(t)$

s'il existe $(x_n, t_n) \to (a, T)$ tel que

$|u(x_n, t_n)| \to +\infty$.

QUESTIONS:

1) Existence de solutions explosives

2) Estimations des normes de $u(t)$ à l'explosion

3) Comportement asymptotique au voisinage des points d'explosion

4) Interaction de la diffusion et de la réaction

Equation prototype:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$1 < p$, et si $N \geq 3$, $p < \frac{N+2}{N-2}$, avec
$(u(t=0) \geq 0)$ ou $\left(p < \frac{3N+8}{3N-4} \text{ si } N \geq 2\right)$.

Généralisation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla.(a(x)\nabla u) + f(u)$$

avec a symét. unif. elliptique,
a et f C^1, et

$$f(u) \sim u^p \text{ quand } u \to +\infty.$$

Cas complexe ou vectoriel

PLAN

1) Cadre de l'étude et aperçu historique

2) Existence et stabilité de solutions explosives

3) Estimations uniformes sur les solutions explosives positives

4) Existence de profils à l'explosion pour les solutions explosives positives

Obstruction à l'Existence Globale

Fujita 66, Levine 73, Ball 77,...

Ball:

$$E(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} \right) dx,$$

$E(u(t))$ décroît.

Si Ω est borné, $u_0 \in H_0^1$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors:

$E(u_0) \leq 0 \Longrightarrow u(t)$ explose en temps fini.

Variables auto-similaires

Soit $a \in \mathbb{R}^N$ point d'explosion de $u(t)$.

But: Étudier u au voisinage de (a, T).

Transformation:

$$y = \frac{x-a}{\sqrt{T-t}}, \; s = -\log(T-t),$$
$$w_a(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t).$$

Alors $\forall s \geq -\log T$, $\forall y \in \mathbb{R}^N$, $(w_a = w)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \Delta w - \frac{1}{2} y.\nabla w - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1} w \\ &= \frac{1}{\rho} \nabla.(\rho \nabla w) - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1} w \end{aligned}$$

avec $\rho(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4}}}{(4\pi)^{N/2}}$.

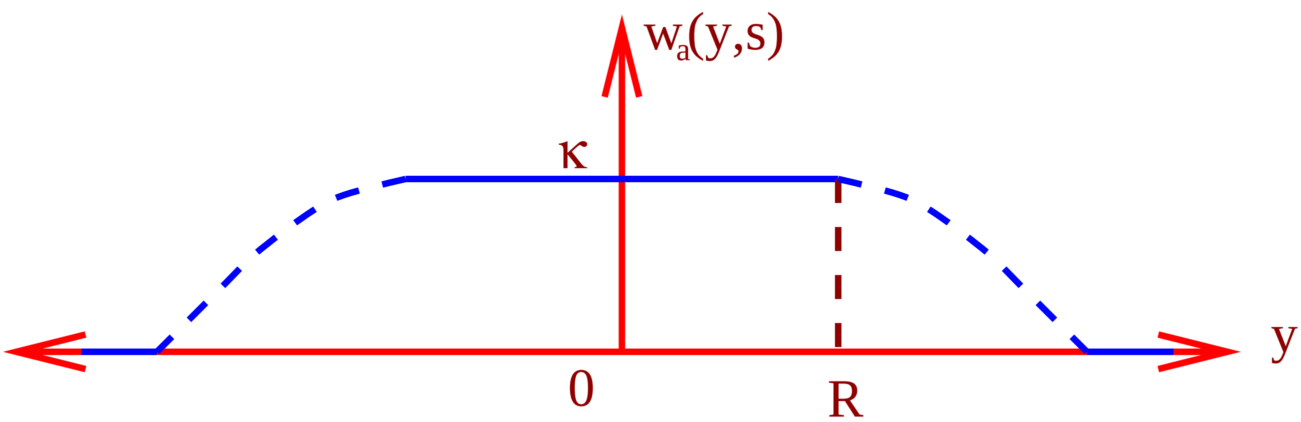
Étudier u au voisinage de (a, T)

