

Stabilité du profil à l'explosion pour
les équations du type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$

Frank Merle et Hatem Zaag

Résumé - On considère dans cette note l'équation non linéaire suivante:

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, u(., 0) = u_0,$$

(et d'autres extensions de cette équation, où le principe du maximum ne s'applique pas). On décrit d'abord le comportement au voisinage de l'explosion d'une solution explosant en temps fini. Ensuite, on montre que ce comportement est stable.

Stability of blow-up profile for equation of the type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$

Abstract - *In this note, we consider the following nonlinear heat equation*

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, u(., 0) = u_0,$$

(and various extensions of this equation, where the maximum principle do not apply). We first describe precisely the behavior of a blow-up solution near blow-up time and blow-up point. We then show a stability result on this behavior.

Abriged English Version - In this note, we consider the following nonlinear equation:

$$(1) \quad u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, u(., 0) = u_0 \in H,$$

where $u(t) : x \in \mathbb{R}^N \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$. We note $H = W^{1,p+1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. We assume in addition the exponent p subcritical: if $N \geq 3$ then $1 < p < (N+2)/(N-2)$, otherwise, $1 < p < +\infty$. Other types of equations will be also considered.

We study the case where the solution $u(t)$ of (1) blows-up in finite time in the sense that u exists on $[0, T)$ with $T < +\infty$, and $\|u(t)\|_H \rightarrow +\infty$ when $t \rightarrow T$. (see Ball [1], Levine [13]). In this case, there is at least one blow-up point a (that is $a \in \mathbb{R}^N$ such that: $|u(a, t)| \rightarrow +\infty$ when $t \rightarrow T$). We are interested in the structure of the solution near this point. We want to study the behavior of $u(t)$ near blow-up time and point, and the stability of such behavior.

This problem has been extensively studied in the last recent years (see [6], [8], [9], [10]).

In [3], Bricmont and Kupiainen construct a blow-up solution $u(t)$ for (1), which approaches a universal profile with a boundary layer separating regions where $u(x, t)$ is “large” and regions where $u(x, t)$ is “small”, and moving at the rate

$$(2) \quad \sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}.$$

For that, they used ideas close to the renormalization theory, and some hard analysis.

In this note, we shall give an idea of a more elementary proof of their result, based on a more geometrical approach and on techniques of a priori estimates, which apply to other contexts. (In particular, we do not use maximum principle).

Theorem 1 Existence of a blow-up solution with a boundary layer with the rate (2)

There exists $T_0 > 0$ such that for each $T \in (0, T_0]$, $\forall g \in H$ with $\|g\|_{L^\infty} \leq (\log T)^{-2}$, one can find $d_0 \in \mathbb{R}$ and $d_1 \in \mathbb{R}^N$ such that for each $a \in \mathbb{R}^N$, the solution $u(t)$ of equation (1) with initial data

$$u_0(x) = T^{-\frac{1}{p-1}} \left\{ f(z) \left(1 + \frac{d_0 + d_1 z}{p-1 + \frac{(p-1)^2}{4p} |z|^2} \right) + g(z) \right\}, \text{ where } : z = (x-a)(|\log T|T)^{-\frac{1}{2}},$$

blows-up at T at only one blow-up point: a . Moreover,

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow T} \|(T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(a + ((T-t)|\log(T-t)|)^{\frac{1}{2}} z, t) - f(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

$$\text{with } f(z) = (p-1 + \frac{(p-1)^2}{4p} |z|^2)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Remark: Such behavior is suspected to be generic.

Remark: Related results using strongly dimension one and maximum principle were obtained in [11] for $N = 1$.

