



Synthèse de travaux scientifiques

en vue de l'obtention de
l'habilitation à diriger des recherches

en
Mathématiques

par
Maher ZERZERI

**Contributions à l'analyse semi-classique de certains objets
spectraux via l'approche microlocale.**

soutenue publiquement le 13 mars 2019 à 14 h, devant le jury composé de :

M. Nicolas BURQ	Université Paris-Sud.
M. Alain GRIGIS	Université Paris 13.
M. Frédéric HÉRAU	Université de Nantes.
M. Alain JOYE	Université Grenoble Alpes.
M. Francis NIER	Université Paris 13.
M. Johannes SJÖSTRAND	Université de Bourgogne F-C.
M. San VŨ NGỌC	Université Rennes 1.

après avis des rapporteurs :

M. Johannes SJÖSTRAND (*rapport d'exposition*), M. San VŨ NGỌC,
et M. Maciej ZWORSKI, University of California, BERKELEY.

**Contributions à l'analyse semi-classique de certains
objets spectraux via l'approche microlocale.**

À ma Mère
À mon Père
Qui ont éveillé
En moi le désir d'étudier
Et m'ont insufflé ce goût pour le Savoir

*Celui qui n'a pas vu croître et mûrir pour lui le fruit de la Vérité
Ne marche pas d'un pied ferme sur la Route
Quiconque inclina vers soi l'arbre de la Science
Sait qu'aujourd'hui est comme hier et demain comme le Premier Jour
Omar El-Khayyam (1040-1123)*

Remerciements

À Salem, Mona, Samy, Nader et ma femme Saïda

De nombreuses personnes ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de cette habilitation à diriger les recherches. C'est avec un grand plaisir que je leur exprime ici toute ma reconnaissance.

D'abord, je tiens à remercier Johannes SJÖSTRAND qui m'a fait l'amitié de présenter ce mémoire d'habilitation à la commission des habilitations des universités parisiennes, et de rédiger le rapport de présentation afférent, où il décrit les travaux de recherche exposés dans ce mémoire avec une minutie impressionnante. Johannes SJÖSTRAND, mon maître, m'a initié à l'analyse semi-classique, l'étude des résonances et l'analyse microlocale. Il a dirigé mes premiers pas dans la recherche mathématique, et qui représente, à l'orée d'une étape qui m'amènera à avoir moi-même des étudiants en doctorat, l'aune à laquelle mesurer les qualités d'un directeur de thèse.

Je voudrais manifester ma gratitude à San VŨ NGŨC et Maciej ZWORSKI qui ont accepté de lire ce tapuscrit en détails et d'écrire les rapports de pré-soutenance. J'imagine que quiconque écrit des mathématiques souhaite avoir des lecteurs, si possible parmi ses illustres pairs. Je suis donc très heureux que des mathématiciens de leur envergure aient incarné ces lecteurs en consacrant du temps à l'évaluation de ce modeste mémoire.

Mes remerciements vont ensuite aux membres de jury qui me font l'honneur d'assister à la soutenance : à Johannes SJÖSTRAND et San VŨ NGŨC, encore une fois ; à Nicolas BURQ, Frédéric HÉRAU et Francis NIER, qui au cours des années m'ont apporté leur soutien à un moment ou à un autre et ont suivi parfois de très près l'avancement de mes travaux ; à Alain JOYE, que je contrains à courir entre Bordeaux, Paris et Grenoble lors d'une semaine déjà chargée, et qui a l'élégance de ne pas m'en tenir grief ; à Alain GRIGIS, enfin, qui m'a accueilli au sein de l'équipe Physique Mathématique et Équation aux Dérivées Partielles lors de mon arrivée à Paris 13, je souhaite qu'il sache que je n'oublie pas son accueil chaleureux et son bienveillance à mon égard, et que je lui suis profondément reconnaissant de ce qu'il m'a apporté.

Ce mémoire d'habilitation ne serait rien, bien évidemment, sans mes collaborateurs (plutôt mes amis), et c'est avec plaisir que je leur témoigne à cette occasion ma reconnaissance et mon amitié : à Mouez DIMASSI, le grand frère, qui m'a introduit à la théorie de diffusion pour les opérateurs de Schrödinger périodiques ; aux membres de l'équipe du chameau Jean François BONY, Setsuro FUJIIÉ et Thierry RAMOND dont les discussions et les échanges très houleux depuis une vingtaine d'années ont abouti à des idées très fructueuses, pas uniquement en mathématique ! toute une histoire cette bande de copains ! ; à Zied AMMARI, le poète, je n'oublie pas non plus son soutien constant, surtout durant une certaine période très difficile ; à Kaïs AMMARI, outre notre collaboration pour deux des articles présentés ici, je dois à Kaïs de m'avoir reçu très chaleureusement à Monastir à plusieurs reprises ; à Takuya WATANABE, mon neveu, dont la collaboration démarre et redémarre toujours avec le même enthousiasme.

Je ne peux terminer sans évoquer les conditions exceptionnelles de recherche au sein du LAGA. Je remercie chaleureusement les membres de l'équipe administrative - pilier solide sur lequel repose le laboratoire - pour leur aide dévouée.

Ermont, le 27 février 2019.

Table des matières

Travaux présentés dans ce mémoire	xi
Introduction générale	1
Autour des résonances en limite semi-classique	35
I Résonances générées par un sommet	37
I.1 Introduction et préliminaires	38
I.1.1 Définition des résonances par distorsions analytiques	38
I.1.2 Géométrie symplectique	40
I.1.3 Géométrie près d'un sommet du potentiel	41
I.1.4 Réduction au problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble capté	43
I.1.5 Terminologie de l'analyse microlocale semi-classique	45
I.2 Résultats et quelques idées de preuves	47
I.2.1 Théorème de propagation des singularités à travers un point fixe hyperbolique	47
I.2.2 De l'analyse microlocale au sommet	51
I.2.3 Résonances engendrées par un sommet du potentiel	55

I.3	Projecteur Spectral et groupe de Schrödinger	58
I.3.1	Projecteur spectral associé à une résonance simple engendrée par un sommet	59
I.3.2	Comportement en temps grand du groupe de Schrödinger	60
I.4	Commentaires et suite	64
II	Résonances générées par des orbites homoclines/hétéroclines	73
II.1	Introduction et préliminaires	74
II.2	Orbites homoclines et résonances.	75
II.2.1	Règle de quantification et asymptotique des résonances	77
II.2.2	Phénomènes remarquables	79
II.2.2.1	Accumulation sur des courbes	79
II.2.2.2	Vibration	81
II.3	Potentiel multi-barrières	84
II.3.1	Cadre géométrique	84
II.3.2	Condition de quantification et asymptotique des résonances	85
II.3.3	Potentiel à trois bosses	88
II.4	États résonants	92
II.4.1	Description des états résonants	93
II.5	Commentaires et suite	95
III	Opérateurs de Schrödinger périodique	99
III.1	Introduction et préliminaires	100
III.2	Résultats et quelques idées de preuves	103
III.3	Minoration du nombre de résonances	109
III.4	Commentaires et suite	111
	Encore du semi-classique	115
IV	Propagation d'états cohérents	117

IV.1 Introduction et préliminaires	118
IV.1.1 Un système infini de particules	120
IV.2 Résultats et quelques idées de preuves	124
IV.3 Commentaires et suite	128
V Équation des poutres amorties	131
V.1 Introduction	132
V.2 Résultat et quelques idées de preuves	135
V.3 Commentaires et suite	138

Travaux présentés dans ce mémoire¹

- [xxii] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Resonances for Homoclinic Trapped Sets*. Astérisque, Volume 405 (2018) p. vii+314.
- [xxi] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Barrier-top resonances for non globally analytic potentials*. J. Spectr. Theory 9 (2019), n° 1, p. 315–348.
- [xx] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Quantization condition for multi-barrier resonances*. RIMS Kôkyûroku Bessatsu B67 (2017), p. 43–53.
- [xix] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Propagation des singularités et résonances*. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 355 (2017), n° 8, p. 887–891.
- [xviii] K. Ammari, M. Dimassi and M. Zerzeri, *Rate of decay of some abstract Petrowsky-like dissipative semi-groups*. Semigroup Forum, Volume 93 (2016), n° 1, p. 1–16.
- [xvii] Z. Ammari and M. Zerzeri, *On the classical limit of self-interacting quantum field Hamiltonians with cutoffs*. Hokkaido Mathematical Journal 43 (2014), n° 3, p. 385–425.
- [xvi] K. Ammari, M. Dimassi and M. Zerzeri, *The rate at which energy decays in a viscously damped hinged Euler-Bernoulli beam*. J. Differential Equations 257, (2014), n° 9, p. 3501–3520.
- [xv] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *WKB Solutions Near an Unstable Equilibrium and Applications*. in Nonlinear Physical Systems - Spectral Analysis, Stability and Bifurcations, Editors : Oleg N. Kirillov, Dmitry E. Pelinovsky, ISTE, Wiley, (2014), p. 15–39.
- [xiv] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Width of resonances created by homoclinic orbits -isotropic fixed point case-*. Spectral and Scattering Theory and Related Topics. RIMS Kôkyûroku Bessatsu B45 (2014), p. 31–44.
- [xiii] T. Watanabe and M. Zerzeri, *Transition probability for multiple avoided crossings with a small gap through an exact WKB method and a microlocal approach*. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 350 (2012), n°^{os} 17-18, p. 841–844.
- [xii] M. Dimassi and M. Zerzeri, *A time-independent approach for the study of spectral shift function*. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 350 (2012), n°^{os} 7-8, p. 375–378.

1. voir MR Author ID : [688504](#), arxiv = [zerzeri](#) et aussi ma page [personnelle](#) où vous trouverez la version finale— ϵ ($\epsilon > 0$ suffisamment petit) de mes travaux « pour des raisons évidentes! ».

- [xi] M. Dimassi and M. Zerzeri, *Spectral shift function for slowly varying perturbation of periodic Schrödinger operators*. Cubo, A Mathematical Journal, vol. 14 (**2012**), n° 1, p. 29–47.
 - [x] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Semiclassical width of resonances created by homoclinic orbits*. International Conference the 26th Matsuyama Camp, Recent Development on Partial Differential Equations, (dedicated to the 60th Birthday of Professor Yoshinori Morimoto) January 6-9, **2011**, Lecture Notes.
 - [ix] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Spectral projection, Residue of the scattering amplitude, and Schrödinger group expansion for barrier-top resonances*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 61 (**2011**), n° 4, p. 1351–1406.
 - [viii] M. Dimassi and M. Zerzeri, *Spectral shift function for perturbed periodic Schrödinger operators. The large-coupling constant limit case*. Asymptotic Analysis, vol. 75 (**2011**), n°s 3-4, p. 233–250.
 - [vii] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Long time behavior of the Schrödinger group associated with a potential maximum*. Spectral theories of non-Hermitian operators and their application, COE Lecture Note, vol. 20 (**2009**), p. 43–55.
 - [vi] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Propagation of microlocal solutions through a hyperbolic fixed point*. Differential Equations and Exact WKB Analysis. RIMS Kôkyûroku Bessatsu B10 (**2008**), p. 1–32.
 - [v] S. Fujiié and M. Zerzeri, *Connection of WKB Solutions at a hyperbolic fixed point*. RIMS Kôkyûroku, 1607 (**2008**), p. 120–141.
 - [iv] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Microlocal kernel of pseudodifferential operators at a hyperbolic fixed point*. J. Funct. Anal. 252 (**2007**), n° 1, p. 68–125.
 - [iii] S. Fujiié and M. Zerzeri, *Bohr-Sommerfeld quantization condition derived by a microlocal WKB method*. Vietnam J. Math. 32 (**2004**), Special Issue, p. 153–160.
 - [ii] M. Dimassi and M. Zerzeri, *A local trace formula for resonances of perturbed periodic Schrödinger operators*. J. Funct. Anal. 198 (**2003**), n° 1, p. 142–159.
 - [i] M. Zerzeri, *Majoration du nombre de résonances près de l'axe réel pour une perturbation abstraite à support compact, du laplacien*. Comm. Partial Differential Equations 26 (**2001**), n°s 11-12, p. 2121–2188.
-

Introduction générale



Ce mémoire décrit une grande partie de mes travaux réalisés depuis ma thèse. Ceux-ci appartiennent aux domaines de la physique mathématique et des équations aux dérivées partielles. Il est bien connu que la description mathématique de nombreux phénomènes physiques repose essentiellement sur l'étude quantitative et qualitative des équations qui les décrivent. Une grande partie de mes travaux sont motivés par des questions issues de la mécanique quantique. Plus précisément, nous cherchons à montrer et à établir la relation entre les objets quantiques (valeurs propres, résonances, etc.) et les objets classiques (trajectoires périodiques du hamiltonien classique, trajectoires captées, etc.) dans le cadre de l'analyse semi-classique, c'est à dire où toutes les quantités étudiées dépendent d'un petit paramètre qui tend vers 0, (\hbar est la constante de Planck, ϵ est l'écart entre deux fréquences successives, $\frac{1}{\lambda}$ où λ est une grande constante de couplage, etc.). Pour établir cette correspondance nous utilisons le plus souvent des outils d'analyse microlocale. Par exemple l'étude d'un hamiltonien classique dans l'espace des phases (position-moment) qui admet une structure géométrique d'espace symplectique, l'espace cotangent. Nous utilisons d'une manière très intense cette propriété ainsi que celles des sous-variétés lagrangiennes et des distributions associées, connues en dimension 1 sous le nom des solutions B.K.W (L. Brillouin, H-A. Kramers et G. Wentzel).

Le fil conducteur de ce mémoire est l'analyse semi-classique, l'outil de choix est l'analyse microlocale et l'objet spectral de prédilection est les résonances.

Il y a plusieurs ouvrages de références concernant l'analyse microlocale semi-classique. Sans être exhaustif, citons le livre de D. Robert [Rob87], de M. Dimassi et J. Sjöstrand [DS99], de A. Martinez [Mar02a], et de M. Zworski [Zwo12] (voir aussi le livre de V. Maslov

et M. Fedoriuk [MF81]). Pour une vue plus globale et exhaustive sur l'analyse microlocale \mathcal{C}^∞ , une référence de choix est les quatre tomes de L. Hörmander [Hör90, Hör05, Hör94a, Hör94b].

Pour la notion de résonances semi-classiques, mentionnons le livre de B. Helffer et J. Sjöstrand [HS86] et de P-D. Hislop et I-M. Sigal [HS96] pour les opérateurs de Schrödinger. Dans un cadre plus abstrait d'étude des résonances, par exemple celui des opérateurs « black box » de J. Sjöstrand et M. Zworski, signalons l'article de J. Sjöstrand [Sjö01] ainsi que son cours « Lectures on resonances »¹, et le livre de S. Dyatlov et M. Zworski « Mathematical Theory of Scattering Resonances »².

Le thème principal de ce mémoire est les résonances. Cet objet spectral est très important pour la dynamique quantique. L'un des effets les plus frappants décrits par la chimie quantique est le phénomène de désintégration d'un état instable et la transformation observée de la matière qui accompagne cette dernière. L'état instable qui reste suffisamment proche de son état initial pour un temps assez long pour être observé est dit état « métastable ». La notion de métastabilité en mécanique quantique est assez bien comprise et des schémas formels d'approximation des quantités correspondantes ont été développés. On s'attend que la probabilité qu'un état métastable reste dans son état initial diminue exponentiellement avec le temps, se comportant comme $\exp(-\frac{t}{h\tau})$. La constante τ est la « durée de vie » de l'état métastable. De plus, quand un état métastable se désintègre, la distribution des énergies de l'état final atteint un maximum autour de l'énergie de l'état initial. Cette distribution est donnée par une fonction lorentzienne, $\frac{1}{E^2 + \gamma^2}$. Ici E est la différence entre les énergies de l'état métastable et de l'état final. La constante $\gamma = \tau^{-1}$ est appelée la « largeur » de la résonance associée. Ainsi la théorie des résonances prend ses origines dans les tentatives d'explication de l'existence des états métastables dans les systèmes physiques. Parmi ces exemples, citons les résonances qui décrivent les états dits « Auger » (ou auto-ionisants) observés lors de l'étude de l'atome d'hélium dans le cadre de la théorie quantique, voir [RS78, p. 51–60, section XII.6]. En terme mathématique le problème précédent se traduit par l'étude du comportement des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel d'un opérateur autoadjoint soumis à des perturbations (vérifiant la règle d'or de Fermi). Dans cet exemple, l'opérateur autoadjoint non perturbé est le hamiltonien quantique gouvernant un système électrons-protons découplés. L'étude mathématique systématique des effets des perturbations sur les valeurs propres plongées a

1. voir <https://sjostrand.perso.math.cnrs.fr/Coursbgbg.pdf>
2. voir http://math.mit.edu/dyatlov/res/res_20180710.pdf

été initiée par K-O. Friedrichs à la fin des années 1940, voir [Fri48]. Ce problème est d'un intérêt particulier puisqu'il est étroitement lié à la théorie de l'effet Auger, voir [Kra33, page 473] et [Wen33, page 736, chapter 5]. Voir aussi [WW30a, WW30b] pour la théorie de la largeur des raies spectrales, utilisée en physique quantique. Une autre application est la description de l'évolution en temps long du propagateur tronqué (par exemple, le groupe des ondes ou de Schrödinger) en termes de résonances. A notre connaissance, les premières définitions mathématiques des résonances dans le cas multidimensionnel furent données par P. Lax et R. Phillips [LP67] et B. Vainberg [Vai68].