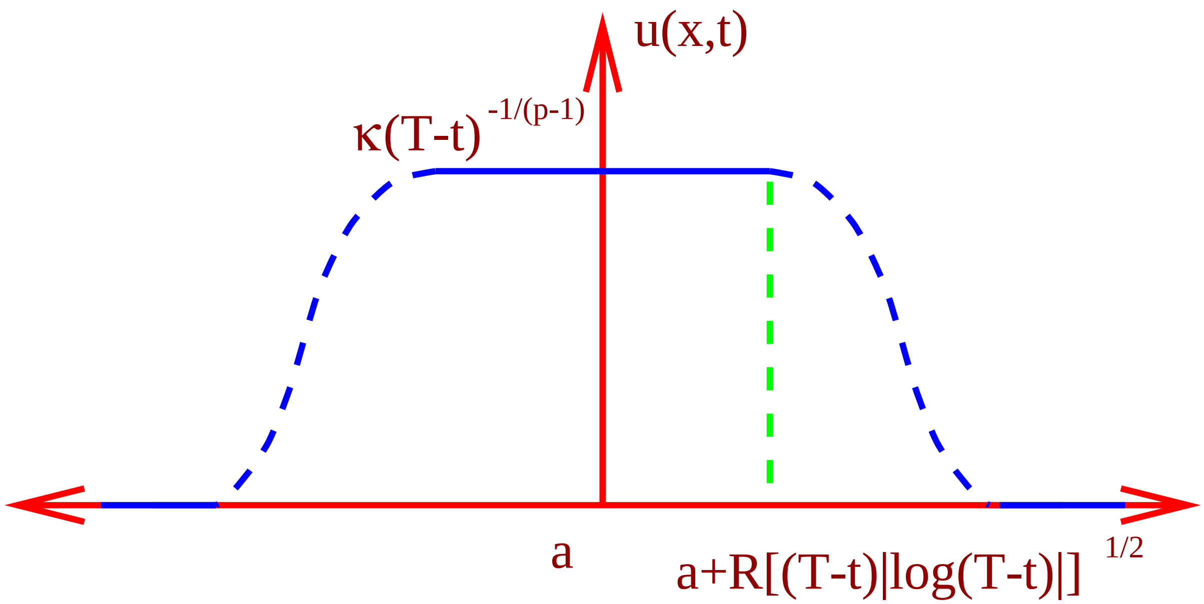
$\Leftrightarrow$ Étudier w_a quand $s \to +\infty$.

Giga - Kohn: $0 < \epsilon_0 \le \|w_a(s)\|_{L^\infty} \le \frac{1}{\epsilon_0}$
$\|\nabla w_a(s)\|_{L^\infty} + \|\Delta w_a(s)\|_{L^\infty} \le C$.
$\Longrightarrow$ Compacité

Développement asymptotique: $|y|$ borné

Giga - Kohn: (Analyse dans L^2_ρ)
$w_a(y,s) \to \kappa = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$ qd $s \to +\infty$ unif. sur tout compact.





Filippas, Kohn, Liu,

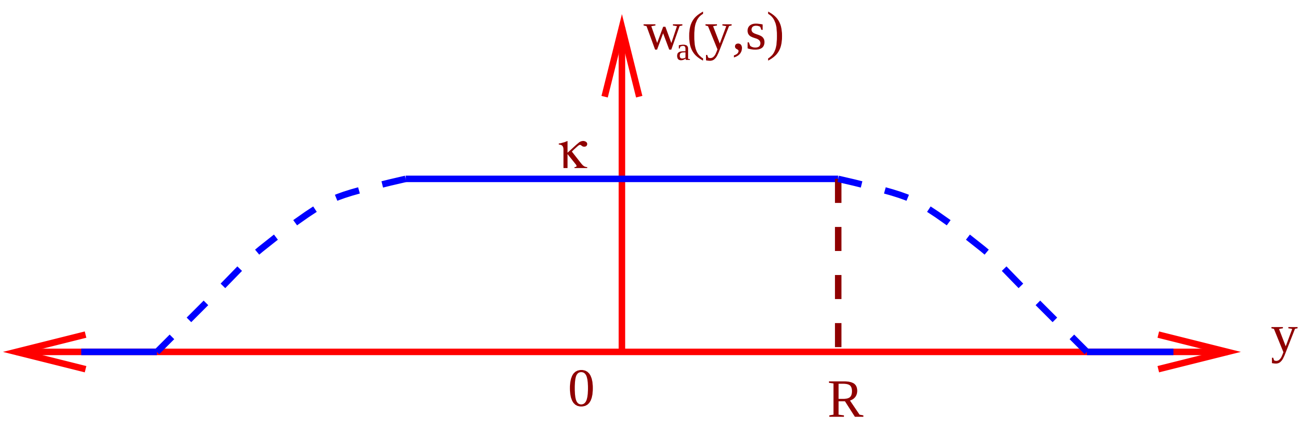
Herrero, Velázquez:

2 cas:

soit $w_a \to \kappa$ exponentiellement

soit $\forall R > 0$,

$$\sup_{|y|\leq R}\left|w_a(y,s) - \left[\kappa + \frac{\kappa}{2ps}(1-\frac{y^2}{2})\right]\right|$$
$$= o\left(\frac{1}{s}\right)$$ (N=1).



Rq: Insuffisance de l'échelle y borné,

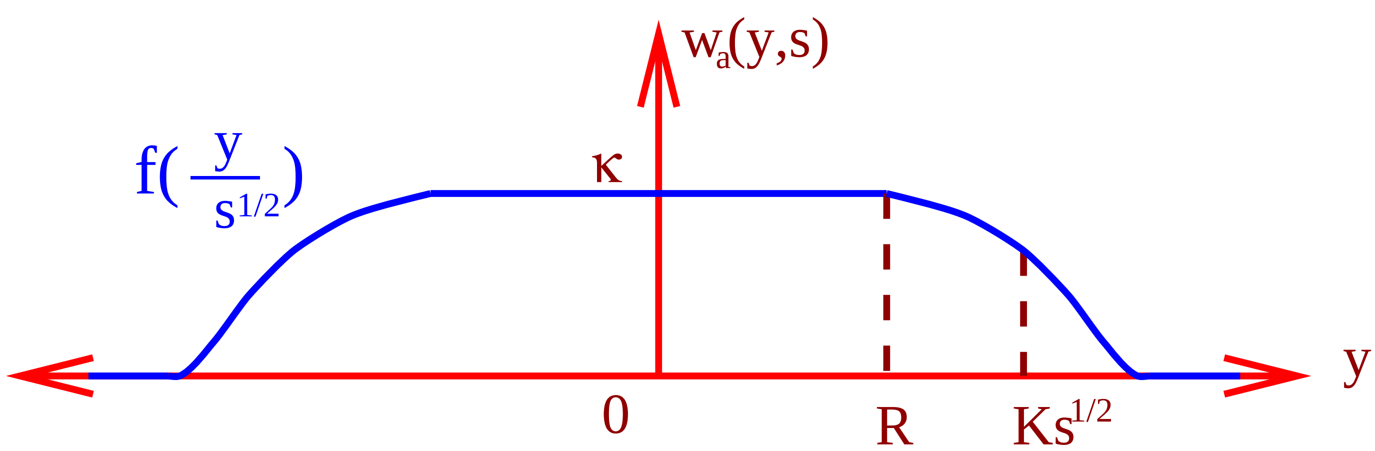
intérêt de $\frac{y}{\sqrt{s}}$...

Développement asymptotique: $\frac{|y|}{\sqrt{s}}$ borné

Bricmont, Kupiainen: Construction d'une solution qui explose en un seul point a telle que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left|w_a(y,s) - f\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)\right| \le \frac{C}{\sqrt{s}}$$

$$f(z) = \left(p - 1 + b(p)|z|^2\right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$



$\Longrightarrow$ "Profil"