In [19], second author shows analogous results for the following equations (where the maximum principle do not apply):

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u + i|u|^{r-1}u, \quad U_t = \Delta U + |U|^{p-1}U + F_1(U) \text{ with } U : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M, |F_1(U)| \leq C|U|^r, \text{ where } p < \frac{N+2}{N-2} \text{ if } N \geq 3, \text{ and } 1 \leq r < p.$$

Moreover, we suspect that the same analysis can be carried for other types of equations not satisfying maximum principle, for example: $u_t = -\Delta^2 u + |u|^{p-1}u$.

As in the paper of Bricmont and Kupiainen [2], we won't use maximum principle in the proof. The technique used here will allow us using geometrical interpretation of quantities of the type of d_0 and d_1 to derive stability results concerning this type of behavior, with respect to perturbations of the initial data.

Theorem 2 Stability of the blow-up behavior with respect to initial data

Let \hat{u}_0 be an initial data constructed in Theorem 1. Let $\hat{u}(t)$ be the solution of equation (1) with initial data \hat{u}_0 , \hat{T} its blow-up time and \hat{a} its blow-up point.

Then there exists a neighborhood \mathcal{V}_l of \hat{u}_0 in H which has the following property:

For each u_0 in \mathcal{V}_l , $u(t)$ blows-up in finite time $T = T(u_0)$ at only one blow-up point $a = a(u_0)$, where $u(t)$ is the solution of equation (1) with initial data u_0 . Moreover, $u(t)$ behaves near $T(u_0)$ and $a(u_0)$ in an analogous way as $\hat{u}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow T} \|(T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(a + ((T-t)|\log(T-t)|)^{\frac{1}{2}} z, t) - f(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Remark: Theorem 2 yields the fact that the blow-up profile $f(z)$ is stable with respect to perturbations in initial data.

Remark: From [14], we have $T(u_0) \rightarrow \hat{T}$, $a(u_0) \rightarrow \hat{a}$, as $u_0 \rightarrow \hat{u}_0$ in H .

According to a result in [14], we have the following corollary:

Corollary 1 ($N \geq 2$) For arbitrary given set of k points x_1, \dots, x_k in \mathbb{R}^N , there exists initial data u_0 such that the solution u of (1) with initial data u_0 blows-up exactly at x_1, \dots, x_k .

I - Introduction - Dans cette note, on considère l'équation de la chaleur non linéaire suivante:

$$(1) \quad u_t = \Delta u + |u|^{p-1} u, u(., 0) = u_0 \in H,$$

avec $u(t) : x \in \mathbb{R}^N \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$. On note $H = W^{1,p+1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, on suppose l'exposant p sous-critique: si $N \geq 3$ alors $1 < p < (N+2)/(N-2)$, sinon, $1 < p < +\infty$. D'autres types d'équations seront également considérés.

On étudie le cas où la solution $u(t)$ de (1) explose en temps fini, au sens où u existe sur $[0, T)$ avec $T < +\infty$ et $\|u(t)\|_H \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T$. (voir

Ball [1], Levine [13]). Dans ce cas, il existe au moins un point d'explosion a (qui est un point $a \in \mathbb{R}^N$ satisfaisant: $|u(a, t)| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T$). On s'intéresse à la structure de la solution au voisinage de ce point. On étudie le comportement de $u(t)$ au voisinage du temps et du point d'explosion, ainsi que la stabilité d'un tel comportement.

Ce problème a été beaucoup étudié ces dernières années (voir [6], [8], [9], [10]).

Dans [3], Bricmont et Kupiainen ont construit une solution $u(t)$ de (1), explosant en temps fini, et qui approche un profil universel séparant les régions où $u(x, t)$ est "grande" des régions où $u(x, t)$ est "petite", avec une interface se déplaçant selon

$$(2) \quad \sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}.$$

Pour démontrer ce résultat, ils ont utilisé des idées proches de la théorie de la renormalisation, et des estimations assez difficiles.

Dans cette note, on donne une idée d'une preuve plus élémentaire de leur résultat, s'appuyant sur une approche plus géométrique et sur des techniques d'estimations à priori, qui s'appliquent dans d'autres contextes. (En particulier, on n'utilise pas de principe du maximum).