Commençons par donner la définition des résonances dans le cas de l'opérateur de Schrödinger semi-classique défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $L = -h^2\Delta + V$,³ où V est un potentiel lisse, à valeurs réelles et tendant vers zéro à l'infini. L'opérateur L est un opérateur autoadjoint, non-borné de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$. Le spectre de L est réel et par la théorie des perturbations -le théorème de Weyl- son spectre essentiel⁴ est $[0, +\infty[$.

Sous certaines hypothèses, la résolvante $(z - L)^{-1}$ est alors bien définie pour $\text{Im } z > 0$ et admet, en tant qu'opérateur de $L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, un prolongement méromorphe en traversant le spectre essentiel de L . On appelle *résonances* de L les pôles de ce prolongement. Cette définition n'est pas très « exploitable » surtout si nous voulons mettre en relation cet objet quantique (les résonances) avec la dynamique classique (les trajectoires du hamiltonien associé). Pour cela, il y a eu plusieurs procédures comparables et exploitables suivant les cas étudiés pour mettre en évidence et identifier cet objet spectral. Ces techniques sont connues sous le nom de déformations spectrales, maintenant plus répandu sous le nom de « Complex Scaling Method », voir [Sim78] pour un aperçu général.

L'idée principale est d'identifier les résonances de l'opérateur autoadjoint L (dans un ouvert de \mathbb{C}) aux valeurs propres complexes d'un opérateur non-autoadjoint $L(t)$, obtenu à partir de L par la méthode de déformation spectrale. Ici t est le paramètre (complexe) de déformation. Dans les faits, nous prenons en compte toute une famille d'opérateurs $(L(t))_{t \in \mathbb{C}, |t| \leq t_0}$ qui possèdent les propriétés suivantes : $L(0) = L$, $L(t)$ est unitairement équivalent à L pour t réel, de plus c'est une famille analytique d'opérateurs de type \mathcal{A} ⁵. Le paramètre t_0 est pris généralement petit. Ces propriétés sur la famille $(L(t))_{t \in \mathbb{C}, |t| \leq t_0}$

3. Ici $h \searrow 0$ est le paramètre semi-classique, $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ le laplacien où $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

4. Le spectre essentiel d'un opérateur A est $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{\text{disc}}(A)$, où $\sigma(A)$ est le spectre de A et $\sigma_{\text{disc}}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres isolées de A de multiplicité *finie*. Ici A est un opérateur fermé sur un espace de Hilbert.

5. Voir [Kat95, chapitre VII, section 2, page 375].

impliquent que les valeurs propres de $L(t)$ sont -dans un certain sens- indépendantes de t (c.-à-d. dans la zone où nous les découvrons) et par définition ce sont les résonances de $L(0) := L$. Cette technique nécessite une hypothèse d'analyticité du potentiel dans un voisinage complexe conique autour de \mathbb{R}^d . Cette méthode a été introduite dans les années 1970 par J. Aguilar et J-M. Combes [AC71] sous le nom de dilatations analytiques, voir aussi E. Balslev et J-M. Combes [BC71], et B. Simon [Sim73]. Ici l'espace \mathbb{R}^d est déformé sous l'action de la transformation suivante : $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto e^\theta x \in \mathbb{C}^d$, pour $\theta \in \mathbb{C}$, $|\theta| \leq \theta_0$ où θ_0 est choisi selon le domaine d'extension analytique du potentiel V .

Dans [Cyc85], H-L. Cycon introduit la méthode des dilatations analytiques modifiée. En fait l'auteur effectue des dilatations analytiques dans l'espace des moments (ou impulsions) $\xi \in \mathbb{R}^d$ ce qui lui permet de traiter le cas des potentiels à support compact, avec la correspondance en analyse microlocale ($-i\frac{\partial}{\partial x} \longleftrightarrow \xi$). Nous avons utilisé cette méthode pour étudier les résonances dans le cas des opérateurs de Schrödinger périodiques, voir le chapitre III.

Dans [Hun86], W. Hunziker introduit une nouvelle classe de déformations spectrales dites distorsions analytiques qui permet de traiter des potentiels analytiques uniquement en dehors d'un compact K . Plus précisément, l'auteur déforme \mathbb{R}^d en utilisant un champ de vecteurs, $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto x + \mu F(x) \in \mathbb{C}^d$, où $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \leq \mu_0$. Ici F est un champ de vecteurs de \mathbb{R}^d dans lui-même, vérifiant certaines propriétés : par exemple la fonction F est nulle dans un voisinage de K et est linéaire à l'infini. Nous allons utiliser cette méthode pour définir les résonances semi-classiques dans les chapitres I et II.

Dans [HS86], B. Helffer et J. Sjöstrand ont introduit une définition plus microlocale des résonances dans le cadre semi-classique en se basant sur la notion de fonction fuite $G(x, \xi)$ qui permet de faire des déformations de l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$ en suivant « de près » la dynamique hamiltonienne associée, $T^*\mathbb{R}^d \ni (x, \xi) \mapsto (x + it\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi), \xi - it\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi)) \in \mathbb{C}^{2d}$, où $t \in \mathbb{R}$, $|t| \leq t_0$. Cette fonction fuite doit vérifier certaines propriétés : par exemple, elle est croissante le long des courbes intégrales du flot hamiltonien, strictement croissante le long des courbes qui partent à l'infini et $G(x, \xi) = x \cdot \xi$ en dehors d'un compact en x et pour ξ borné. Sous des hypothèses convenables, les auteurs montrent que l'opérateur L est un opérateur de Fredholm d'indice 0 dans des espaces de Sobolev adaptés. Les résonances sont alors les z tels que l'opérateur $(L - z)$ n'est pas bijectif dans ces espaces de Sobolev.

Enfin, dans [HM87] B. Helffer et A. Martinez ont démontré que la définition des réso-

nances obtenue par les distorsions analytiques coïncide avec celle donnée par B. Helffer et J. Sjöstrand lorsque ces deux techniques s'appliquent.

Introduisons maintenant le symbole semi-classique $l(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$ associé à L , où $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$ et $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^d \xi_j^2$ avec $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Soit $H_l = \partial_\xi l \cdot \partial_x - \partial_x l \cdot \partial_\xi = 2\xi \cdot \partial_x - \nabla V \cdot \partial_\xi$,⁶ son champ hamiltonien et la fonction $s \mapsto \exp(sH_l)(x, \xi)$ la courbe hamiltonienne associée passant par le point (x, ξ) à $s = 0$. Pour $E \in \mathbb{R}$, notons les ensembles entrant/sortant à l'infini par $\Gamma_\mp(E) = \{(x, \xi) \in l^{-1}(E); \exp(sH_l)(x, \xi) \not\rightarrow \infty \text{ quand } s \rightarrow \pm\infty\}$. L'ensemble des trajectoires captées à énergie E est défini par $K(E) = \Gamma_-(E) \cap \Gamma_+(E)$. Les ensembles $\Gamma_\mp(E)$ sont fermés et $K(E)$ est compact, voir [GS87, Appendix].

Soit $E_0 \in \mathbb{R}$. Y a-t-il des liens entre les résonances près de E_0 et l'ensemble des trajectoires captées $K(E_0)$? La réponse est oui. En effet,

Supposons que E_0 est une énergie non-captive de L , c.-à-d. $K(E_0) = \emptyset$. Alors

- (a) Dans le cas analytique, il existe un voisinage complexe \mathcal{V} de E_0 , indépendant de h tel que L n'a pas de résonances dans \mathcal{V} , pour h suffisamment petit. Voir [Sjö90, Theorem 0.2].
- (b) Dans le cas non-globalement analytique⁷, il existe un voisinage complexe \mathcal{W}_h de E_0 , inclus dans $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) \geq -Ch|\ln h|\}$ tel que L n'a pas de résonances dans \mathcal{W}_h , pour h suffisamment petit. Voir [Mar02b, Theorem 2.1].

Dans le cas non-globalement analytique la restriction à un voisinage complexe \mathcal{W}_h dépendant de h est due au calcul h -pseudodifférentiel \mathcal{C}^∞ . Plus précisément, il faut respecter un certain équilibre entre l'« ellipticité à l'infini » et la « propagation des singularités » pour l'opérateur dilaté « $L_{t,\theta}$ » de L , voir [Mar02b, Lemma 4.1, identities (4.4) and (4.5)]. Mais plus naïvement, nous devons contrôler des termes de la forme $e^{-\frac{|\text{Im}(z)|}{h}}$, ils sont d'ordre h^{-C} si $0 \geq \text{Im}(z) \geq -Ch|\ln h|$. Cet ordre est « admissible » pour le calcul h -pseudodifférentiel \mathcal{C}^∞ c.-à-d. modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Un premier lien est le suivant : pas de trajectoires captées associées à une énergie donnée implique une zone sans résonances près de cette énergie. La preuve du résultat précédent repose sur l'existence d'une fonction fuite globale (strictement croissante « partout » près de $l^{-1}(E_0)$). Ainsi pour z dans un petit voisinage de E_0 , le symbole de $(L - z)$, en tant qu'opérateur agissant sur des espaces de Sobolev associés à cette fonction fuite, est glo-

6. $\partial_w = \frac{\partial}{\partial w} = (\frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_d})$, où $w = (w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{R}^d$.

7. Le potentiel V est analytique en dehors d'un compact.

bablement elliptique et par conséquent l'opérateur $(L - z)$ est bijectif dans ces espaces de Sobolev.

Dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées est non-vide, les choses se compliquent. Sans être exhaustif, voici quelques idées. L'une des voies est de trouver un modèle « soluble » très proche de l'opérateur L dans un sens assez précis et d'essayer de comparer les objets spectraux correspondants. Par exemple, l'approximation harmonique dans le cas du « puits dans l'isle ». Voir [HS86, GS87, Sjö87]. Cette approche est basée essentiellement sur l'étude du problème de Grushin « correspondant ». Pour une vue globale sur le problème de Grushin, on peut consulter [SZ07]. Cette stratégie donne des résultats très précis sur la localisation des résonances.

Une autre méthode est de faire une construction fine d'une fonction fuite peu régulière qui décolle (c.-à-d. strictement croissante sur les courbes du flot hamiltonien) dès qu'on s'éloigne de l'ensemble des trajectoires captées. Ceci permet de majorer par un certain volume le nombre des résonances dans un petit voisinage complexe de l'énergie considérée. Voir [Sjö90, Theorems 4.2 and 4.6]. Plus précisément, sous certaines hypothèses dont l'analyticité de l et l'hyperbolicité du flot hamiltonien associé, J. Sjöstrand a montré que le nombre de résonances dans une certaine boîte de taille δ avec $Ch \leq \delta \leq \frac{1}{C}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\delta^{\alpha-\epsilon} h^{-d})$, où α est la codimension de Minkowski de l'ensemble des trajectoires captées. Depuis ce résultat, il y a eu des avancées dans cette direction, surtout dans le cas de la dynamique chaotique, voir [NZ07, NZ09, NSZ11] et surtout [NSZ14].

Dans le cas des opérateurs « black box » de J. Sjöstrand et M. Zworski, l'auteur de ce tapuscrit a établi dans [i] un résultat reliant de manière explicite le nombre de résonances dans un secteur près du réel aux rayons qui, d'une certaine manière, sont captés par la boîte noire. Dans ce cas le caractère semi-classique provient du fait que nous considérons les hautes fréquences. Ces résultats cités ci-dessus permettent de mieux comprendre les liens existant entre les résonances et la géométrie microlocale du problème. C'est le point de départ de mes travaux sur les résonances.

Dans les chapitres I et II, nous présentons certaines idées et résultats pertinents des travaux en collaboration avec J-F. Bony, S. Fujiié et T. Ramond concernant la distribution des résonances pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique multidimensionnel (ou certaines généralisations : des opérateurs différentiels d'ordre 2 « distordables à l'infini » ou localement pseudodifférentiels). Principalement, nous nous sommes intéressés à l'asymptotique des résonances pour des géométries particulières de l'ensemble des trajectoires

captées. Pour cela, nous avons fait une étude qualitative et quantitative pour ces dynamiques particulières du hamiltonien correspondant (près d'un point fixe hyperbolique, trajectoires homoclines et/ou hétéroclines, nappes homoclines, etc.)⁸.

Pour obtenir l'asymptotique des résonances dans les cas géométriques cités ci-dessus, la première étape est d'éliminer l'infini et de concentrer l'étude près de l'ensemble des trajectoires captées :

Soit L l'opérateur de Schrödinger semi-classique défini ci-dessus avec une hypothèse d'analyticité sur V en dehors d'un compact. Soit $E_0 \in \mathbb{R}^+$. Nous définissons l'opérateur $L(t)$ le « distordu » de L par les distorsions analytiques à la W. Hunziker, voir chapitre I, sous-section I.1.1. Dans le cadre des potentiels non-globalement analytiques, A. Martinez a prouvé que nous pouvons regarder les résonances de L dans une boîte de taille $Mh|\ln h|$ en partie imaginaire, pour tout $M > 0$. Cette limitation en partie imaginaire est due à la concurrence entre deux attributs de l'opérateur « distordu » $L(t)$. En effet, nous devons trouver un certain équilibre entre « l'ellipticité à l'infini » de la partie réelle du symbole semi-classique de l'opérateur $L(t)$ et le théorème de « propagation des singularités » associé à l'opérateur non-autoadjoint $L(t)$. Voir [Mar02b, Proposition 3.1] et aussi [Mar02a, Theorem 3.5.1]. Soit $z(h)$ une résonance de $L(t)$ dans une telle boîte au voisinage de E_0 . Soit $u = u(t, h) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ un état résonant associé à $z = z(h)$, c.-à-d. $(L(t) - z)u = 0$ et $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Notons que cette propriété n'a lieu que pour une suite de valeurs de h qui tend vers 0. Nous décrivons maintenant un état résonant (ou plus généralement un quasi-mode) associé à la résonance z . Comme nous travaillons dans la catégorie \mathcal{C}^∞ , c.-à-d. modulo des restes d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$, alors nous considérons le système suivant :

$$(L(t) - z)u = \mathcal{O}(h^\infty), \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1. \quad (1)$$

Dans la suite nous montrons que cette équation est réduite à un système qui prend en considération uniquement ce qui se passe près de l'ensemble des trajectoires captées. En effet, en utilisant l'ellipticité de la partie réelle de $L(t) = L + \llcorner$ petit (dépendant du paramètre de dilatation t) \gg en dehors de la surface d'énergie $l^{-1}(E_0)$, nous prouvons que la fonction u se concentre sur la surface d'énergie E_0 , c'est la localisation en énergie. Ici l est le symbole semi-classique de L . Puis, sur la surface d'énergie $l^{-1}(E_0)$, nous utilisons les estimations sur la partie imaginaire du symbole semi-classique du dilaté, $l(t)$, nous obtenons une localisation spatiale. Autrement dit, il existe un $R > 0$ assez grand tel que

8. Voir les définitions précises aux chapitres I et II.

$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_0 \|\mathbf{1}_{|x| \leq R} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{O}(h^\infty)$ pour un certain $C_0 > 0$.⁹ Pour les trajectoires dans $l^{-1}(E_0)$ le théorème de propagation des singularités « classique » associé à l'opérateur non-autoadjoint $L(t)$, montre que si u est microlocalement¹⁰ nulle près d'un point de la surface d'énergie E_0 alors u est microlocalement nulle près de son évolué par le flot hamiltonien H_t . Ceci est possible car la partie imaginaire du symbole semi-classique de $L(t)$ est suffisamment petite, d'ordre $h|\ln h|$. Enfin, nous appliquons le résultat crucial dans ce cadre de J-F. Bony et L. Michel [BM04] qui dit que « les états résonants sont des vecteurs propres sortants ». Par conséquent, les états résonants -et plus généralement les quasi-modes globaux- s'annulent dans la zone entrante à l'infini $\Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0)$, c.-à-d. $u = 0$ microlocalement près de ρ pour tout $\rho \in \Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0)$. Ce résultat nécessite le théorème de propagation des singularités cité ci-dessus. En conclusion, la fonction u est solution de l'équation (1) si et seulement si la fonction u est solution du problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble des trajectoires captées suivant :

$$\begin{cases} (L - z)u = 0 & \text{microlocalement près de } K(E_0), \\ u = u_0 & \text{microlocalement près de tout point de } \Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0), \end{cases} \quad (2)$$

avec u_0 vérifiant $(L - z)u_0 = 0$ microlocalement près de $K(E_0)$. Ici nous avons utilisé que $L(t) = L$ dans un grand compact en x . Ce système doit être vue comme une équation de propagation. Ce point de vue est très important pour caractériser les états résonants. En fait, dès que nous avons une solution du problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble des trajectoires captées, nous construisons un quasi-mode global à support compact de $(L(t) - z)$ à l'aide du flot quantique « $e^{-\frac{i}{h}s(L(t)-z)} \text{Op}^w(\chi)$ » associé à l'opérateur $L(t)$. Dans les faits, nous construisons une paramétrix de $e^{-\frac{i}{h}s(L(t)-z)} \text{Op}^w(\chi)$ bien que cet opérateur peut ne pas être bien défini car $L(t)$ est non-autoadjoint. Mais le choix d'une troncature $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont le support est « extrêmement » proche de l'ensemble des trajectoires captées est crucial. Notons que ce quasi-mode n'est pas supporté uniquement où il n'y a pas de distorsion. Cette approche nous a permis dans [xix] de préciser le lien entre majoration polynomiale du prolongement de la résolvante et propagation des singularités à travers l'ensemble des trajectoires captées dans le cadre de l'étude des résonances semi-classiques.