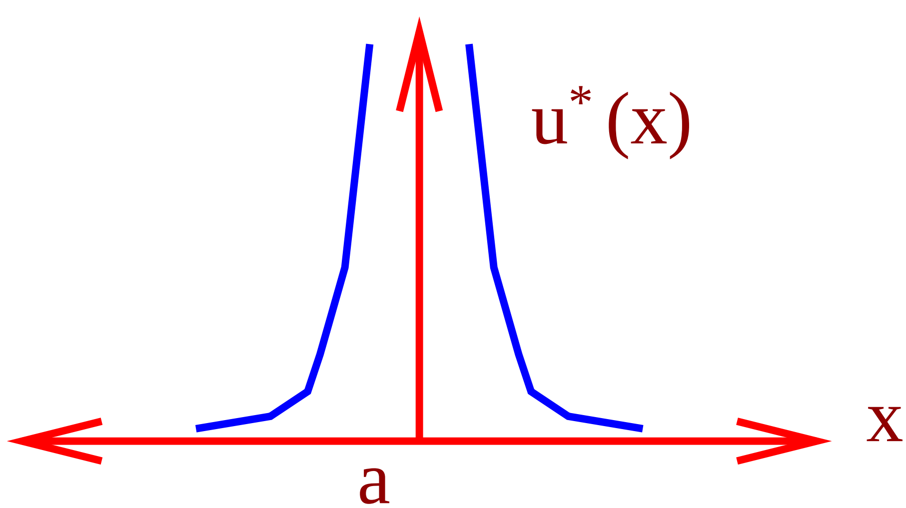
Profil: $|x-a| \leq \epsilon_0$ petit

Herrero - Velázquez: Pour toute solution vérifiant les comportements en $1/s$ sur les bornés,

Pour $0 < |x-a| < \epsilon_0$,

$u(x,t) \to u^*(x)$ qd $t \to T$, et

$$u^*(x) \sim b'(p) \left[\frac{|\log|x-a||}{|x-a|^2}\right]^{\frac{1}{p-1}} \text{ qd } x \to a$$



Equation scalaire (E_u)

Théorème: (F. Merle, HZ) $\forall \hat{T} < T_0$, $\exists (d_0, d_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ tel que $\forall \hat{a} \in \mathbb{R}^N$, la solution $\hat{u}(x,t)$ de (E_u) avec donnée initiale

$$\hat{u}_0(d_0, d_1, x) = \hat{T}^{-\frac{1}{p-1}} f(z) \left(1 + d_0 + d_1.z\right)$$

où $z = (x - \hat{a}) \left(|\log \hat{T}|\hat{T} \right)^{-\frac{1}{2}}$ et

$f(z) = \left(p - 1 + b(p)|z|^2 \right)^{-\frac{1}{p-1}}$

explose en temps fini $\hat{T}$ en un seul point $\hat{a} \in \mathbb{R}^N$ avec:

$$\left| (\hat{T} - t)^{\frac{1}{p-1}} \hat{u}(x,t) - f\left(\frac{x - \hat{a}}{\sqrt{(\hat{T} - t)|\log(\hat{T} - t)|}} \right) \right| \to 0$$

qd $t \to \hat{T}$, unif. en x,

Si $x \neq \{\hat{a}\}$, $\hat{u}(x,t) \to \hat{u}^*(x)$ qd $t \to \hat{T}$, et

$$\hat{u}^*(x) \sim b'(p) \left[\frac{|\log|x - \hat{a}||}{|x - \hat{a}|^2} \right]^{\frac{1}{p-1}} \text{ quand } x \to \hat{a}$$

Rq: Démontré avant par Bricmont - Kupiainen

Stabilité du profil à l'explosion

Théorème (FM, HZ)

$\forall \epsilon$, $\exists \mathcal{V}_\epsilon(\hat{u}_0)$ tel que $\forall u_0 \in \mathcal{V}_\epsilon$:

1) u explose en temps fini T en un seul point a et $|T - \hat{T}| + |a - \hat{a}| \leq \epsilon$,

2) même profil

Equation complexe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1 + i\delta)|u|^{p-1}u$$

$u \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{R}$ et $(1 + i\delta)|u|^{p-1}u$ n'est pas un gradient.

Théorème (HZ) Pour $|\delta|$ petit, il existe $u(t)$ qui explose en temps fini T en un seul point a et $\forall x \neq a$, $u(x,t) \to u^*_\delta(x)$ qd $t \to T$ et

$$u^*_\delta(x) \sim \left[\frac{8(p-\delta^2)}{(p-1)^2}\frac{|\log|x-a||}{|x-a|^2}\right]^{\frac{1+i\delta}{p-1}}$$

qd $x \to a$.

Rq: - Pour $\delta \neq 0$, pas de direction privilégiée,

- Généralisation au cas vectoriel.

Reconnexion d'un vortex avec la paroi dans un supra-conducteur

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h - h^{-\beta}, \ \ h > 0$$

$\beta > 0$.