Théorème 1 Existence d'une solution explosant en temps fini avec une interface se déplaçant selon (2)

Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \in (0, T_0]$, $\forall g \in H$ avec $\|g\|_{L^\infty} \leq (\log T)^{-2}$, on peut trouver $d_0 \in \mathbb{R}$ et $d_1 \in \mathbb{R}^N$ tels que pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, la solution $u(t)$ de l'équation (1) avec donnée initiale

$$u_0(x) = T^{-\frac{1}{p-1}} \left\{ f(z) \left(1 + \frac{d_0 + d_1 z}{p-1 + \frac{(p-1)^2}{4p} |z|^2} \right) + g(z) \right\}, \text{ avec } : z = (x-a)(|\log T|T)^{-\frac{1}{2}},$$

explose en temps fini T en un seul point d'explosion: a . De plus,

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow T} \|(T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(a + ((T-t)|\log(T-t)|)^{\frac{1}{2}} z, t) - f(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

$$\text{avec } f(z) = (p-1 + \frac{(p-1)^2}{4p} |z|^2)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Remarque: On soupçonne ce comportement d'être générique.

Remarque: Des résultats similaires ont été obtenus dans [11] pour $N = 1$ grâce au principe du maximum et à la dimension un.

Dans [19], le deuxième auteur montre des résultats analogues pour les équations suivantes (où le principe du maximum ne s'applique pas):

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u + i|u|^{r-1}u, \quad U_t = \Delta U + |U|^{p-1}U + F_1(U), \quad \text{avec } U : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M, \quad |F_1(U)| \leq C|U|^r, \quad p < \frac{N+2}{N-2} \text{ si } N \geq 3, \text{ et } 1 \leq r < p.$$

De plus, on pense qu'on peut obtenir par les mêmes méthodes des résultats d'explosion pour d'autres équations ne vérifiant pas le principe du maximum, par exemple: $u_t = -\Delta^2 u + |u|^{p-1}u$.

Comme dans [2], on n'utilise pas de principe du maximum dans la preuve. Les techniques utilisées ici permettront grâce à une interprétation géométrique de quantités du type de d_0 et d_1 d'obtenir des résultats de stabilité concernant ce type de comportement par rapport aux données initiales.

Théorème 2 Stabilité du comportement à l'explosion par rapport aux données initiales

Soit \hat{u}_0 une donnée initiale construite au Théorème 1. Soit $\hat{u}(t)$ la solution de l'équation (1) avec donnée initiale \hat{u}_0 , \hat{T} son temps d'explosion, et \hat{a} son point d'explosion.

Alors il existe un voisinage \mathcal{V}_l de \hat{u}_0 dans H avec les propriétés suivantes: Pour tout u_0 dans \mathcal{V}_l , $u(t)$ explose en temps fini $T = T(u_0)$ en un seul point d'explosion $a = a(u_0)$, où $u(t)$ est la solution de l'équation (1) avec donnée initiale u_0 . De plus, le comportement de $u(t)$ au voisinage de $T(u_0)$ et $a(u_0)$ est analogue au comportement de $\hat{u}(t)$ au voisinage de \hat{T} et \hat{a} :

$$\lim_{t \rightarrow T} \|(T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(a + ((T-t)|\log(T-t)|)^{\frac{1}{2}} z, t) - f(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Remarque: Le Théorème 2 implique que le profil à l'explosion $f(z)$ est stable par rapport à des perturbations dans les données initiales.

Remarque: Après [14], on a $T(u_0) \rightarrow \hat{T}$, $a(u_0) \rightarrow \hat{a}$, quand $u_0 \rightarrow \hat{u}_0$ dans H .