9. Ici $\mathbf{1}_B$ est la fonction caractéristique de B .

10. Dans ce mémoire, la notion de « microlocalement près » est dans le cadre \mathcal{C}^∞ . Voici la définition, pour $\rho \subset T^*\mathbb{R}^d$ et u une fonction polynomialement bornée, on dit que $u = 0$ microlocalement près de ρ (ou u est microlocalement nulle près de ρ) s'il existe $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$ avec $\chi = 1$ près de ρ tel que $\text{Op}^w(\chi)u = \mathcal{O}(h^\infty)$ en norme L^2 . Voir chapitre I, sous-section I.1.5.

Le point commun de toutes les géométries particulières que nous étudions est la présence de (au moins un) maxima du potentiel globaux et/ou locaux suivant les cas. Pour comprendre les propriétés des fonctions résonantes¹¹ dans ces situations et surtout les décrire nous avons établi un résultat de propagation des singularités dans le cas lisse \mathcal{C}^∞ (et aussi analytique \mathcal{C}^ω), traversant un point fixe hyperbolique du champ hamiltonien associé au symbole de l'opérateur de Schrödinger semi-classique multidimensionnel étudié, voir le travail « fondateur » de 2007.¹² Ce genre de résultat a été établi en dimension 1 dans le cas classique (indépendant d'un paramètre semi-classique) par N. Hanges (voir [Han79]) dans son travail sur la propagation des singularités pour des opérateurs à caractéristiques doubles. L'ingrédient principal est de factoriser l'opérateur de départ en un produit de deux opérateurs de type principal. En dimension quelconque ($d > 1$), la situation est beaucoup plus compliquée car il y a plusieurs directions rentrant vers le point fixe hyperbolique avec des vitesses en général différentes et donc une forme normale arguée du cas de la dimension 1 n'est pas facilement « exploitable ». Notons que le cas multidimensionnel ne rentre pas dans le cadre d'opérateurs à caractéristiques multiples.

Près du point fixe hyperbolique (prenons $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2d}$ pour fixer les idées) la géométrie est déterminée par l'existence de deux variétés lagrangiennes Λ_- et Λ_+ de dimension d chacune telles que $\exp(sH_l)(\Lambda_\mp)$ converge vers $(0, 0)$ quand $s \rightarrow \pm\infty$. Soit Ω un voisinage du point fixe hyperbolique donné par le théorème de la variété stable. Soit $z \in D(l(0, 0), Ch)$ avec $C > 0$ fixé.¹³ Le problème du passage du point fixe hyperbolique $(0, 0)$ se ramène à l'étude du problème de Cauchy microlocal suivant : Soient u_0 et v des données telles que $\|v\| + \|u_0\| \leq 1$. On cherche les solutions u de $(L - z)u = v$ microlocalement près de Ω et $u = u_0$ microlocalement près de \mathcal{V}_- un voisinage du relèvement dans Λ_- d'une petite sphère centrée en $0 \in \mathbb{R}^d$, avec $\|u\| \leq h^{-K}$ pour un certain K . Le théorème de propagation des singularités dans ce cas correspond à l'unicité du problème de Cauchy microlocal ci-dessus, c.-à-d. si $v = 0$ microlocalement près de Ω et $u_0 = 0$ microlocalement près de \mathcal{V}_- alors $u = 0$ microlocalement près de Ω . Nous parlons d'existence du problème de Cauchy microlocal s'il admet au moins une solution. Les résonances engendrées par un sommet de potentiel correspondent à l'existence d'une solution non-triviale du problème de Cauchy microlocal avec $v = 0$ microlocalement près de Ω et $u_0 = 0$ microlocalement

11. Nous pouvons dire résonante ou résonnante, d'après différents dictionnaires, voir par exemple « Le dictionnaire de notre temps » de 1991, le siècle dernier!, page 1336; **réson(n)ant, ante** : adj. Qui résonne; qui est le siège d'un phénomène de résonance.

12. voir [iv] (avec J-F. Bony, S. Fujiié et T. Ramond) *Microlocal kernel of pseudodifferential operators at a hyperbolic fixed point*. J. Funct. Anal. 252 (2007), n° 1, p. 68–125.

13. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note par $D(a, r) = \{w \in \mathbb{C}; |w - a| < r\}$.

près de \mathcal{V}_- . Ces solutions sont dites « purement » sortantes puisque $u_0 = 0$ dans \mathcal{V}_- , le relèvement dans Λ_- d'une petite sphère centrée à l'origine en x . Pour la construction des états résonants dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées contient des points fixes hyperboliques le choix de voisinages Ω, \mathcal{U}_- correspondants près de ces points est crucial ainsi que la condition initiale u_0 doit vérifier $(L - z)u_0 = 0$ microlocalement près de \mathcal{V}_- .

En résumé, comme déjà dit précédemment, la particularité des géométries des ensembles captés que nous considérons est qu'ils ont au moins un point fixe hyperbolique dû à un maximum (local ou global) du potentiel. Ainsi, le système précédent peut être vue comme une équation de propagation à travers le point fixe hyperbolique dans ce cas.

La deuxième étape concerne le passage du sommet de potentiel. Elle est basée sur des commutations avec des opérateurs d'annihilation adaptés à notre situation. Notons que dans notre travail de 2007 la preuve du théorème de propagation des singularités est basée sur des estimations d'énergie donc assez technique mais c'était nos débuts pour ce problème et les choses n'étaient pas aussi claires que maintenant ! Exposons l'approche des commutations -connue depuis longtemps pour le calcul du spectre de l'oscillateur harmonique- au modèle unidimensionnel $L_0 = -h^2 \frac{d^2}{dw^2} - w^2$. Notons par $\mathbb{A} = -ih \frac{d}{dw} - w$ l'opérateur d'annihilation, un calcul direct donne $\mathbb{A}(L_0 - z) = (L_0 - 2ih - z)\mathbb{A}$. Considérons maintenant une solution u de (2) avec u_0 est microlocalement nulle dans $\Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0)$ et $z \in D(l(0, 0), Ch)$, $C > 0$ une constante fixée. En appliquant N -fois l'identité précédente nous obtenons $(L_0 - i2Nh - z)\mathbb{A}^N u = \mathbb{A}^N(L_0 - z)u = \mathcal{O}(h^\infty)$, pour tout $N \in \mathbb{N}$. Puisque l'opérateur $(L_0 - (z + i2Nh))$ est inversible pour $N > \frac{C}{2}$, nous déduisons que $\mathbb{A}^N u = \mathcal{O}(h^\infty)$ pour ces valeurs de N . Un argument standard de l'analyse microlocale -voir [Hör94b, sections 25.1 et 25.2]- implique que u est une distribution lagrangienne associée à Λ_+ , la variété caractéristique de l'opérateur h -pseudodifférentiel \mathbb{A} , qui est aussi la variété instable associée au point fixe hyperbolique. Comme la solution u est une distribution lagrangienne alors le problème de Cauchy microlocal (2) devient une équation de transport sur le symbole de la solution u , voir chapitre I, équation (I.25).

Revenons maintenant à la dimension quelconque. Une analyse poussée de l'équation de transport dégénérée correspondante, nous permet d'obtenir l'asymptotique des résonances engendrées par un sommet du potentiel avec l'approche générale suivante : Soit \mathbb{D} un domaine de \mathbb{C} où nous étudions les résonances. Nous supposons que $z_0 \in \mathbb{D}$ est l'unique point dans un certain sens de « dégénérescence » dans \mathbb{D} de l'équation de transport (voir chapitre I, équation (I.26)), z_0 est dite pseudo-résonance. Nous vérifions les deux points suivants :

1. Pas de résonances et une estimation de la résolvante en dehors d'un « petit » disque centrée au point z_0 .
2. L'opérateur L considéré admet au moins une résonance dans un « tout petit » disque centré en z_0 . Pour cela, nous construisons une « fonction test » vérifiant que le projecteur spectral généralisé associé à z_0 appliqué à cette solution préparée est non nulle (si L n'a pas de résonance près de z_0 alors la quantité précédente doit être nulle quelque soit la « fonction test » choisie).

Par cette approche, nous avons donné la distribution des résonances pour un maximum global du potentiel dans le cas où V est non-globalement analytique. Sachant que dans le cas où V est analytique dans un voisinage complexe de \mathbb{R}^d , ce genre de résultat a été établi par J. Sjöstrand [Sjö87] dans le cas d'un point critique non-dégénérée (non nécessairement un maximum)¹⁴, par P. Briet, J-M. Combes et P. Duclos [BCD87] dans le cas d'un maximum sous une hypothèse de viriel et par T. Ramond [Ram96] en dimension 1 en utilisant la méthode BKW exacte. Tous ces auteurs prouvent que dans un disque centré à la valeur maximale $E_0 > 0$ de V et de taille Ch avec $C > 0$ bien choisi, il y a une bijection entre les résonances de l'opérateur de Schrödinger semi-classique (multidimensionnel) et un certain sous-ensemble de \mathbb{C} discret dépendant des valeurs propres de la hessienne du potentiel V au point 0 vérifiant $V(0) = E_0$, cet ensemble est par définition l'ensemble des pseudo-résonances. N. Kaidi et P. Kerdelhué [KK00] ont étendu ce résultat aux disques de taille h^δ pour tout $\delta \in]0, 1]$ en utilisant une forme normale sous une hypothèse de \mathbb{Z} -indépendance. En dimension 2, M. Hitrik, J. Sjöstrand et S. Vũ Ngọc [HSVN07] ont obtenu un résultat similaire pour des disques de taille 1 ($\delta = 0$). Ce genre de résonances apparaît de manière naturel dans le contexte de la relativité générale, en particulier pour l'étude des trous noirs, voir A. Sá Barreto et M. Zworski [SBZ97].

Dans le cas où V est analytique, nous avons obtenu une formule explicite en puissance de h du projecteur spectral généralisé associé à une résonance simple, nous avons donné le développement asymptotique du résidu de l'amplitude de diffusion associé à une résonance simple pour des potentiels à longue portée. Nous avons étudié le comportement du groupe d'évolution de l'opérateur de Schrödinger en temps grand associé à un maximum du potentiel en fonction des résonances, où le projecteur spectral apparaît naturellement. Tous ces résultats se généralisent automatiquement au cas où V est non-globalement analytique, modulo une hypothèse de plus sur la simplicité de la résonance considérée et

14. Dans l'introduction de [Sjö87], l'auteur dit : « *The case when the coefficients are only \mathcal{C}^∞ on a compact set and analytic outside, could certainly also be treated to the price of certain technical complications.* » La réponse est oui trente ans après mais avec un bémol, nous ne contrôlons pas la multiplicité !

via [ix, page 1357, Remark 2.4]¹⁵.

Dans le chapitre I, nous présentons un théorème de propagation des singularités dans le cas d'un point fixe hyperbolique et décrivons le passage de ce point, voir théorèmes I.3 et I.4. Ces deux résultats plus une étude fine de l'équation de transport correspondante nous permettent de prouver l'asymptotique des résonances générées par un maximum global d'un potentiel non-globalement analytique. Voir théorème I.5. Puis, nous donnons le développement asymptotique complet en puissance entière de h dans le cas d'une pseudo-résonance simple, voir proposition I.6, où l'état résonant correspondant est micro-localisé le long d'une trajectoire rentrante dont le choix dépend de manière cruciale de la pseudo-résonance simple. Au passage, nous donnons une description des états résonants dans ce cadre, voir proposition I.8. En deuxième partie, nous présentons dans le cas où V est globalement analytique deux applications : une formule explicite en puissance de h du projecteur spectral associé (voir théorème I.10) et le comportement du semi-groupe d'évolution de l'opérateur de Schrödinger en temps grand associé, voir théorème I.11. La deuxième application peut être vue comme une généralisation de la formule de Poisson, valable pour les opérateurs à spectre discret. La description de l'évolution en temps long du propagateur tronqué pour le groupe des ondes en termes de résonances a été obtenue pour la première fois par P. Lax et R. Phillips [LP89] à l'extérieur d'un obstacle étoilé. Ce résultat a été généralisé en utilisant diverses techniques pour différentes situations de non-capture, voir par exemple B-R. Vařberg [Vař89]. Les situations de capture ont été traitées par S-H. Tang et M. Zworski [TZ00] et N. Burq et M. Zworski [BZ01] pour des temps assez grands. D'autre part, l'évolution temporelle des états quasi-résonants (sortes de quasi-modes) a été étudiée par C. Gérard et I-M. Sigal [GS92]. Dans [NSZ03], S. Nakamura, P. Stefanov et M. Zworski ont fait une étude spécifique du groupe de Schrödinger pour les résonances de forme créées par un « puits dans une isle ». Il y a eu aussi des résultats dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées est hyperbolique. Nous nous référons au travail de T. Christiansen et M. Zworski [CZ00] dans le cas de l'équation des ondes sur une surface modulaire et sur le cylindre hyperbolique, ainsi qu'au travail de J-F. Bony et

15. Voici le texte : « Remark 2.4 : *The analyticity of V in a full neighborhood of \mathbb{R}^n is used only for the localization of the resonances. Indeed, if the conclusions of Theorem 2.1 and Remark 2.3 hold for V smooth and analytic outside of a compact set, then the results of this paper still apply under this weaker assumption.* » Ici $n = d$, le « Theorem 2.1 » est exactement la correspondance entre les résonances de l'opérateur de Schrödinger semi-classique multidimensionnel considéré et l'ensemble des pseudo-résonances correspondant et la « Remark 2.3 » est l'asymptotique complète en puissance de h dans le cas où la (pseudo)-résonance est simple. Dans [xxi] nous avons prouvé ces deux résultats. Le seul point faisant défaut est le non-contrôle de la multiplicité de la résonance correspondante d'où l'hypothèse de simplicité en plus pour cette dernière.

D. Häfner [BH08] pour groupe des ondes dans la métrique de Sitter-Schwarzschild, et au le travail de C. Guillarmou et F. Naud [GN09] pour l'opérateur des ondes sur des variétés hyperboliques convexes co-compactes.

Dans la dernière section de ce chapitre nous exposons un travail en collaboration avec T. Watanabe (voir [xiii]), concernant la probabilité de transition adiabatique d'un système à deux niveaux dans le cas d'un nombre fini de croisements évités. Nous étudions un changement global de bases d'un système différentiel du premier ordre par rapport à un paramètre semi-classique « adiabatique » ($\hbar \downarrow 0$) et un paramètre d'interaction ($\varepsilon \downarrow 0$). Nous obtenons les différents comportements asymptotiques au moyen de la méthode BKW exacte et de l'analyse microlocale, en fonction du rapport entre les deux paramètres dans le cas où le potentiel est analytique dans un certain voisinage complexe de \mathbb{R} . Ce travail n'a pas de lien direct avec les résonances mais la situation géométrique près des croisements est comparable à celle donnée par un point fixe hyperbolique en dimension 1. De plus, une généralisation au cas non-globalement analytique est possible via le théorème I.4. Dans un certain régime (voir chapitre I, section I.4, Cas n° 3) la preuve combine la méthode BKW exacte et l'approche microlocale, par l'étude de la forme normale correspondante aux zéros non-dégénérés du potentiel, en dimension 1. Plus précisément, dans un certain anneau centré au point d'annulation du potentiel dont l'ordre de grandeur peut dépendre de $\sqrt{\hbar}$ suivant la corrélation entre les deux paramètres, nous identifions les solutions obtenues par les deux méthodes en comparant les fronts d'ondes correspondants.

Dans le chapitre II, nous présentons l'asymptotique des résonances dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées est constitué d'un point fixe hyperbolique et un nombre fini d'orbites homoclines. Dans ce cas, nous mettons l'accent sur deux phénomènes remarquables : l'accumulation des résonances sur des courbes que nous analysons à l'échelle macroscopique et microscopique ; puis le phénomène de vibration. Nous donnons aussi la condition de quantification pour les (pseudo-)résonances générées par un nombre fini de sommets avec un nombre fini d'orbites homoclines et/ou hétéroclines associées. Cet ensemble capté peut être vue comme un graphe. Nous obtenons en général un nuage de résonances sans aucune structure, au passage nous définissons un coefficient d'amortissement (« damping ») qui délimite entre autre une zone sans résonance. Dans le cas d'un potentiel à trois bosses en dimension 2 nous donnons des formules explicites pour l'asymptotique des résonances en distinguant trois cas de configurations. Nous terminons ce chapitre par la description des états résonants dans des cas précis et des phénomènes

de micro-localisations assez inhabituels. Par exemple il arrive que les résonances sont données par un certain cycle du graphe alors que les états résonnants correspondants sont micro-localisés dans une autre région du graphe. Notons que le cas d'un point fixe hyperbolique avec un nombre fini d'orbites homoclines associées rentre bien sûr dans ce cadre de graphe. Mais comme le formalisme de graphe n'est pas nécessaire dans ce cas, nous avons choisi de le présenter à part pour séparer les difficultés et surtout pour la clarté des idées et la progression des arguments.

Pour prouver les asymptotiques des résonances décrites dans le chapitre II, nous utilisons l'approche générale appliquée dans le cas des résonances générées par un sommet. Mais il nous faut a priori identifier l'ensemble des pseudo-résonances. Cette identification se fait par une règle de quantification. C'est à dire trouver une équation simple impliquant une fonction, une matrice ou un opérateur etc, suivant la situation géométrique, dont les pseudo-résonances sont les zéros de cette dernière. Dans les deux cas présentés ici, une matrice apparaît naturellement. Comment obtenir cette matrice ?