Déf: h s'éteint ssi h^{-1} explose.

Théorème (FM, HZ) Il existe $h(t)$ qui s'éteint en temps fini T en un seul point a et $\forall x \neq a$, $h(x,t) \to h^*(x)$ qd $t \to T$ et

$$h^*(x) \sim \left[\frac{(\beta+1)^2}{8\beta} \frac{|x-a|^2}{|\log|x-a||} \right]^{\frac{1}{\beta+1}} \text{ qd } x \to a.$$

Rq: - Stabilité

- Avec $h \to 1/h = u$, on a des solutions explosives pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nu \frac{|\nabla u|^2}{u} + u^p$$

avec $1 < \nu < p$.

Comparaison avec une EDO: $u' = u^p$

Théorème (FM, HZ) Si $u(0) \geq 0$ et $u(0) \in H^1 \cap C^2$, alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists C_\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall t \in [0, T)$,

$$|\Delta u| = |\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - u(x,t)^p| \leq \epsilon u^p + C_\epsilon.$$

Corollaire Si a est point d'explosion de $u(t)$, alors

1) $u(x,t) \to +\infty$ quand $(x,t) \to (a,T)$,

2) $\exists \epsilon_0 > 0$, $\forall x \in B(a, \epsilon_0) \times [T - \epsilon_0, T)$, $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$.

Théorème de Liouville (FM, HZ)

Si w est solution de (E_w) définie pour tout $(y,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ telle que $\forall (y,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $0 \le w(y,s) \le C$.

Alors, on est nécessairement dans l'un des cas suivants:

i) $w \equiv 0$,

ii) $w \equiv \kappa = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$,

iii) $\exists s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $w(y,s) = \varphi(s-s_0)$ avec

$$\varphi(s) = \kappa(1+e^s)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Rq: φ est une connexion dans L^∞ des deux points critiques de (E_w), en effet:

$$\varphi' = -\frac{\varphi}{p-1} + \varphi^p,\ \varphi(-\infty) = \kappa,\ \varphi(+\infty) = 0.$$

Estimations optimales uniformes à l'explosion

Théorème (FM,HZ) Si $u(0) \geq 0$, $u(0) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\forall t \in [t_0(\epsilon), T)$,

$$\kappa \leq \|u(t)\|_{L^\infty}(T-t)^{\frac{1}{p-1}} \leq \kappa + \frac{\frac{\kappa}{2p} + \epsilon}{|\log(T-t)|},$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_1 (T-t)^{-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{|\log(T-t)|}},$$

$$\|\Delta u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_2}{|\log(T-t)|}(T-t)^{-\frac{p}{p-1}}.$$

Théorème (FM,HZ) (Classification des profils à l'explosion)

Soit $u(t) \geq 0$ qui explose en (a, T), alors (à un changement de coordonnés près),

$$w_a(y,s) \to f_k(\frac{y}{\sqrt{s}}) \text{ qd } s \to +\infty$$

unif. en $\frac{|y|}{\sqrt{s}} \leq K_0$ (quelconque), avec pour $k \leq N$,

$$f_k(z) = (p-1+b(p)\sum_{i=1}^{N-k}|z_i|^2)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Rq: - La vitesse de convergence est indépendante du point a considéré.

- Velázquez a obtenu ce résultat, mais avec une vitesse qui dépend du point considéré.

Théorème (FM,HZ) (Equivalence des comportements explosifs en un point)
Si $u(t) \geq 0$ explose en (a, T) alors (A) $\Longleftrightarrow$ (B) $\Longleftrightarrow$ (C) avec

(A) $w_a(y,s) = \kappa + \frac{\kappa}{2ps}(N - \frac{1}{2}|y|^2) + o\left(\frac{1}{s}\right)$ quand $s \to +\infty$ unif. sur tout compact.

(B) $w_a(y,s) \sim \left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p}\frac{|y|^2}{s}\right)^{-\frac{1}{p-1}}$ quand $s \to +\infty$ unif. en $|y| \leq K_0\sqrt{s}$.

(C) Si $x \neq a$, $u(x,t) \to u^*(x)$ quand $t \to T$ et

$$u^*(x) \sim \left[\frac{8p}{(p-1)^2}\frac{|\log|x-a||}{|x-a|^2}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$