D'après un résultat dans [14], on a le corollaire suivant:

Corollaire 1 ($N \geq 2$) *Pour tout ensemble de k points x_1, \dots, x_k dans \mathbb{R}^N , il existe une donnée initiale u_0 telle que la solution u de (1) avec donnée initiale u_0 explose exactement en x_1, \dots, x_k .*

II - Idées de la démonstration du Théorème 1 - Pour les preuves des autres résultats et pour plus de détails, voir [15].

Partie I : Transformation du problème - Nous traitons le cas $N = 1$.
On introduit les *variables auto-similaires*:

$$(4) \quad y = \frac{x - a}{\sqrt{T - t}}, s = -\log(T - t), w(y, s) = (T - t)^{\frac{1}{p-1}} u(x, t),$$

où a est le point d'explosion et T le temps d'explosion de la solution $u(t)$ à construire.

On introduit

$$(5) \quad \tilde{w}(y, s) = w(y, s) - \varphi(y, s) = w(y, s) - \left\{ \frac{\kappa}{2ps} + (p-1 + \frac{(p-1)^2 y^2}{4ps})^{-\frac{1}{p-1}} \right\}.$$

q satisfait l'équation suivante:

$$(6) \quad \frac{\partial q}{\partial s} = (\mathcal{L} + V(y, s))q + E(q, y, s),$$

avec $\mathcal{L}(q) = \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \frac{1}{2}y \frac{\partial q}{\partial y} + q$, $V(y, s) = p(\varphi^{p-1} - \frac{1}{p-1})$ et

$$E(q, y, s) = \{ |\varphi + q|^{p-1}(\varphi + q) - \varphi^p - p\varphi^{p-1}q \} + \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{2}y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{p-1}\varphi + \varphi^p - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\}.$$

On écrit alors $q(y, s) = q(y, s)\chi_0(\frac{y}{K_0\sqrt{s}}) + q(y, s)(1 - \chi_0(\frac{y}{K_0\sqrt{s}})) = q_b(y, s) + q_e(y, s)$, où $K_0 > 0$, $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi_0 \equiv 1$ sur $[-1, 1]$ et $\chi_0 \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.

On décompose ensuite q_b suivant le spectre de \mathcal{L} dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ avec $d\mu(y) = \frac{e^{y^2/4}}{\sqrt{4\pi}}$ ($\text{spec}(\mathcal{L}) = \{1 - \frac{m}{2} | m \in \mathbb{N}\}$). On obtient:

$$(7) \quad q(y, s) = q_b(y, s) + q_e(y, s) = \left\{ \sum_{m=0}^2 q_m(s)h_m(y) + q_-(y, s) \right\} + q_e(y, s),$$

où h_m est la fonction propre qui correspond à $1 - \frac{m}{2}$, $q_-(y, s)$ est la projection de $q_b(y, s)$ sur l'espace des valeurs propres négatives de \mathcal{L} .

On va construire u_0 telle que $u(t)$ vérifie une estimation plus forte que (3). Définissons d'abord pour $A > 0$, $s > 0$:

$$\begin{aligned} - V_A(s) &= \{r \in L^2(\mathbb{R}, d\mu) \mid |r_m| \leq As^{-2}, m = 0, 1; |r_2| \leq A^2(\log s)s^{-2}; |r_-(y)| \leq \\ & A(1+|y|^3)s^{-2}; \|r_e\|_{L^\infty} \leq A^2s^{-\frac{1}{2}}; \text{ avec } r(y) = \sum_{m=0}^2 r_m h_m(y) + r_-(y) + r_e(y)\}, \\ - \hat{V}_A(s) &= [-\frac{A}{s^2}, \frac{A}{s^2}]^2 \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On cherche $A > 0$ et $S_0 > 0$ tels que pour tout $s_0 \geq S_0$, $g \in H$ avec $\|g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{s_0^2}$, on peut trouver $(d_0, d_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall s \geq s_0$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \|w_{d_0, d_1}(y, s) -$

$$f(\frac{y}{\sqrt{s}})\|_{L^\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \|q_{d_0, d_1}(y, s)\|_{L^\infty} = 0, \text{ où } q_{d_0, d_1} \text{ est la solution de l'équation}$$