Sans rentrer dans les détails, dans le cas d'une trajectoire fermée, nous essayons de comparer une solution avec elle même après un tour le long de cette trajectoire, voir [iii] pour une explication très basique (mais naturelle) dans cet exemple.

Dans les situations géométriques du chapitre II, « les retours » se font près des points fixes hyperboliques. Donc, nous devons étudier les solutions près de ces points. Soit $s_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $V(s_0)$ est un maximum local, d'où $(s_0, 0)$ est un point fixe hyperbolique. Par hypothèse, il y a un nombre fini de trajectoires homoclines et/ou hétéroclines rentrantes vers ce point et sortantes de ce dernier. Suivant la terminologie du chapitre II, sous-section II.3.1, nous notons $\tilde{\alpha}$ une courbe hamiltonienne rentrant vers le point $(s_0, 0)$, c.-à-d. $\tilde{\alpha}^+ = (s_0, 0)$, ($\tilde{\alpha}(t) \rightarrow (s_0, 0)$ quand $t \rightarrow +\infty$), et α la courbe hamiltonienne sortant du point $(s_0, 0)$, c.-à-d. $\alpha^- = (s_0, 0)$ ($\alpha(t) \rightarrow (s_0, 0)$ quand $t \rightarrow -\infty$). Soit u^α la restriction microlocale de u près de α . Ensuite, en utilisant l'argument crucial suivant (voir chapitre I, sous-section I.2.2) : les fonctions $u^{\tilde{\alpha}}$ avec $\tilde{\alpha}^+ = (s_0, 0)$ (les données entrantes) déterminent de manière unique et explicite les fonctions u^α avec $\alpha^- = (s_0, 0)$ (données sortantes) puisque $(P - E)u = 0$ microlocalement près de $(s_0, 0)$, pour E dans un $\mathcal{O}(h)$ -voisinage de E_0 (hors d'un tout petit $\mathcal{O}(\varepsilon h)$ -voisinage de $E_0 - ih\mathbf{\Gamma}^s$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit dans le cas de plusieurs sommets, ici $\mathbf{\Gamma}^s$ est donné par le lemme II.12). De plus, sous une certaine hypothèse (voir (A.I.4)), les u^α sont toujours des distributions lagrangiennes dont la variété lagrangienne est $\Lambda_+^{s_0}$ associée au point fixe hyperbolique $(s_0, 0)$, (la définition de $\Lambda_+^{s_0}$ est donnée dans la sous-section II.3.1). Si de plus les $u^{\tilde{\alpha}}$ sont aussi des distributions

lagrangiennes, alors, à l'ordre principal, le symbole de chaque u^α est donné par une combinaison linéaire des symboles des \tilde{u}^α dont les coefficients $\mathcal{Q}_{\alpha, \tilde{\alpha}}(E, h)$ correspondants sont donnés par l'identité (II.11). Ainsi la matrice \mathcal{Q} est une matrice de transfert des symboles des solutions microlocales sur les arêtes du graphe décrivant l'ensemble capté considéré. La condition de quantification est la condition sous laquelle il existe au moins une solution microlocale non-triviale définie de manière « cohérente » sur tout le graphe. Pour vérifier l'hypothèse que les \tilde{u}^α sont des distributions lagrangiennes, nous faisons un premier passage par les sommets du graphe. Ceci nous permet de sélectionner les \tilde{u}^α admissibles à partir de n'importe quel distribution choisie au départ avec l'unique condition que sa variété lagrangienne est transverse à la variété rentrante $\Lambda_-^{s_0}$ le long des arêtes rentrantes, $\tilde{\alpha}^+$, vers $(s_0, 0)$.

Dans ce tapuscrit, nous n'allons pas discuter du développement asymptotique du résidu de l'amplitude de diffusion associé à une résonance simple pour des potentiels à longue portée (voir [ix, section 5]), ni de la distribution des résonances dans le cas des nappes homoclines et/ou hétéroclines (voir [xxii, chapitres 3 et 5]), ni les asymptotiques d'ordre supérieur (voir [xxii, section 4.5]), ni les phénomènes remarquables de transition et de stabilité des courbes d'accumulation des résonances dans le cas d'un nombre fini d'orbites homoclines, et surtout pas le cas où l'intersection n'est pas transverse le long des trajectoires captées entre l'évolué de la variété stable et celui de la variété instable, issues du même point fixe hyperbolique (voir [xxii, section 4.6]). La seule remarque que nous pouvons donner dans le cas des nappes est que l'opérateur qui code les (pseudo)-résonances est un opérateur compact sur un espace de dimension infinie. De plus, ces grandes valeurs propres jouent un rôle important dans la condition de quantification (sous certaines hypothèses, le même rôle que celles obtenues dans le cas d'un nombre fini d'orbites homoclines attachées au même point fixe hyperbolique, voir [xxii, section 5.2]).

Avec la stratégie développée surtout dans [xxi] et [xix], nous pouvons traiter d'autres situations géométriques données par des potentiels non-globalement analytiques. Par exemple le cas où l'ensemble capté est une trajectoire fermée hyperbolique, et comparer le résultat obtenu avec celui de C. Gérard et J. Sjöstrand établi dans le cas analytique. Ainsi que le cas où l'ensemble capté est un point critique non-dégénéré (non-nécessairement un maximum). Mais à chaque fois, la notion de distribution lagrangienne associée à la variété sortante Λ_+ doit être remplacée par une classe de fonctions appropriée. D'autres situations très « inhabituelles » impliquant les points fixes hyperboliques sont en vues.¹⁶

16. et l'histoire de l'équipe du  continue !

Le chapitre III concerne mes travaux en collaboration avec M. Dimassi sur la théorie de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger périodique. Nous nous sommes intéressés à la fonction de décalage spectral¹⁷ ainsi qu'aux résonances¹⁸ dans ce cadre. La fonction de décalage spectral a été introduite par I.M. Lifšic en 1952 lors de ses études sur des problèmes de mécanique des solides (voir [Lif52]) et elle a été réécrite par M-G. Kreĭn en 1953 dans un cadre abstrait, voir [Kre53] où une représentation explicite de cette fonction de décalage spectral en terme d'un déterminant perturbé a été obtenue. Le travail de M-G. Kreĭn sur la fonction de décalage spectral est décrit en détail dans [BY92]. Les informations de base sur cette notion se trouvent dans [Rob99] et [Yaf00, chapitre 8]. La fonction de décalage spectral est un objet spectral très important en théorie des perturbations, il permet de décrire le comportement du spectre discret ainsi que continu. C'est une généralisation de la fonction de comptage des valeurs propres, voir chapitre III, identité (III.3).

Le comportement asymptotique de la fonction de décalage spectral dans le cas de l'opérateur de Schrödinger a été intensivement étudié, voir [CdV81, Gui85, MR78, PP82, Rob92, Rob94, RT87]. Dans le régime semi-classique (c.-à-d. $P_S(h) = -h^2\Delta_x + U(x)$, ($h \searrow 0$) où U est un potentiel régulier, majoré par un certain poids décroissant vers 0 à l'infini), une asymptotique de type Weyl de $\zeta_h(\lambda) := \zeta(\lambda; P_S(h), -h^2\Delta)$ associée au couple d'opérateurs $(P_S(h), -h^2\Delta)$, avec un reste optimal a été obtenue, voir [Rob92, Rob94, RT87, RT88]. Si de plus λ est une énergie non-captive du hamiltonien classique, $p(x, \xi) := \xi^2 + U(x)$, c.-à-d. pour tout $(x, \xi) \in p^{-1}(\{\lambda\})$, $|\exp(tH_p)(x, \xi)| \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \infty$,¹⁹ une asymptotique complète de $\zeta'_h(\lambda)$ en puissance de h a été prouvée, voir [Rob92, Rob94, RT87, RT88]. Des résultats similaires sont bien connus pour la fonction de décalage spectral à haute énergie (voir [Bus71, CdV81, PP82, Pop82, Rob91]).

Il y a peu de travaux autour de la fonction de décalage spectral dans le cas de l'opérateur de Schrödinger périodique perturbé, voir [Bus87, GN98, BY94]. Nous avons prouvé le même genre de résultats cités dans le paragraphe précédent au cas de perturbations à variation lente de l'opérateur de Schrödinger périodique. En fait, nous avons donné le

17. Pour la définition de la fonction de décalage spectral dans le cadre abstrait voir chapitre III, identité (III.2).

18. Les résonances sont les pôles de la résolvante tronquée obtenues par prolongement de cette dernière à travers les bandes de Bloch.

19. Ici la fonction $t \mapsto \exp(tH_p)(x, \xi)$ est la courbe intégrale associée au champ de vecteurs $H_p = (2\xi, -\nabla U(x))$ passant par le point (x, ξ) à $t = 0$.

développement asymptotique faible « au sens des distributions » de la fonction de décalage spectral $\zeta_h(\lambda) := \zeta(\lambda; -\Delta + V_{\text{per}}(x) + \varphi(hx), -\Delta + V_{\text{per}}(x))$, voir théorème III.2 ainsi que le développement asymptotique complet en puissance de h « au sens fort ou ponctuel » de sa dérivée dans le cas non-captif, voir théorème III.3. Ici V_{per} est le potentiel périodique, φ est la perturbation²⁰ et h est le paramètre semi-classique. Une des conséquences de ce dernier résultat est l'absence de valeurs propres plongées dans le spectre continu. Nous montrons aussi qu'il n'y a pas de résonances près d'un certain voisinage de l'axe réel dès qu'il n'y a pas de trajectoires captées, ce qui confirme plusieurs idées et résultats de la physique quantique. Les résonances sont définies dans ce cadre sous une hypothèse d'analyticité de la perturbation φ . De plus nous avons établi une formule de trace locale impliquant les résonances « éventuelles » créées par ce genre de perturbations. Un résultat de minoration de nombre de résonances a été établi dans le cas où la perturbation a pour effet de pousser au moins une énergie proche de celle étudiée vers le support singulier analytique de la densité d'états de $P_0 := -\Delta + V_{\text{per}}(x)$, voir théorème III.7.

La première difficulté dans ce cadre est que l'opérateur $P(h) = -\Delta + V_{\text{per}}(x) + \varphi(hx)$ n'est pas un opérateur h -pseudodifférentiel. En fait, quand $h \searrow 0$, il y a deux échelles. La première est γ , la période de la cellule, et la seconde est $\frac{\gamma}{h}$ sur laquelle la perturbation du potentiel varie sensiblement. Pour remédier à cela, nous réduisons l'étude de $P(h)$, à celle d'un système d'opérateurs h -pseudodifférentiels. Plus précisément, suivant [Dim93, Dim02, GMS91, GRT88], nous pouvons réduire l'étude spectrale de $P(h)$ près de toute énergie fixée z à l'étude d'un système fini d'opérateurs h -pseudodifférentiels, $E_{-+}(z, h)$, agissant sur $L^2(\mathbb{T}^{*d}; \mathbb{C}^N)$ dépendant d'une façon non-linéaire du paramètre spectral z en général, c'est la méthode du hamiltonien effectif.²¹ L'asymptotique faible de la fonction de décalage spectral se déduit des résultats bien connus de calcul h -pseudodifférentiel, voir [Rob87] et les références qui s'y trouvent. Par contre, dans le cas de géométries non-captives, l'asymptotique ponctuelle complète de la dérivée de la fonction de décalage spectral ne découle pas directement des résultats de D. Robert et H. Tamura (voir [RT84, RT87, RT88] et aussi [Rob94]) suite à la dépendance non linéaire de $E_{-+}(z, h)$ par rapport au paramètre spectral z . Pour pallier à cette difficulté, nous commençons par donner le symbole de $E_{-+}(z, h)$ près d'une énergie non-critique de P_0 . Le symbole principal correspondant dépend de façon linéaire en z (le symbole sous principal ne dépend pas de z) et la dépendance non-linéaire n'arrive qu'à partir de l'ordre 2 en h et de plus

20. Pour les hypothèses précises sur V_{per} et φ nous renvoyons le lecteur au chapitre III, section 2.

21. Ici nous notons par \mathbb{T}^{*d} le tore plat de dimension d et l'entier N désigne le nombre de bandes « impliquées » près de l'énergie considérée.

le terme correspondant est holomorphe en z dans un petit voisinage complexe Ω près de l'énergie considérée. Les deux ingrédients principaux dans la méthode de D. Robert et H. Tamura sont le théorème d'absorption limite et la construction d'une paramétrix pour des temps longs de l'équation d'évolution correspondante. Dans notre cas, nous utilisons ces deux ingrédients mais pour une famille d'opérateurs $(B_s)_{s \in \Omega \cap \mathbb{R}}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (i) Le symbole principal de B_s (resp. sous-principal) coïncide avec le symbole principal (resp. sous-principal) de $E_{-+}(z, h)$, donc indépendant du paramètre s .
- (ii) À partir du terme d'ordre 2 en h , nous remplaçons le paramètre spectral z par le paramètre $s \in \Omega \cap \mathbb{R}$ dans les termes de $E_{-+}(z, h)$ correspondants.

Nous appliquons maintenant la méthode de D. Robert et H. Tamura à la famille d'équations d'évolutions correspondantes paramétrée par s , toute la difficulté est de bien contrôler l'uniformité par rapport à ce paramètre des différentes estimations. La condition de non-capture est valable pour toute cette famille d'opérateurs puisque le symbole principal (et aussi sous-principal) est le même pour tous ces opérateurs.

Pour la formule de trace locale, après un problème de Grushin, nous regardons encore un système fini d'opérateurs h -pseudodifférentiels. Nous utilisons les propriétés du hamiltonien effectif, telle que l'analyticité par rapport au paramètre spectral z de la contribution qui provient du complémentaire d'un voisinage de l'énergie que nous considérons. Cela permet d'écrire la trace de $[f(P(h) - f(P_0))]$ comme une intégrale de chemin modulo un reste d'ordre h^{-d} , uniformément par rapport à f où f est analytique dans Ω et $\sup|f| \leq 1$ dans $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$. Ici $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sont deux voisinages de l'énergie non-critique de P_0 considérée et d est la dimension de l'espace. Puis nous faisons une dilatation analytique en moment ξ à la H. Cycon, voir [Cyc85]. Ce qui est possible près d'une énergie non-critique. Notons \mathcal{U}_t l'opérateur correspondant à cette dilatation avec $t \in \mathbb{C}$, $|t| \ll 1$. En utilisant la cyclicité de la trace et le fait que l'opérateur \mathcal{U}_t est unitaire pour t réel nous montrons que la trace de l'intégrand ne change pas sous l'action de la dilatation \mathcal{U}_t pour t complexe mais suffisamment petit. Ceci nous permet d'ouvrir une fenêtre complexe près des bandes de Bloch intervenant autour de l'énergie non-critique de P_0 considérée où nous pourrions identifier les résonances de $P(h)$. Comme l'intégrand est un opérateur compact, nous pouvons le décomposer en deux opérateurs, le premier est de rang fini ($= \mathcal{O}(h^{-d})$) et le deuxième

est de norme petite. Donc, nous pouvons écrire la trace de $[f(P(h)) - f(P_0)]$ comme une intégrale de contour où l'intégrand fait intervenir un déterminant dont les zéros sont les résonances de $P(h)$, c'est l'idée de représenter la fonction de décalage spectral en fonction d'un certain déterminant perturbé. Une conséquence directe est que le nombre de résonances de $P(h)$ est au plus $\mathcal{O}(h^{-d})$ dans Ω sachant que P_0 n'a pas de résonances près de ses énergies non-critiques. Suite à cette conclusion nous pouvons trouver un chemin où une certaine minoration « à priori » est vérifiée. Suivant la preuve du théorème de Lidskiĭ [Lid59] (voir aussi [GK71, page 103, théorème 8.4]) et en utilisant le théorème de factorisation d'Hadamard nous obtenons -modulo un reste $\mathcal{O}(h^{-d})$ uniforme en f - une intégrale de Cauchy d'une fonction méromorphe dont les pôles sont exactement les résonances de $P(h)$, d'où la formule de trace locale impliquant les résonances de $P(h)$ près d'une énergie non-critique de P_0 . Comme application, nous montrons l'existence d'une infinité de résonances en combinant les théorèmes III.2 et III.6 pour un choix particulier de la perturbation φ et en utilisant la définition du front d'onde analytique par la transformation F.B.I.²²

Pour l'asymptotique forte de la dérivée de la fonction de décalage spectral, nous avons besoin d'étudier un problème d'évolution dont la dépendance par rapport au paramètre spectral est implicite et non-linéaire. Une idée pour contourner ce genre de difficulté est d'avoir une approche stationnaire (indépendante du temps) introduite par M. Dimassi et J. Sjöstrand (voir [DS96]) dans leur étude des opérateurs pseudo-différentiels micro-hyperboliques. Voir aussi [DS99, chapitre 12]. Dans [xii], nous avons donné une nouvelle preuve du résultat de D. Robert et H. Tamura concernant l'asymptotique forte en puissance de h de la dérivée de la fonction de décalage spectral $\zeta(\lambda; -h^2\Delta + U(x), -h^2\Delta)$ près d'une énergie non-captive, dans le cas de l'opérateur de Schrödinger. Comme expliqué ci-dessus l'approche de D. Robert et H. Tamura nécessite la construction de paramétrix pour des temps longs pour l'équation d'évolution correspondante alors que notre preuve est stationnaire (indépendante du temps), basée sur le théorème d'absorption limite, des estimations à la Paley-Wiener et le calcul fonctionnel introduit par B. Helffer et J. Sjöstrand, voir [DS99, chapitre 8]. Cette approche nous permettra d'étudier la fonction de décalage spectral dans le cas de croisement de valeurs propres de Floquet de l'opérateur de Schrödinger périodique dans le futur. Notons que cette approche a été utilisé pour l'étude de la fonction de décalage spectral dans le cas de l'opérateur de Stark (voir [DF15]) et aussi dans le cas des systèmes, voir [ADS17].