(6) avec donnée initiale à $s = s_0$

$$(8) \quad q_{d_0, d_1}(y, s_0) = (p-1 + \frac{(p-1)^2}{4ps_0}y^2)^{-\frac{p}{p-1}}(d_0 + d_1y/\sqrt{s_0}) - \frac{\kappa}{2ps_0} + g(y/\sqrt{s_0}).$$

On va en fait trouver (d_0, d_1) tels que $q_{d_0, d_1}(s) \in V_A(s)$ pour $s \geq s_0$, ce qui entraîne $\lim_{s \rightarrow +\infty} \|q_{d_0, d_1}(s)\|_{L^\infty} = 0$. Il est facile de vérifier alors que $u(t)$ explose en temps fini T avec un seul point d'explosion: $x = a$, et vérifie (3).

Partie II: Réduction à un problème de dimension finie - C'est la partie cruciale de la preuve du Théorème 1. Ici, on montre à travers des estimations a priori que pour contrôler $q(s)$ dans $V_A(s)$ ($s \geq s_0$), il suffit de contrôler $(q_0, q_1)(s)$ dans $\hat{V}_A(s)$ (ainsi, on réduit un problème de dimension infinie à un problème de dimension finie).

Proposition 1 (Contrôle de q par (q_0, q_1)) *Il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $A \geq A_1$, il existe $s_1(A) > 0$ tel que pour tout $s_0 \geq s_1(A)$, pour tout $g \in H$ avec $\|g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{s_0^2}$, on a la propriété suivante:*

-si (d_0, d_1) est choisi tel que $(q_0(s_0), q_1(s_0)) \in \hat{V}_A(s_0)$, et,

-si pour $s_* \geq s_0$, on a $\forall s \in [s_0, s_*]$, $q(s) \in V_A(s)$, et $q(s_*) \in \partial V_A(s_*)$, alors
i) $\forall s \in [s_0, s_]$, $|q_2(s)| \leq A^2 s^{-2} \log s - s^{-3}$, $|q_-(y, s)| \leq \frac{A}{2}(1 + |y|^3)s^{-2}$, $\|q_e(s)\|_{L^\infty} \leq \frac{A^2}{2\sqrt{s}}$.*

ii) $(q_0(s_), q_1(s_*)) \in \partial \hat{V}_A(s_*)$ et il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\forall \delta \in (0, \delta_0)$, $(q_0, q_1)(s_* + \delta) \notin \hat{V}_A(s_* + \delta)$.*

Partie III: Argument topologique en dimension finie - On choisit $A \geq A_1$. On résout maintenant le problème de dimension finie. On remarque par un calcul explicite:

Lemme 1 (Propriété topologique pour $s = s_0$) *Il existe $s_2(A) > 0$ tel que pour tout $s_0 \geq s_2(A)$, pour tout $g \in H$ avec $\|g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{s_0^2}$, il existe un ensemble $\mathcal{D}_{g, s_0} \subset \mathbb{R}^2$ topologiquement équivalent à un carré, vérifiant la propriété suivante:*

$$q_{d_0, d_1}(s_0) \in V_A(s_0) \text{ si et seulement si } (d_0, d_1) \in \mathcal{D}_{g, s_0}.$$

On fixe $S_0 > \sup(s_1(A), s_2(A))$ et considère $s_0 \geq S_0$. On démontre le Théorème 1 pour A , s_0 et $g \in H$ avec $\|g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{s_0^2}$ par un argument topologique.

On procède par l'absurde, et on suppose que pour tout $(d_0, d_1) \in \mathcal{D}_{g, s_0}$, il existe $s > s_0$ tel que $q_{d_0, d_1}(s) \notin V_A(s)$. Soit $s_*(d_0, d_1)$ l'infimum de tous ces s . Grâce à la Partie II, on peut définir

$$\begin{aligned} \Phi_g : \mathcal{D}_{g, s_0} &\longrightarrow \partial \mathcal{C} \\ (d_0, d_1) &\longrightarrow \frac{s_*(d_0, d_1)^2}{A} (q_0, q_1)_{d_0, d_1}(s_*(d_0, d_1)) \end{aligned}$$

où \mathcal{C} est le carré unité de \mathbb{R}^2 . On démontre alors que Φ_g est continue et que sa restriction à $\partial\mathcal{D}_{g,s_0}$ est homéomorphe à l'identité. Ceci est une contradiction d'après la théorie du degré topologique, donc il existe $(d_0(g), d_1(g))$ tel que $\forall s \geq s_0, q_{d_0, d_1}(s) \in V_A(s)$. Ceci termine la preuve.

References

- [1] J. Ball, Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, *Quart. J. Math. Oxford* 28, 1977, p. 473-486.
- [2] M. Berger et R. Kohn, A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions, *Comm. Pure Appl. Math.* 41, 1988, p. 841-863.
- [3] J. Bricmont et A. Kupiainen, Universality in blow-up for nonlinear heat equations, *Nonlinearity* 7, 1994, p. 539-575.
- [4] J. Bricmont, A. Kupiainen et G. Lin, Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 47, 1994, p. 893-922.
- [5] J. Bricmont et A. Kupiainen, Renormalization group and nonlinear PDEs, *Quantum and non-commutative analysis, past present and future perspectives*, Kluwer (Boston), 1993.
- [6] S. Filippas et R. Kohn, Refined asymptotics for the blowup of $u_t - \Delta u = u^p$, *Comm. Pure Appl. Math.* 45, 1992, p. 821-869.
- [7] S. Filippas et F. Merle, Modulation theory for the blowup of vector-valued nonlinear heat equations *J. Diff. Equations* 116, 1995, p. 119-148
- [8] Y. Giga et R. Kohn, Nondegeneracy of blow-up for semilinear heat equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 42, 1989, p. 845-884.
- [9] Y. Giga et R. Kohn, Characterizing blowup using similarity variables, *Indiana Univ. Math. J.* 36, 1987, p. 1-40.
- [10] Y. Giga et R. Kohn, Asymptotically self-similar blowup of semilinear heat equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 38, 1985, p. 297-319.
- [11] M. A. Herrero et J. J. L. Blow-up behavior of one-dimensional semilinear parabolic equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 10, 1993, p. 131-189.
- [12] M. A. Herrero et J. J. L. Velazquez, Flat blow-up in one-dimensional semilinear heat equations, *Differential and Integral eqns.* 5, 1992, p. 973-997.
- [13] H. Levine, Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 51, 1973, p. 371-386.

- [14] F. Merle, Solution of a nonlinear heat equation with arbitrary given blow-up points, *Comm. Pure Appl. Math.* 45, 1992 p. 263-300.
- [15] F. Merle et H. Zaag, Stability of blow-up profile for equation of the type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$, *prépublication*.
- [16] Simon, B., Functional Integration and Quantum Physics, Academic press, New York, 1979.
- [17] J. J. L. Velazquez, Classification of singularities for blowing up solutions in higher dimensions *Trans. Amer. Math. Soc.* 338, 1993, p. 441-464.
- [18] F. Weissler, Single-point blowup for a semilinear initial value problem, *J. Diff. Equations* 55, 1984, p. 204-224.
- [19] H. Zaag, Blow-up results for vector-valued non-linear heat equations, *en préparation*.

F. M. : Département de Mathématiques, Université de Cergy-Pontoise, 8 le Campus, 95 033 Cergy-Pontoise, France.

H. Z. : Département de Mathématiques et Informatique, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75 230 Paris Cedex 05, France.