22. La transformation F.B.I (Fourier-Bros-Iagolnitzer), voir [Sjö82, chapitre 6, page 39].

Enfin nous avons obtenu des résultats comparables dans le cas des perturbations à grande constante de couplage. En fait ce type de perturbations est microlocalement comparable au cas discuté dans les paragraphes précédents via une construction explicite d'un potentiel à variation lente correspondant, voir [viii]. Ces résultats ne sont pas exposés dans ce tapuscrit.

Avec la fin de la présentation du chapitre III, nous terminons la description de la première partie de ce mémoire dont le sujet principal est les résonances semi-classiques, d'où le titre de cette partie « Autour des résonances en limite semi-classique »²³. La seconde partie concerne deux travaux dans deux domaines mathématiques différents, le premier en théorie quantique des champs et le deuxième en théorie du contrôle. Le seul point commun entre ces deux travaux est la présence d'un paramètre que nous allons faire tendre vers 0, d'où le titre de cette deuxième partie « Encore du semi-classique ». Le premier travail concerne la limite classique -suivant la terminologie dans ce domaine- de la propagation d'états cohérents en théorie quantique des champs. Le paramètre « semi-classique » dans le second travail est l'inverse de l'écart entre deux valeurs propres consécutives d'un certain opérateur d'ordre 4 en dimension 1.

Dans le chapitre IV, nous présentons notre travail en collaboration avec Z. Ammari concernant la propagation des états cohérents en théorie quantique des champs, plus précisément le cas bosonique. Nous avons établi un théorème de limite classique dans ce cadre pour une large classe de hamiltoniens tronquée dans les variables spatiales, par exemple le modèle $P(\varphi)_2$ -tronqué. Cette classe contient aussi des modèles avec des interactions non nécessairement polynomiales dans les variables de champ, par exemple le modèle de R. Høegh-Krohn, voir [HK69a, HK69b].

N. Bohr a formulé le principe de correspondance énonçant que la physique classique et la physique quantique convergent dans la limite des grands nombres quantiques. Plus tard, E. Schrödinger a découvert les états dits cohérents qui établissent un pont entre la théorie quantique et la théorie classique. La dynamique quantique de ces états est en effet étroitement localisée autour des trajectoires classiques sachant que le principe d'incertitude affirme qu'il n'est pas possible de trouver une fonction d'onde à support compact à la fois en position et en impulsion. Ces états cohérents sont donc les meilleurs « minimiseurs » de l'inégalité d'incertitude en ce qui concerne les observables de position

23. Référence au titre du premier livre que j'ai lu sur ce sujet, celui de B. Helffer et J. Sjöstrand [HS86].

et d'impulsion. Ils sont donc les états les plus classiquement localisés dans l'espace des phases. L'intuition physique derrière les états cohérents et leurs utilités pour la limite classique a été fondée mathématiquement par K. Hepp dans [Hep74]. De nos jours, les états cohérents sont largement utilisés en physique, par exemple en optique quantique (voir [KS68]), ainsi que dans la littérature mathématique (voir [CR12]). Voir aussi [Rob07] pour un aperçu concernant les applications des états cohérents gaussiens à l'analyse semi-classique des équations du type Schrödinger, dépendant du temps ou stationnaires. C'est un outil efficace et -dans un certain sens- simple pour la micro-localisation, (voir par exemple [CRR99, HJ00, Hör94a, Wan85]).

Dans [Hep74] K. Hepp a remarqué que la limite classique peut être obtenue non seulement pour l'opérateur de Schrödinger à une particule, mais aussi pour les hamiltoniens à N -corps et la conjecturer pour des modèles de théorie quantique des champs (voir aussi [Don81]). Par conséquent, la méthode des états cohérents est également efficace pour l'analyse dans l'espace des phases en dimension infinie. Cependant, la limite classique dans le cas des théories quantiques des champs a attiré moins l'attention en comparaison avec l'analyse semi-classique très répandue et bien établie en dimension finie. Notons que ce genre de limite est devenu plus fréquemment utilisé en théorie du champ moyen, voir [AB12, GV79a, GV79b, RS09] et les références qui s'y trouvent.

Notre résultat, valable en dimension infinie, généralise celui établi par K. Hepp en dimension finie, voir [Hep74]. Le cas de l'oscillateur harmonique a été étudié par Heisenberg. Nous adaptons l'approche de Hepp à la situation que nous considérons. Nous montrons que l'évolution quantique d'un état cohérent localisé autour d'un point φ_0 dans l'espace de phases est bien approximé dans la limite classique (modulo un déphasage) par l'état cohérent centré autour de φ_t (l'orbite classique issue de φ_0 à $t = 0$) et déformé par une transformation unitaire dite de Bogoliubov, dépendante du temps. Par conséquent, la limite classique des valeurs de l'action des opérateurs de Weyl sur les états cohérents évolués dans le temps sont les exponentielles de l'orbite de champ classique associé dans l'espace des phases, voir corollaire IV.9.

La classe des hamiltoniens que nous considérons est assez large dans le sens où les interactions sont non nécessairement polynomiales et éventuellement non-bornées. Pour cela, nous utilisons un résultat de représentation d'ondes²⁴ des relations de commutation canoniques permettant de caractériser les opérateurs de Wick associés à des symboles non-polynomiaux dans les variables de champ, voir [Sim74, Theorem I.1]. Par cette caractéri-

24. Représentation d'ondes : « wave representation ».

sation, ces opérateurs sont des opérateurs de multiplication par des fonctions mesurables non-bornées dans l'espace $L^2(M, \mu)$ associé à un certain espace probabilisé (M, \mathcal{T}, μ) . Ce qui nous permet de manipuler ces opérateurs et étudier leurs propriétés via une certaine inégalité dite hypercontractive, (voir [Sim74, Theorem I.17]). Entre autre, nous donnons une condition suffisante assurant la stabilité par translation de l'espace des symboles correspondant, bien que nous soyons en dimension infinie. Notons que les opérateurs de Wick associés à des symboles polynomiaux sur l'espace de Fock ont été utilisés dans les travaux de Z. Ammari et F. Nier, voir [AN08] et aussi dans le travail de J. Dereziński et C. Gérard [DG00] pour les modèles du type $P(\varphi)_2$ -tronqué dans les variables spatiales.

À l'issue de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'existence et l'unicité de l'état fondamental du modèle $P(\varphi)_2$ ainsi qu'au comportement asymptotique de ce dernier par rapport à un paramètre semi-classique (plutôt classique dans ce domaine).²⁵

Dans le chapitre V, nous présentons un travail en collaboration avec K. Ammari et M. Dimassi concernant la caractérisation du taux de décroissance de l'énergie pour certains systèmes dissipatifs dits de Petrowsky. En particulier, nous prouvons que le meilleur taux de décroissance de l'énergie pour l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli amorties est donné par l'abscisse spectrale du générateur infinitésimal du semi-groupe associé, dans le cas où le coefficient d'amortissement est dans L^∞ .

La détermination du taux de décroissance optimal de l'énergie a été effectuée principalement pour l'équation des ondes amorties. Dans le cas unidimensionnel (une corde vibrante) le taux de décroissance est déterminé par l'abscisse spectrale du générateur infinitésimal du semi-groupe correspondant, voir [ATH00, AHT01, BR00, CC01, CZ94, CZ95, Fre99]. En dimension supérieure, G. Lebeau dans [Leb96] donne la valeur explicite (et optimale) du meilleur taux de décroissance en termes d'abscisse spectrale du générateur du semi-groupe correspondant et de la valeur moyenne du coefficient d'amortissement le long des rayons de l'optique géométrique. Dans le cas des plaques amorties, il y a peu de travaux sur cette question, voir [GY01, Kom94, Liu97, Rao98]. Dans notre travail, nous décrivons -dans un cadre abstrait couvrant des cas physiques- le taux de décroissance optimal pour certains systèmes dissipatifs de type Petrowsky en terme de quantité spectral du générateur infinitésimal correspondant à la dynamique sous-jacente. L'idée principale est d'identifier le taux de décroissance de l'énergie avec le supremum de la partie réelle du spectre de l'opérateur dissipatif associé. Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer que

²⁵. C'est un travail en cours.

l'ensemble des vecteurs propres généralisés correspondant forme une base Riesz de l'espace des énergies. Plus précisément, l'approche utilisée ici est perturbative basée essentiellement sur les deux arguments suivants :

- (i) La différence entre deux valeurs propres consécutives de l'opérateur non-perturbé correspondant tend vers l'infini (à l'infini).
- (ii) L'ensemble des vecteurs propres généralisés est quadratiquement proche d'une certaine base orthonormée, constituée des vecteurs propres de l'opérateur non-perturbé (anti-autoadjoint) correspondant.

Le premier argument permet de contrôler les hautes fréquences de l'opérateur étudié, qui sont simples, via une estimation classique de la résolvante le long d'un contour bien choisi autour de chaque grande valeur propre de l'opérateur (anti-autoadjoint) non-perturbé, voir figure [V.1](#).

Rappelons que dans le cas de l'équation d'onde amortie en dimension 1, S. Cox et E. Zuazua ([\[CZ94\]](#)) ont utilisé la méthode de tir basée sur la production d'un ansatz dit de Horn. Cette approche consiste à construire une approximation explicite de la solution de l'équation caractéristique du système correspondant. En supposant que l'amortissement est à variation bornée, les auteurs ont obtenu des développements asymptotiques des solutions associées aux hautes fréquences. Cette méthode du tir ne peut être utilisée que pour des problèmes unidimensionnels.

Pour ces deux approches, une connaissance précise du spectre des opérateurs non-perturbés (anti-autoadjoints) est exigée, plus précisément, le comportement des hautes fréquences associées. Par comparaison à l'autre méthode, notre approche est applicable dans un cadre assez général et indépendamment de la dimension, voir [\[Ram81, Kat66\]](#).

Le fait d'identifier le taux de décroissance de l'énergie à l'abscisse spectral d'un opérateur correspondant donne des informations quantitatives (entre autre des approximations) sur ce taux puisqu'il y a plusieurs méthodes numériques de calcul du spectre d'un tel opérateur.

Une généralisation possible est de considérer des perturbations non-bornés mais relativement bornés par rapport à l'opérateur initial (non-perturbé). Le point crucial est toujours de contrôler la multiplicité géométrique des grandes valeurs propres et la stratégie marchera dans le cas où cette multiplicité reste bornée.

Références bibliographiques

- [AB12] Z. Ammari and S. Breteaux. Propagation of chaos for many-boson systems in one dimension with a point pair-interaction. *Asymptot. Anal.*, 76(3-4) :123–170, 2012.
- [AC71] J. Aguilar and J. M. Combes. A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians. *Comm. Math. Phys.*, 22 :269–279, 1971.
- [ADS17] M. Assal, M. Dimassi, and F. S. Semiclassical trace formula and spectral shift function for systems via a stationary approach. *preprint 1702.07880 on arxiv.org.*, 2017.
- [AHT01] K. Ammari, A. Henrot, and M. Tucsnak. Asymptotic behaviour of the solutions and optimal location of the actuator for the pointwise stabilization of a string. *Asymptot. Anal.*, 28(3-4) :215–240, 2001.
- [AN08] Z. Ammari and F. Nier. Mean field limit for bosons and infinite dimensional phase-space analysis. *Ann. Henri Poincaré*, 9(8) :1503–1574, 2008.
- [ATH00] K. Ammari, M. Tucsnak, and A. Henrot. Optimal location of the actuator for the pointwise stabilization of a string. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(4) :275–280, 2000.
- [BC71] E. Balslev and J. M. Combes. Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions. *Comm. Math. Phys.*, 22 :280–294, 1971.
- [BCD87] P. Briet, J.-M. Combes, and P. Duclos. On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit II : Barrier top resonances. *Comm. in Partial Differential Equations*, 2(12) :201–222, 1987.
- [BH08] J.-F. Bony and D. Häfner. Decay and non-decay of the local energy for the wave equation on the de Sitter-Schwarzschild metric. *Comm. Math. Phys.*, 282(3) :697–719, 2008.
- [BM04] J.-F. Bony and L. Michel. Microlocalization of resonant states and estimates of the residue of the scattering amplitude. *Comm. Math. Phys.*, 246(2) :375–402, 2004.
- [BR00] A. Benaddi and B. Rao. Energy decay rate of wave equations with indefinite damping. *J. Differential Equations*, 161(2) :337–357, 2000.
- [Bus71] V. S. Buslaev. Scattered plane waves, spectral asymptotics and trace formulae in exterior problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 197 :999–1002, 1971.
- [Bus87] V. S. Buslaev. Quasiclassical approximation for equations with periodic coefficients. *Uspekhi Mat. Nauk*, 42(6(258)) :77–98, 248, 1987.

- [BY92] M. S. Birman and D. R. Yafaev. The spectral shift function. The papers of M. G. Kreĭn and their further development. *Algebra i Analiz*, 4(5) :1–44, 1992.
- [BY94] M. S. Birman and D. R. Yafaev. The scattering matrix for a perturbation of a periodic Schrödinger operator by decreasing potential. *Algebra i Analiz*, 6(3) :17–39, 1994.
- [BZ01] N. Burq and M. Zworski. Resonance expansions in semi-classical propagation. *Comm. Math. Phys.*, 223(1) :1–12, 2001.
- [CC01] C. Castro and S. J. Cox. Achieving arbitrarily large decay in the damped wave equation. *SIAM J. Control Optim.*, 39(6) :1748–1755, 2001.
- [CdV81] Y. Colin de Verdière. Une formule de traces pour l’opérateur de Schrödinger dans \mathbf{R}^3 . *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(1) :27–39, 1981.
- [CR12] M. Combesure and D. Robert. *Coherent states and applications in mathematical physics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, Dordrecht, 2012.
- [CRR99] M. Combesure, J. Ralston, and D. Robert. A proof of the Gutzwiller semiclassical trace formula using coherent states decomposition. *Comm. Math. Phys.*, 202(2) :463–480, 1999.
- [Cyc85] H. L. Cycon. Resonances defined by modified dilations. *Helv. Phys. Acta*, 58(6) :969–981, 1985.
- [CZ94] S. Cox and E. Zuazua. The rate at which energy decays in a damped string. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(1-2) :213–243, 1994.
- [CZ95] S. Cox and E. Zuazua. The rate at which energy decays in a string damped at one end. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(2) :545–573, 1995.
- [CZ00] T. Christiansen and M. Zworski. Resonance wave expansions : two hyperbolic examples. *Comm. Math. Phys.*, 212(2) :323–336, 2000.
- [DF15] M. Dimassi and S. Fujiié. A time-independent approach for the study of the spectral shift function and an application to Stark Hamiltonians. *Comm. Partial Differential Equations*, 40(10) :1787–1814, 2015.
- [DG00] J. Dereziński and C. Gérard. Spectral scattering theory of spatially cut-off $P(\phi)_2$ Hamiltonians. *Comm. Math. Phys.*, 213(1) :39–125, 2000.
- [Dim93] M. Dimassi. Développements asymptotiques des perturbations lentes de l’opérateur de Schrödinger périodique. *Comm. Partial Differential Equations*, 18(5-6) :771–803, 1993.

- [Dim02] M. Dimassi. Resonances for slowly varying perturbations of a periodic Schrödinger operator. *Canad. J. Math.*, 54(5) :998–1037, 2002.
- [Don81] M. Donald. The classical field limit of $P(\varphi)_2$ quantum field theory. *Comm. Math. Phys.*, 79(2) :153–165, 1981.
- [DS96] M. Dimassi and J. Sjöstrand. Trace asymptotics via almost analytic extensions. In *Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995; Lund, 1995)*, volume 21 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 126–142. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Fre99] P. Freitas. Optimizing the rate of decay of solutions of the wave equation using genetic algorithms : a counterexample to the constant damping conjecture. *SIAM J. Control Optim.*, 37(2) :376–387, 1999.
- [Fri48] K. O. Friedrichs. On the perturbation of continuous spectra. *Communications on Appl. Math.*, 1 :361–406, 1948.
- [GK71] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn. *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien*. Dunod, Paris, 1971. Traduit du russe par Guy Roos, Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 39.
- [GMS91] C. Gérard, A. Martinez, and J. Sjöstrand. A mathematical approach to the effective Hamiltonian in perturbed periodic problems. *Comm. Math. Phys.*, 142(2) :217–244, 1991.
- [GN98] C. Gérard and F. Nier. Scattering theory for the perturbations of periodic Schrödinger operators. *J. Math. Kyoto Univ.*, 38(4) :595–634, 1998.
- [GN09] C. Guillarmou and F. Naud. Wave decay on convex co-compact hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 287(2) :489–511, 2009.
- [GRT88] J.-C. Guillot, J. Ralston, and E. Trubowitz. Semiclassical asymptotics in solid state physics. *Comm. Math. Phys.*, 116(3) :401–415, 1988.
- [GS87] C. Gérard and J. Sjöstrand. Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type. *Comm. Math. Phys.*, 108 :391–421, 1987.
- [GS92] C. Gérard and I. Sigal. Space-time picture of semiclassical resonances. *Comm. Math. Phys.*, 145(2) :281–328, 1992.

- [Gui85] L. Guillopé. Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dans \mathbf{R}^n . In *Bony-Sjöstrand-Meyer seminar, 1984–1985*, pages Exp. No. 5, 11. École Polytech., Palaiseau, 1985.
- [GV79a] J. Ginibre and G. Velo. The classical field limit of scattering theory for non-relativistic many-boson systems. I. *Comm. Math. Phys.*, 66(1) :37–76, 1979.
- [GV79b] J. Ginibre and G. Velo. The classical field limit of scattering theory for non-relativistic many-boson systems. II. *Comm. Math. Phys.*, 68(1) :45–68, 1979.
- [GY01] B.-Z. Guo and R. Yu. The Riesz basis property of discrete operators and application to a Euler-Bernoulli beam equation with boundary linear feedback control. *IMA J. Math. Control Inform.*, 18(2) :241–251, 2001.
- [Han79] N. Hanges. Propagation of singularities for a class of operators with double characteristics. In *Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations (Inst. Adv. Study, Princeton, N.J., 1977/78)*, volume 91 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 113–126. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1979.
- [Hep74] K. Hepp. The classical limit for quantum mechanical correlation functions. *Comm. Math. Phys.*, 35 :265–277, 1974.
- [HJ00] G. A. Hagedorn and A. Joye. Exponentially accurate semiclassical dynamics : propagation, localization, Ehrenfest times, scattering, and more general states. *Ann. Henri Poincaré*, 1(5) :837–883, 2000.
- [HK69a] R. Høegh-Krohn. Boson fields under a general class of cut-off interactions. *Comm. Math. Phys.*, 12 :216–225, 1969.
- [HK69b] R. Høegh-Krohn. Boson fields under a general class of local relativistic invariant interactions. *Comm. Math. Phys.*, 14 :171–184, 1969.
- [HM87] B. Helffer and A. Martinez. Comparaison entre les diverses notions de résonances. *Helv. Phys. Acta*, 60(8) :992–1003, 1987.
- [Hör90] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.
- [Hör94a] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*, volume 274 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Pseudo-differential operators, Corrected reprint of the 1985 original.
- [Hör94b] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. IV*, volume 275 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Fourier integral operators, Corrected reprint of the 1985 original.

- [Hör05] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. II*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Differential operators with constant coefficients, Reprint of the 1983 original.
- [HS86] B. Helffer and J. Sjöstrand. Résonances en limite semi-classique. *Mém. Soc. Math. France*, (24-25) :iv+228, 1986.
- [HS96] P. D. Hislop and I. M. Sigal. *Introduction to spectral theory*, volume 113 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. With applications to Schrödinger operators.
- [HSVN07] M. Hitrik, J. Sjöstrand, and S. Vũ Ngọc. Diophantine tori and spectral asymptotics for nonselfadjoint operators. *Amer. J. Math.*, 129(1) :105–182, 2007.
- [Hun86] W. Hunziker. Distortion analyticity and molecular resonance curves. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 45(4) :339–358, 1986.
- [Kat66] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [KK00] N. Kaidi and P. Kerdelhué. Forme normale de Birkhoff et résonances. *Asymptot. Anal.*, 23(1) :1–21, 2000.
- [Kom94] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization*. RAM : Research in Applied Mathematics. Masson, Paris ; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994. The multiplier method.
- [Kra33] H. A. Kramers. *Theorien des Aufbaues der Materie*, volume 1. A.Eucken and K. L. Wolf, 1933.
- [Kre53] M. G. Kreĭn. On the trace formula in perturbation theory. *Mat. Sbornik N.S.*, 33(75) :597–626, 1953.
- [KS68] J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan. *Fundamentals of quantum optics*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.
- [Leb96] G. Lebeau. équation des ondes amorties. In *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, volume 19 of *Math. Phys. Stud.*, pages 73–109. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [Lid59] V. B. Lidskiĭ. Non-selfadjoint operators with a trace. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 125 :485–487, 1959.

- [Lif52] I. M. Lifšic. On a problem of the theory of perturbations connected with quantum statistics. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 7(1(47)) :171–180, 1952.
- [Liu97] K. Liu. Locally distributed control and damping for the conservative systems. *SIAM J. Control Optim.*, 35(5) :1574–1590, 1997.
- [LP67] P. D. Lax and R. S. Phillips. Scattering theory for transport phenomena. In *Functional Analysis (Proc. Conf., Irvine, Calif., 1966)*, pages 119–130. Academic Press, London ; Thompson Book Co., Washington, D.C., 1967.
- [LP89] P. Lax and R. Phillips. *Scattering theory*, volume 26 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, second edition, 1989. With appendices by C. Morawetz and G. Schmidt.
- [Mar02a] A. Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Universitext. Springer-Verlag, 2002.
- [Mar02b] A. Martinez. Resonance free domains for non globally analytic potentials. *Ann. Henri Poincaré*, 3(4) :739–756, 2002.
- [MF81] V. Maslov and M. Fedoriuk. *Semiclassical approximation in quantum mechanics*, volume 7 of *Mathematical Physics and Applied Mathematics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1981. Translated from the Russian by J. Niederle and J. Tolar, Contemporary Mathematics, 5.
- [MR78] A. Majda and J. Ralston. An analogue of Weyl’s theorem for unbounded domains. I. *Duke Math. J.*, 45(1) :183–196, 1978.
- [NSZ03] S. Nakamura, P. Stefanov, and M. Zworski. Resonance expansions of propagators in the presence of potential barriers. *J. Funct. Anal.*, 205(1) :180–205, 2003.
- [NSZ11] S. Nonnenmacher, J. Sjöstrand, and M. Zworski. From open quantum systems to open quantum maps. *Comm. Math. Phys.*, 304(1) :1–48, 2011.
- [NSZ14] S. Nonnenmacher, J. Sjöstrand, and M. Zworski. Fractal Weyl law for open quantum chaotic maps. *Ann. of Math. (2)*, 179(1) :179–251, 2014.
- [NZ07] S. Nonnenmacher and M. Zworski. Distribution of resonances for open quantum maps. *Comm. Math. Phys.*, 269(2) :311–365, 2007.
- [NZ09] S. Nonnenmacher and M. Zworski. Semiclassical resolvent estimates in chaotic scattering. *Appl. Math. Res. Express. AMRX*, (1) :74–86, 2009.
- [Pop82] G. S. Popov. Asymptotic behaviour of the scattering phase for the Schrödinger operator. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 35(7) :885–888, 1982.

- [PP82] V. Petkov and G. Popov. Asymptotic behaviour of the scattering phase for nontrapping obstacles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32(3) :vi, 111–149, 1982.
- [Ram81] A. G. Ramm. On the basis property for the root vectors of some nonselfadjoint operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 80(1) :57–66, 1981.
- [Ram96] T. Ramond. Semiclassical study of quantum scattering on the line. *Comm. Math. Phys.*, 177(1) :221–254, 1996.
- [Rao98] B. Rao. Optimal energy decay rate in a damped Rayleigh beam. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 4(4) :721–734, 1998.
- [Rob87] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987.
- [Rob91] D. Robert. Asymptotique à grande energie de la phase de diffusion pour un potentiel. *Asymptotic Anal.*, 3(4) :301–320, 1991.
- [Rob92] D. Robert. Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du laplacien. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 25(2) :107–134, 1992.
- [Rob94] D. Robert. Relative time-delay for perturbations of elliptic operators and semiclassical asymptotics. *J. Funct. Anal.*, 126(1) :36–82, 1994.
- [Rob99] D. Robert. Semiclassical asymptotics for the spectral shift function. In *Differential operators and spectral theory*, volume 189 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 187–203. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Rob07] D. Robert. Propagation of coherent states in quantum mechanics and applications. In *Partial differential equations and applications*, volume 15 of *Sémin. Congr.*, pages 181–252. Soc. Math. France, Paris, 2007.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.
- [RS09] I. Rodnianski and B. Schlein. Quantum fluctuations and rate of convergence towards mean field dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 291(1) :31–61, 2009.
- [RT84] D. Robert and H. Tamura. Semiclassical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotics for scattering phases. *Comm. Partial Differential Equations*, 9(10) :1017–1058, 1984.
- [RT87] D. Robert and H. Tamura. Semiclassical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 46(4) :415–442, 1987.

- [RT88] D. Robert and H. Tamura. Semi-classical asymptotics for local spectral densities and time delay problems in scattering processes. *J. Funct. Anal.*, 80(1) :124–147, 1988.
- [SBZ97] A. Sá Barreto and M. Zworski. Distribution of resonances for spherical black holes. *Math. Res. Lett.*, 4(1) :103–121, 1997.
- [Sim73] B. Simon. Resonances in n -body quantum systems with dilatation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory. *Ann. of Math. (2)*, 97 :247–274, 1973.
- [Sim74] B. Simon. *The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974. Princeton Series in Physics.
- [Sim78] B. Simon. Resonances and complex scaling : A rigorous overview. *Int. J. quantum chemistry*, XIV :529–542, 1978.
- [Sjö82] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. In *Astérisque, 95*, volume 95 of *Astérisque*, pages 1–166. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [Sjö87] J. Sjöstrand. Semiclassical resonances generated by nondegenerate critical points. In *Pseudodifferential operators (Oberwolfach, 1986)*, volume 1256 of *Lecture Notes in Math.*, pages 402–429. Springer, Berlin, 1987.
- [Sjö90] J. Sjöstrand. Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems. *Duke Math. J.*, 60(1) :1–57, 1990.
- [Sjö01] J. Sjöstrand. Resonances for bottles and trace formulae. *Math. Nachr.*, 221 :95–149, 2001.
- [SZ07] J. Sjöstrand and M. Zworski. Elementary linear algebra for advanced spectral problems. *Ann. Inst. Fourier*, 57(7) :2095–2141, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.
- [TZ00] S.-H. Tang and M. Zworski. Resonance expansions of scattered waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(10) :1305–1334, 2000.
- [Vai68] B. R. Vainberg. On the analytic properties of the resolvent for a certain class of operators-pencils. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77 (119) :259–296, 1968.
- [Vai89] B. Vainberg. *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*. Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1989. Translated from the Russian by E. Primrose.
- [Wan85] X. P. Wang. étude semi-classique d’observables quantiques. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, 7(2) :101–135, 1985.

- [Wen33] G. Wentzel. *Wellenmechanik der Stoß- und Strahlungsvorgänge*, volume XXIV, Part I,. Handbuch der Physik 2nd ed., Berlin, 1933.
- [WW30a] V. Weisskopf and E. Wigner. Berechnung der natürlichen linienbreite auf grund der diracshen lichttheorie. *Z. Phys.*, 63(1-2) :54–73, 1930.
- [WW30b] V. Weisskopf and E. Wigner. über die natürliche linienbreite in der strahlung des harmonischen oszillators. *Z. Phys.*, 65(1-2) :18–29, 1930.
- [Yaf00] D. Yafaev. *Scattering theory : some old and new problems*, volume 1735 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Zwo12] M. Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

Première partie

Autour des résonances en limite semi-classique

Chapitre I

Résonances engendrées par un sommet et applications

Sous-titre : Théorème de propagation des singularités à travers un point fixe hyperbolique et ses conséquences.

Articles présentés dans le chapitre I

- [xxi] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Barrier-top resonances for non globally analytic potentials*. Accepté le 20 juin **2017** au Journal of Spectral Theory, 24 pages.
- [xiii] T. Watanabe and M. Zerzeri, *Transition probability for multiple avoided crossings with a small gap through an exact WKB method and a microlocal approach*. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, **350 (2012)**, n^{os} 17-18, p. 841–844.
- [ix] J-F .Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Spectral projection, Residue of the scattering amplitude, and Schrödinger group expansion for barrier-top resonances*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 61 (**2011**), n^o 4, p. 1351–1406.
- [vii] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Long time behavior of the Schrödinger group associated with a potential maximum*. Spectral theories of non-Hermitian operators and their application, COE Lecture Note, vol. 20 (**2009**), p. 43–55.
- [vi] J-F. Bony, S. Fujiié , T. Ramond and M. Zerzeri, *Propagation of microlocal solutions through a hyperbolic fixed point*. Differential Equations and Exact WKB Analysis. RIMS Kôkyûroku Bessatsu B10 (**2008**), p. 1–32.
- [v] S. Fujiié and M. Zerzeri, *Connection of WKB Solutions at a hyperbolic fixed point*. RIMS Kôkyûroku, 1607 (**2008**), p. 120–141.
- [iv] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Microlocal kernel of pseudodifferential operators at a hyperbolic fixed point*. J. Funct. Anal. 252 (**2007**), n^o 1, p. 68–125.

Mots-clés : Résonances, analyse microlocale, point fixe hyperbolique, propagation des singularités, opérateur de Schrödinger.

Classification mathématique par matières (2010) : 35B34, 81Q20, 37C25, 35J10, 35P20, 35S10

I.1 Introduction et préliminaires



Dans ce chapitre nous présentons les résultats obtenus autour des résonances générées par un maximum global d'un potentiel. Plus précisément, nous donnons un théorème de propagation des singularités dans le cas d'un point fixe hyperbolique et explicitons le passage de ce point, voir théorèmes I.3 et I.4. Ces deux résultats plus une étude assez fine de l'équation de transport correspondante nous permettent de prouver l'asymptotique des résonances générées par un maximum global d'un potentiel non-globalement analytique. Voir théorème I.5. Puis, nous donnons le développement asymptotique complet en puissance de h dans le cas d'une pseudo-résonance simple, voir proposition I.6, où l'état résonant correspondant est micro-localisé le long d'une trajectoire rentrante dont le choix dépend de manière cruciale de la pseudo-résonance simple. Au passage, nous donnons une description des états résonants dans ce cadre, voir proposition I.8. En deuxième partie, nous présentons dans le cas où V est globalement analytique deux applications, une formule explicite en puissance de h du projecteur spectral associé (voir théorème I.10) et le comportement du semi-groupe d'évolution de l'opérateur de Schrödinger en temps grand associé, voir théorème I.11.

La section commentaire et suite de ce chapitre est un petit peu spéciale dans le sens où nous discuterons un travail qui a priori n'a pas de lien direct avec les résonances mais la géométrie correspondante est comparable à celle donnée par un point fixe hyperbolique au moins dans un certain régime de plus le résultat établi peut se généraliser au cas où le potentiel non-globalement analytique. Nous énoncerons le résultat concernant la probabilité de transition pour des multiples croisements évités par un petit écart et surtout nous discuterons l'asymptotique de cet objet dans les différents régimes considérés.

Nous commençons par introduire l'objet spectral que nous allons étudier et présenter le cadre géométrique qui nous intéresse, c.-à-d. la dynamique classique près d'un point fixe hyperbolique. Puis nous expliquons en quelques lignes la réduction de l'équation vérifiée par l'état résonant à un problème de Cauchy microlocal près des trajectoires captées à l'énergie correspondante. Nous terminons cette section par un très bref rappel des outils microlocaux semi-classiques adaptés à notre situation.

I.1.1 Définition des résonances par distorsions analytiques

Nous considérons l'opérateur de Schrödinger semi-classique sur \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) donné par

$$P = -h^2\Delta + V(x), \quad (\text{I.1})$$

où $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = 0$.

L'opérateur P est un opérateur autoadjoint, non-borné de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$. Le spectre de P est réel et par la théorie des perturbations -le théorème de Weyl- son spectre essentiel est $[0, +\infty[$.

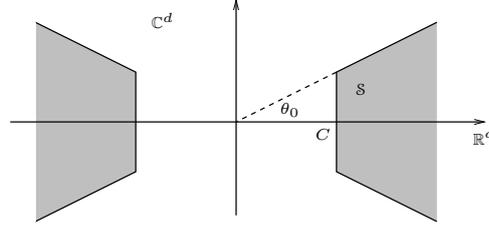


Figure I.1 – Domaine d’analyticité du potentiel V .

Pour définir (surtout identifier) les résonances de P par distorsions analytiques, nous avons besoin d’une hypothèse d’analyticité sur V .

(A.I.1) On suppose que le potentiel V admet une extension analytique dans

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}^d; |\operatorname{Re} X| > C \text{ et } |\operatorname{Im} X| < (\tan \theta_0) |\operatorname{Re} X|\}$$

pour certains C et θ_0 positifs. Voir figure I.1.

De plus, on suppose que $\lim_{|X| \rightarrow +\infty, X \in \mathcal{S}} V(X) = 0$.

Introduisons maintenant le champ de vecteurs F permettant la distorsion de \mathbb{R}^d . Soit $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^∞ tel que $F(x) = 0$ pour $|x| < R$ et $F(x) = 1$ pour $|x| > R+1$. Ici $R > C$, où C est donné par (A.I.1). Pour $\mu \in \mathbb{R}$ petit, l’opérateur $U_\mu : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ donné par :

$$U_\mu f(x) = \left| \det \left(d[xe^{\mu F(x)}] \right) \right|^{\frac{1}{2}} f(xe^{\mu F(x)}), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

est unitaire. Nous considérons l’opérateur « distordu » $\tilde{P}_\mu := U_\mu P (U_\mu)^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$ petit. Cet opérateur est analytique de type- \mathcal{A} par rapport à μ (c’est un opérateur différentiel d’ordre 2 à coefficients analytiques par rapport à μ). Donc l’opérateur non-autoadjoint :

$$P_\theta = U_{i\theta} P (U_{i\theta})^{-1} \tag{I.2}$$

est bien défini pour $\theta \in \mathbb{R}$ suffisamment petit. De plus, $\sigma_{\text{ess}}(P_\theta) = e^{-2i\theta} \mathbb{R}_+$ et le spectre de P_θ dans $\mathcal{C}_\theta := \{z \in \mathbb{C}^*; -2\theta < \arg(z) < 0\}$ ¹ est discret. Voir figure I.2

Définition I.1. Dans $\mathcal{C}_\theta := \{z \in \mathbb{C}^*; -2\theta < \arg(z) < 0\}$, les résonances de P sont les valeurs propres de P_θ . La multiplicité d’une résonance $z_0 \in \mathcal{C}_\theta$ est le rang du projecteur spectral

$$\Pi_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z - P_\theta)^{-1} dz, \tag{I.3}$$

où γ est un petit cercle centré en z_0 .

Les résonances de P sont indépendantes de θ dans le sens que $\sigma(P_{\tilde{\theta}}) \cap \mathcal{C}_\theta = \sigma(P_\theta) \cap \mathcal{C}_\theta$ pour $\theta < \tilde{\theta}$ en tenant compte aussi de leur multiplicité. De plus les résonances de P sont indépendantes du champ de vecteurs F . Par conséquent, nous notons l’ensemble de résonances de P par $\mathbf{Res}(P)$ sans indiquer les paramètres « techniques » θ et F .

1. Ici $\arg(z)$ est l’argument du nombre complexe non nul z .

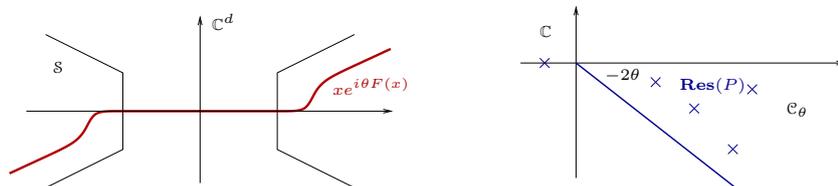


Figure I.2 – Distorsion analytique et identification des résonances dans \mathcal{C}_θ .

De manière équivalente, nous pouvons définir les résonances de P en montrant que la résolvante $(z - P)^{-1} : L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ admet un prolongement méromorphe, noté $R_+(z)$, à partir du demi-plan supérieur vers \mathcal{C}_θ à travers le spectre essentiel $[0, +\infty[$, voir l'introduction générale. De plus, nous avons

$$\chi R_+(z) \chi = \chi (z - P_\theta)^{-1} \chi,$$

pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, dont le support est inclus dans l'ensemble $\{F = 0\}$. Les pôles de $z \mapsto R_+(z)$ sont les résonances de P et la multiplicité d'une résonance z_0 est donnée par le rang du projecteur $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_+(z) dz$, où γ est un petit cercle centré en z_0 .

I.1.2 Géométrie symplectique

L'espace des phases (position-moment) $T^*\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$ muni de la 2-forme canonique anti-symétrique non-dégénérée et fermée (ici exacte), $\sigma := \sum_{j=1}^d d\xi_j \wedge dx_j = d\left(\sum_{j=1}^d \xi_j dx_j\right)$, est un espace symplectique. Vous pouvez consulter le [DS99, Chapitre 1] pour les propriétés qui découlent de cette structure géométrique particulière. Dans ce mémoire, nous utilisons fréquemment la notion de sous-variété lagrangienne de $T^*\mathbb{R}^d$, voici très rapidement la définition et surtout sa caractérisation. Une variété lagrangienne $\Lambda \subset T^*\mathbb{R}^d$ est une variété de classe \mathcal{C}^∞ de dimension d sur lequel la deux forme symplectique canonique $\sigma = d\xi \wedge dx$ s'annule. Si Λ se projette proprement sur l'espace de base près d'un point, alors il existe une fonction φ de classe \mathcal{C}^∞ telle que Λ peut s'écrire $\Lambda = \Lambda_\varphi = \{(x, \xi); \xi = \nabla\varphi(x)\}$ près de ce point. Dans ce cas, φ est appelée une fonction génératrice de Λ .

Introduisons maintenant le symbole semi-classique de P :

$$p(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x), \quad (\text{I.4})$$

où $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$ et $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^d \xi_j^2$ avec $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Avec la définition ci-dessous de la quantification de Weyl, nous avons, pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$[Pu](x) := [\text{Op}^w(p)u](x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi, h\right) u(y) dy d\xi. \quad (\text{I.5})$$

Le champ de vecteurs hamiltonien H_p sur $T^*\mathbb{R}^d$ est donné par :

$$H_p = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) = 2\xi \cdot \partial_x - \nabla V(x) \cdot \partial_\xi. \quad (\text{I.6})$$

La courbe hamiltonienne associée à H_p passant par le point (x_0, ξ_0) à $s = 0$ est donnée par $\gamma : s \mapsto \gamma(s) = (x(s), \xi(s)) := \exp(sH_p)(x_0, \xi_0)$, solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= 2\xi(s) \\ \dot{\xi}(s) &= -\nabla V(x(s)) \\ (x(0), \xi(0)) &= (x_0, \xi_0). \end{cases}$$

Pour $E \in \mathbb{R}$, on note les ensembles entrant/sortant à l'infini par :

$$\Gamma_{\mp}(E) = \{(x, \xi) \in p^{-1}(E); \exp(sH_p)(x, \xi) \not\rightarrow \infty \text{ quand } s \rightarrow \pm\infty\}. \quad (\text{I.7})$$

L'ensemble des trajectoires captées à l'énergie E est défini par :

$$K(E) = \Gamma_-(E) \cap \Gamma_+(E). \quad (\text{I.8})$$

Les ensembles $\Gamma_{\mp}(E)$ sont fermés et $K(E)$ est compact, voir [GS87, Appendix].

I.1.3 Géométrie près d'un sommet du potentiel

Nous décrivons la situation géométrique près d'un sommet (global ou local) du potentiel V . Ce paragraphe est très utile pour la suite de ce chapitre et le prochain car il nous permet de comprendre la dynamique classique (hamiltonienne) près de ce point et d'introduire les notations nécessaires pour énoncer nos résultats.

Soit p le symbole semi-classique de P donné par (I.4), où $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$.

On suppose que V admet un maximum local non-dégénéré au point $x = 0$, c.-à-d. près de $x = 0$, modulo un changement de variables linéaire,

$$V(x) = V(0) - \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j^2}{4} x_j^2 + \mathcal{O}(|x|^3), \quad (\text{I.9})$$

où les $-\frac{\lambda_j^2}{4}$, ($j = 1, \dots, d$) sont les valeurs propres de la hessienne de V au point $x = 0$, numérotées comme suit : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$.

Soit F_p la matrice fondamentale de p au point $(0, 0) \in \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d$, c.-à-d. F_p est le linéarisé

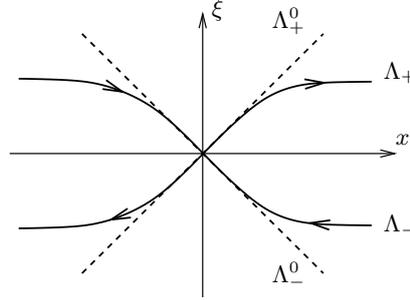


Figure I.3 – Les variétés lagrangiennes Λ_{\mp} et leur espace tangent Λ_{\mp}^0 près du point fixe hyperbolique.

de H_p en $(0, 0)$, donnée par :

$$F_p = d_{(0,0)}H_p := \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \xi} & \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial x} \end{array} \right) \Big|_{(x,\xi)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2\text{Id}_p \\ \frac{1}{2} \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_d^2) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.10})$$

où $\text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_d^2)$ est la matrice diagonale d'ordre d dont les coefficients $a_{jj} = \lambda_j^2$ pour $j = 1, \dots, d$. Les valeurs propres de F_p sont $-\lambda_d, \dots, -\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_d$. Nous avons donc une décomposition naturelle de $T_{(0,0)}(T^*\mathbb{R}^d) \cong \mathbb{R}^{2d}$ en une somme directe de deux sous espaces Λ_-^0 et Λ_+^0 , de dimension d chacun, associés respectivement aux valeurs propres négatives et positives de F_p . Ces sous espaces sont donnés par les équations suivantes :

$$\Lambda_{\mp}^0 := \xi_j = \mp \frac{\lambda_j}{2} x_j, \quad j = 1, \dots, d. \quad (\text{I.11})$$

Le théorème de la variété stable -voir [AM78, Theorem 7.2.8]- nous assure l'existence de deux variétés lagrangiennes Λ_- et Λ_+ , définies dans un petit voisinage Ω de $(0, 0)$, qui sont stables par le flot hamiltonien H_p , et dont les espaces tangents en $(0, 0)$ sont précisément Λ_-^0 et Λ_+^0 . En particulier, ces deux variétés peuvent être paramétrées par la variable x près de $(0, 0)$,

$$\Lambda_{\mp} : \xi = \nabla \varphi_{\mp}(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_{\mp}(x) = \mp \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{4} x_j^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad (\text{I.12})$$

près de $x = 0$. La fonction φ_{\mp} est dite fonction génératrice de Λ_{\mp} près de $x = 0$.

La variété Λ_- (resp. Λ_+) est dite entrante (resp. sortante) associée au point fixe hyperbolique $(0, 0)$ du champ de vecteurs H_p . En effet la variété Λ_- (resp. Λ_+) peut être caractérisée par l'ensemble des $(x, \xi) \in \Omega$ tels que $\exp(sH_p)(x, \xi) \rightarrow (0, 0)$ lorsque $s \rightarrow +\infty$ (resp. $s \rightarrow -\infty$).

Nous terminons ce paragraphe par un très important résultat qui permet de comprendre

le comportement de la dynamique hamiltonienne au voisinage du point fixe hyperbolique. En effet, soit $\rho_{\mp} = (x_{\mp}, \xi_{\mp}) \in \Lambda_{\mp} \setminus \{(0, 0)\}$, alors par la caractérisation ci-dessus de ces variétés, nous avons $\exp(sH_p)(\rho_{\mp}) \rightarrow (0, 0)$ quand $s \rightarrow \pm\infty$. Plus précisément,

Proposition I.2 ([HS85, page 268, identité (2.7)]). *Nous avons*

$$\exp(sH_p)(\rho_{\mp}) \simeq \sum_{k \geq 1} \gamma_k^{\mp}(s) e^{\mp \mu_k s}, \quad \text{quand } s \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{I.13})$$

où $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ sont des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N} des $(\lambda_k)_{k=1, \dots, d}$, avec $\mu_1 = \lambda_1$. Pour la définition du symbole \simeq voir l'identité (I.18) ci-dessous.

Les vecteurs $\gamma_k^{\mp}(s)$ sont polynomiaux en s . De plus $\gamma_1^{\mp}(s)$ est constant par rapport à s , c'est un vecteur propre de la matrice fondamentale F_p associé à la valeur propre $\mp \lambda_1$. Notons que $\gamma_1^{\mp} e^{\mp \lambda_1 s}$ est solution de $\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} x(s) \\ \xi(s) \end{pmatrix} = F_p \begin{pmatrix} x(s) \\ \xi(s) \end{pmatrix}$. Le symbole semi-classique p est symétrique par rapport à ξ , par conséquent $\varphi_+(x) = -\varphi_-(x)$ et si $\rho_{\mp} = (x, \mp \xi) \in \Lambda_{\mp}$ alors

$$\pi_x(\gamma_1^-(\rho^-)) = \pi_x(\gamma_1^+(\rho^+)) =: g(x). \quad (\text{I.14})$$

Ici $\pi_x : \mathbb{T}^* \mathbb{R}^d \ni (x, \xi) \mapsto x \in \mathbb{R}^d$.

I.1.4 Réduction au problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble capté

Dans cette sous-section, nous reprenons avec un ou deux détails en plus ce que nous avons expliqué dans l'introduction générale concernant la caractérisation d'une fonction résonnante par le fait qu'elle vérifie un problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble des trajectoires captées. Ce problème de Cauchy microlocal doit être vu comme une équation de transport le long du champ hamiltonien associé. Avec ce point de vue, nous aurons un problème de propagation des singularités à étudier. Au risque que nous soyons répétitif, nous réitérons les arguments pour insister sur le fait que cette première étape est fondamentale pour appliquer notre stratégie permettant l'obtention des développements asymptotiques des résonances dans les cas géométriques que nous considérons.

Soit P l'opérateur de Schrödinger semi-classique donné par (I.1). Nous supposons que le potentiel V vérifie (A.I.1). Soit $E_0 \in \mathbb{R}$. Nous définissons l'opérateur P_{θ} le « distordu » de P par les dilatations analytiques à la W. Hunziker, voir sous-section I.1.1. Dans le cadre des potentiels non-globalement analytiques, A. Martinez a prouvé que nous puissions regarder les résonances de P dans une boîte de taille $Mh |\ln h|$ en partie imaginaire, pour tout $M > 0$. Cette limitation en partie imaginaire est due à la concurrence entre deux attributs de l'opérateur « distordu » P_{θ} . En effet, nous devons trouver un certain équilibre entre « l'ellipticité à l'infini » de la partie réelle du symbole semi-classique de l'opérateur P_{θ} et le théorème de « propagation des singularités » associé à cet opérateur non-autoadjoint. Voir [Mar02b, Proposition 3.1] et aussi [Mar02a, Theorem 3.5.1]. Soit $z = z(h)$ une résonance

de P_θ dans une telle boîte au voisinage de E_0 . Soit $u = u(h) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ un état résonant associé à $z = z(h)$, c.-à-d. $(P_\theta - z)u = 0$ et $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Notons que cette assertion n'a lieu que pour une suite de valeurs de h qui tend vers 0. Comme nous travaillons dans la catégorie \mathcal{C}^∞ , c.-à-d. modulo des restes d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$, alors nous considérons le système suivant :

$$(P_\theta - z)u = \mathcal{O}(h^\infty), \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1. \quad (\text{I.15})$$

L'idée maintenant est de montrer que cette équation est réduite à un système qui prend en considération uniquement ce qui se passe près de l'ensemble des trajectoires captées. En effet, en utilisant l'ellipticité de la partie réelle de $P_\theta = P + \llcorner$ « petit (dépendant du paramètre de la distorsion θ) », en dehors de la surface d'énergie $p^{-1}(E_0)$, nous prouvons que la fonction u se concentre sur la surface d'énergie E_0 , c'est la localisation en énergie. Ici p est le symbole semi-classique de P . Puis, sur la surface d'énergie $p^{-1}(E_0)$, nous utilisons les estimations sur la partie imaginaire du symbole semi-classique du dilaté, P_θ , nous obtenons une localisation spatiale, c.-à-d. il existe un $R > 0$ assez grand tel que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_0 \|\mathbf{1}_{|x| \leq R} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{O}(h^\infty)$ pour un certain $C_0 > 0$. En fait sur la surface d'énergie $p^{-1}(E_0)$, la partie imaginaire du symbole P_θ vérifie

$$\text{Im } p_\theta(x, \xi) \geq \theta \begin{cases} \delta > 0 & \text{pour } |x| > R, \\ -\tilde{C} & \text{pour } |x| \leq R, \end{cases}$$

pour certains δ, \tilde{C} positifs. Donc

$$\mathcal{O}(h^\infty) = \text{Im} \langle (P_\theta - z)u, u \rangle \geq \delta \theta \|\mathbf{1}_{|x| > R} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \tilde{C} \theta \|\mathbf{1}_{|x| \leq R} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour les trajectoires dans $p^{-1}(E_0)$ le théorème de propagation des singularités « standard » associé à l'opérateur non-autoadjoint P_θ , montre que si u est microlocalement nulle près d'un point de la surface d'énergie E_0 alors u est microlocalement nulle près de son évolué par le flot hamiltonien H_p . Ceci est possible car la partie imaginaire du symbole semi-classique de P_θ est suffisamment petite, d'ordre $h |\ln h|$. Enfin, nous appliquons le résultat de J-F. Bony et L. Michel [BM04] qui exprime le fait que « les états résonants sont des vecteurs propres sortants ». Donc, et plus généralement les quasi-modes globaux, ils s'annulent dans la zone entrante à l'infini $\Gamma(E_0) \setminus K(E_0)$, c.-à-d. $u = \mathcal{O}(h^\infty)$ près de ρ pour tout $\rho \in \Gamma(E_0) \setminus K(E_0)$. Ici l'ensemble des trajectoires captées $K(E_0)$ (resp. rentrantes $\Gamma_-(E_0)$) est donné par (I.8) (resp. (I.7)). Ce résultat nécessite le théorème de propagation des singularités cité ci-dessus. Par conséquent, la fonction u est solution de l'équation (I.15) se transcrit par la fonction u est solution du problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble des trajectoires captées suivant :

$$\begin{cases} (P - z)u = 0 & \text{microlocalement près de } K(E_0), \\ u = u_0 & \text{microlocalement près de tout point de } \Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0), \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

avec u_0 vérifiant $(P - z)u_0 = 0$ microlocalement près de $K(E_0)$. Ici nous avons utilisé que $P_\theta = P$ dans un grand compact en x . Ce système doit être vu comme une équation

de propagation. L'idée maintenant est de faire un choix adapté de u_0 suivant l'ensemble capté considéré. Par exemple, dans le cas où l'ensemble capté contient un point fixe hyperbolique, choisir u_0 comme une distribution lagrangienne dont la variété lagrangienne associée est transverse à Λ_- le long d'une trajectoire hamiltonienne rentrante vers le point fixe hyperbolique considéré. Ici Λ_- est donné par (I.12). Près de ce point hyperbolique nous obtenons l'expression de la solution u de (I.16) en fonction de u_0 si nous considérons u comme une superposition de solutions BKW de l'équation de Schrödinger dépendante du temps « correspondante » dont le temps est le paramètre qui définit cette courbe rentrante. L'équation (I.16) devient une équation de transport sur le symbole de la solution u sachant que près du point fixe hyperbolique son ensemble de fréquences $\text{FS}(u)$ est inclus dans la variété sortante Λ_+ donnée par (I.12). L'ensemble des fréquences de u , noté $\text{FS}(u)$, est défini dans la sous-section suivante.

Nous terminons cette sous-section, en donnant très brièvement le vocabulaire du problème de Cauchy microlocal. On considère le problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble des trajectoires captées, c'est à dire les solutions u de

$$\begin{cases} (P - z)u = v & \text{microlocalement près de } K(E_0), \\ u = u_0 & \text{microlocalement près de tout point de } \Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0). \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Cette équation doit être vue comme une équation de propagation, u_0 étant la donnée initiale et v le second membre.

- (a) Nous parlons d'unicité du problème de Cauchy microlocal si toute solution u de (I.17) avec $v = u_0 = 0$ est microlocalement nulle près de $K(E_0)$.
- (b) Nous parlons d'existence du problème de Cauchy microlocal si, pour toutes données v, u_0 vérifiant $(P - z)u_0 = v$ microlocalement près de tout point de $\Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0)$, il existe une fonction u solution de (I.17).
- (c) Le problème de Cauchy est dit bien posé si nous avons l'existence et l'unicité de la solution.

Dans la littérature, l'unicité du problème de Cauchy microlocal porte parfois le nom de propagation des singularités.

I.1.5 Terminologie de l'analyse microlocale semi-classique

Dans ce petit paragraphe nous rappelons très brièvement le vocabulaire et les notions nécessaires pour la suite de ce chapitre et du suivant. Pour plus de détails, il y a maintenant plusieurs livres de références parmi eux celui de D. Robert [Rob87], de M. Dimassi et J. Sjöstrand [DS99], de A. Martinez [Mar02a], et de M. Zworski [Zwo12].

Une fonction $a(X, h) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^D \times]0, h_0])$ est un symbole dans $S(1)$ si

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^D, \quad \exists C_\alpha > 0, \quad \forall h \in]0, h_0], \quad \forall X \in \mathbb{R}^D, \quad |\partial_X^\alpha a(X, h)| \leq C_\alpha.$$

Pour une fonction $m(h)$ dépendant uniquement de h , nous notons $S(m(h)) = m(h)S(1)$. La quantification de Weyl d'un symbole $a(x, \xi, h) \in S(1)$ est un opérateur défini sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$[\text{Op}^w(a)u](x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi, h\right) u(y) dy d\xi.$$

Nous désignons par $\Psi(1) = \text{Op}^w(S(1))$ l'ensemble des opérateurs h -pseudodifférentiels dont le symbole est dans $S(1)$, et $\Psi(m(h)) = m(h)\Psi(1)$.

Pour $a \in S(1)$, le théorème de Calderón–Vaillancourt affirme que $\text{Op}^w(a)$ est un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, uniformément par rapport à h .

Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$ des réels fixés. Soit $\mathbf{m} := (\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N} des $(\lambda_k)_{k=1, \dots, d}$, avec $\mu_0 = 0$ et $\mu_1 = \lambda_1$.

Nous disons qu'une fonction $a(t, X)$ définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^D$ est \mathbf{m} -développable² s'il existe une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , $(a_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ polynomiaux par rapport à la variable t et telle que, pour tous $K \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{1+D}$, nous avons

$$\partial_t^\alpha \partial_X^\beta \left(a(t, X) - \sum_{k=0}^{K-1} a_{\mu_k}(t, X) e^{-\mu_k t} \right) = \mathcal{O}\left(e^{-(\mu_K - \varepsilon)t}\right).$$

Dans ce cas, nous écrivons :

$$a(t, X) \simeq \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\mu_k}(t, X) e^{-\mu_k t}. \quad (\text{I.18})$$

De plus, une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , $a(t, X, h)$ est appelée symbole classique \mathbf{m} -développable s'il existe une suite $(a_j(t, X))_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions \mathbf{m} -développables au sens de (I.18) tel que, pour tous $J \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{1+D}$,

$$\partial_t^\alpha \partial_X^\beta \left(a(t, X, h) - \sum_{j=0}^{J-1} a_j(t, X) h^j \right) = \mathcal{O}\left(e^{\varepsilon t} h^J\right).$$

Dans ce cas, nous écrivons :

$$a(t, X, h) \simeq \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(t, X) h^j. \quad (\text{I.19})$$

2. Cette notion a été introduite par B. Helffer et J. Sjöstrand dans [HS85].

Toutes les fonctions $u = u_h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ considérées dans la suite de ce chapitre et le suivant seront supposées polynomialement bornées, c'est à dire telles qu'il existe $N \in \mathbb{R}$ avec $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim h^{-N}$. Pour $K \subset T^*\mathbb{R}^d$ un compact et u une fonction polynomialement bornée, nous disons que $u = 0$ microlocalement près de K s'il existe $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$ avec $\chi = 1$ près de K tel que $\text{Op}^w(\chi)u = \mathcal{O}(h^\infty)$ en norme L^2 .

Supposons que K est réduit à un singleton $\{(x_0, \xi_0)\} \subset T^*\mathbb{R}^d$. Soit $u = u_h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ polynomialement bornée. Dire que $u = 0$ microlocalement près de (x_0, ξ_0) si et seulement si la fonction u n'oscille pas près de x_0 avec des fréquences semi-classiques proche de ξ_0 .

Le sous-ensemble de $T^*\mathbb{R}^d$ où la fonction $u = u_h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ polynomialement bornée n'est pas microlocalement nulle est appelé ensemble de fréquences de u , et on le note $\text{FS}(u)$. C'est un fermé de $T^*\mathbb{R}^d$.

Une distribution lagrangienne d'ordre $m(h)$ associée à une variété lagrangienne Λ est une fonction polynomialement bornée u avec $\text{FS}(u) \subset \Lambda$ telle que, microlocalement près de chaque point $\rho \in \Lambda$, u est donné (modulo une transformation de Fourier partielle) par :

$$u(x) = a(x, h)e^{i\varphi(x)/h},$$

où φ est une fonction génératrice de Λ près de ρ et $a \in S(m(h))$. Pour plus de détails sur ce dernier point consulter L. Hörmander [Hör94, sections 25.1 et 25.2].

Nous terminons cette section par introduire une distance entre deux sous ensembles de \mathbb{C} par rapport à un troisième :

Soient A, B, C trois sous ensembles de \mathbb{C} et $\delta \geq 0$, nous disons que $\text{dist}(A, B) \leq \delta$ dans C si et seulement si

$$\begin{aligned} & \text{Pour tout } a \in A \cap C, \quad \text{il existe } b \in B, \quad \text{tel que } |a - b| \leq \delta, \\ \text{et} \quad & \text{Pour tout } b \in B \cap C, \quad \text{il existe } a \in A, \quad \text{tel que } |a - b| \leq \delta. \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Cette distance est assez flexible pour éviter les problèmes qui peuvent survenir à la limite du domaine d'étude C .

I.2 Résultats et quelques idées de preuves

I.2.1 Théorème de propagation des singularités à travers un point fixe hyperbolique

Soit P l'opérateur de Schrödinger semi-classique donné par (I.1).

(A.I.2) *Nous supposons que V admet un maximum local non-dégénéré au point $x = 0$,*

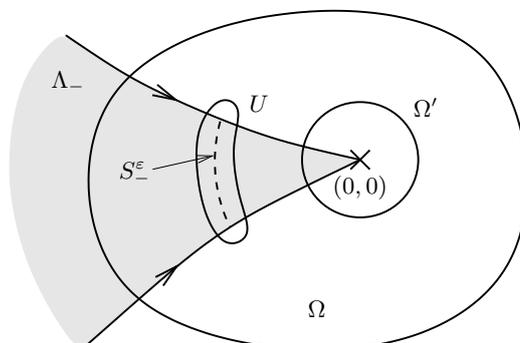


Figure I.4 – Le cadre géométrique du théorème I.3.

c.-à-d. près de $x = 0$, modulo un changement de variables linéaire,

$$V(x) = E_0 - \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j^2}{4} x_j^2 + \mathcal{O}(|x|^3), \quad (\text{I.21})$$

avec $E_0 > 0$ et $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$.

Nous introduisons l'ensemble des pseudo-résonances de P :

$$\mathbf{Res}_0(P) = \left\{ E_0 - ih \sum_{j=1}^d \lambda_j \left(\frac{1}{2} + \alpha_j \right); \alpha \in \mathbb{N}^d \right\}, \quad (\text{I.22})$$

où les $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$ sont données ci-dessus.

Théorème I.3 (Propagation des singularités). *Nous supposons que l'hypothèse (A.I.2) est vérifiée. Soient $\Omega \subset T^*\mathbb{R}^d$ un voisinage de $(0,0)$ et $S_-^\varepsilon = \{(x, \xi) \in \Lambda_-; |x| = \varepsilon\} \subset \Omega$, avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Soient aussi $C, \delta > 0$ et U un voisinage de S_-^ε . Il existe un voisinage Ω' de $(0,0)$ tel que, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 1$ et*

$$\begin{cases} (P - z)u = 0 & \text{microlocalement près de } \Omega, \\ u = 0 & \text{microlocalement près de } U, \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

avec $z \in D(E_0, Ch)$ et $\text{dist}(z, \mathbf{Res}_0(P)) \geq \delta h$, alors $u = 0$ microlocalement près de Ω' .

Dans le résultat précédent, $u = u(h)$ et $z = z(h)$ n'ont pas besoin d'être définis pour tous les $h > 0$ assez petits, mais seulement pour une suite de h tendant vers 0. Les différents ensembles apparaissant dans le théorème I.3 sont illustrés dans la figure I.4. Nous avons démontré ce théorème dans un cadre plus générale, où P est un opérateur h -pseudodifférentiel de la forme $P = \text{Op}^w(p_0 + hp_1)$ avec p_0, p_1 sont des symboles dans $S(1)$, p_0 est à valeurs réelles et son hamiltonien H_{p_0} admet un point fixe hyperbolique, voir [xxi, Theorem 2.4] et aussi [iv, Theorem 2.1]. La preuve que nous allons essayer d'exposer les grandes lignes ici est basée sur la méthode des commutations avec des

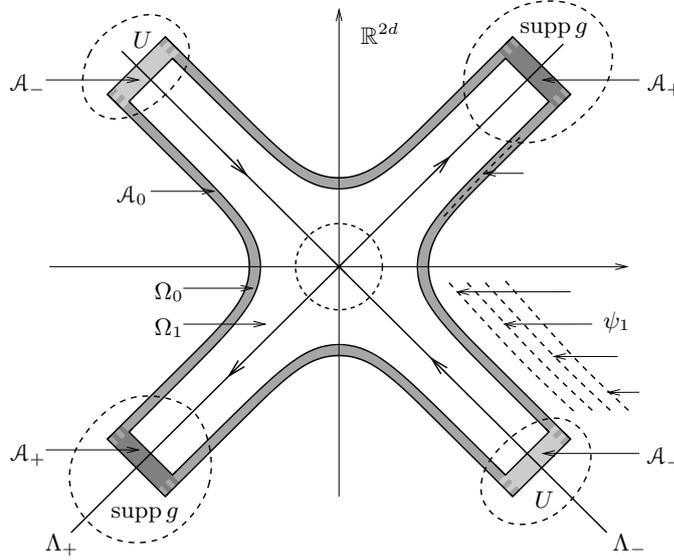


Figure I.5 – Le cadre géométrique près du point fixe hyperbolique avec ces trois régions et la localisation de la fonction fuite.

opérateurs d’annihilation adapté à notre situation, c’est celle donnée dans le travail [xxi] alors que dans le travail de [iv] la preuve est basée sur des estimations d’énergie beaucoup plus technique. Cette approche est connue depuis longtemps pour le calcul du spectre de l’oscillateur harmonique, voir l’introduction générale pour le calcul direct en dimension 1.

Croquis de la démonstration du théorème I.3 : L’idée de la preuve est la suivante : Nous utilisons la méthode des commutations avec des opérateurs d’annihilation adaptés à notre situation, pour montrer qu’une solution u du problème de Cauchy microlocal (I.23) est une distribution lagrangienne associée à la variété instable Λ_+ près du point fixe hyperbolique $(0, 0)$. Puis, en projetant l’équation du (I.23) sur cette structure lagrangienne, nous obtenons une équation de transport vérifié par le symbole de u . Enfin, le fait que nous regardons cette équation pour des z loin de l’ensemble $\mathbf{Res}_0(P)$, nous concluons que u est microlocalement nulle dans un voisinage du point fixe hyperbolique $(0, 0)$. Donnons un peu plus de détails.

Nous commençons par ajouter un terme « imaginaire pur » qui micro-localise en dehors d’un voisinage de $(0, 0)$, jouant le rôle d’un potentiel absorbant complexe, ce qui permet de concentrer l’étude près de $(0, 0)$. Cette procédure rend l’opérateur correspondant inversible « à l’infini ».

Près du point fixe hyperbolique, la situation est assez claire par le théorème de la variété stable. Essentiellement, en dehors d’un « petit » voisinage Ω_1 de $(0, 0)$, (c.-à-d. dans $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_1}$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_0 \subset \Omega$) nous avons trois régions non-disjointes, la première, notée \mathcal{A}_- , qui peut être choisie dans U un voisinage de S_-^ε , et par hypothèse u est microlocalement nulle près de U , donc u est microlocalement nulle près de \mathcal{A}_- . La deuxième région, notée \mathcal{A}_0 , est contrôlée par \mathcal{A}_- c.-à-d. tout $\rho \in \mathcal{A}_0$, peut s’écrire comme $\exp(sH_p)(\rho_-)$ pour

certaines $\rho_- \in \mathcal{A}_-$ et $s \geq 0$ avec $\exp(tH_{p_0})(\rho_-) \in \Omega_0$ pour tout $t \in [0, s]$. Par le théorème de propagation des singularités « standard », la solution u de (I.23) est microlocalement nulle près de \mathcal{A}_0 . Il reste la troisième région, notée \mathcal{A}_+ , qui peut être choisie très proche de la variété instable Λ_+ et toute l'analyse maintenant est située au niveau de cette région.³ Nous choisissons une fonction fuite agissant uniquement dans cette région sortante, et ayant les propriétés suivantes : le support de g est très proche de Λ_+ , g est nulle (plate) près de $(0, 0)$ et quadratique en dehors de ce voisinage. L'utilité de cette fonction fuite g est d'aller chercher de l'ellipticité pour l'opérateur conjugué Q pour des t assez grand et donc avoir de l'information sur la solution u « très » près de $(0, 0)$ par son évolué dans la région sortante. L'opérateur Q est donnée par :

$$Q = \text{Op}^w(e^{-t|\ln h|g})P \text{Op}^w(e^{-t|\ln h|g})^{-1} - i\sqrt{h} \text{Op}^w(1 - \psi_1). \quad (\text{I.24})$$

Ici $\psi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty$ vérifiant $\mathbf{1}_{\Omega_0} \prec \psi_1$.⁴

Notons que ce genre d'opérateurs pseudo-différentiels « $\text{Op}^w(e^{-t|\ln h|g})$ » avec un symbole exponentiel d'ordre $|\ln h|$ a été utilisé en analyse microlocale par N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski [DSZ04].

L'une des difficultés est que les opérateurs d'annihilation ne commutent pas donc nous devons contrôler les restes correspondants, pour cela nous considérons la matrice correspondante Q^N d'ordre d^N de plus en plus grand, son terme principal est une matrice diagonale dont les coefficients sont données par les translatés de l'opérateur Q . Le spectre de ces translatés est de plus en plus loin de l'axe réel. Alors, pour h suffisamment petit et $z \in D(E_0, Ch)$, il existe $N(C) > 0$ tel que pour tout $N \geq N(C)$, l'opérateur $(Q^N - z)$ est inversible et $\|(Q^N - z)^{-1}\| \lesssim h^{-1}$. Cette dernière affirmation nous permet de conclure que dans un petit voisinage W de $x = 0$, $u(x, h) = a(x, h)e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x)}$ où $a(x, h) \in S(h^{-N(C)})$ et φ_+ est la fonction génératrice de Λ_+ , près de $(0, 0)$.

Il reste à montrer que $a(x, h) \in S(h^\infty)$ près de 0. Comme expliquer dans le premier paragraphe l'équation (I.23) devient une équation de transport le long du champ de vecteurs obtenu par restriction du champ hamiltonien à la variété instable Λ_+ . En effet l'équation (I.23) est comme suit : Pour $x \in W$,

$$(Lx + \mathcal{F}(x^2)) \cdot \nabla a(x, h) + \left(\sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} - i \frac{z - E_0}{h} + \mathcal{F}(x) \right) a(x, h) \in S(h^{-N(C)+1}), \quad (\text{I.25})$$

3. Les trois régions $\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_+$ ainsi que le support de la fonction fuite g sont illustrés par la figure I.5.

4. $f_1 \prec f_2$ si et seulement si $f_2 = 1$ près du support de f_1 .

où $L = \text{diag}(\lambda_j)$ et $\mathcal{F}(x^m)$ désigne une fonction \mathcal{C}^∞ qui est $\mathcal{O}(x^m)$ près de 0. Par des différentiations successives, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(Lx + \mathcal{F}(x^2) \right) \cdot \nabla \partial_x^\alpha a(x, h) + \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \left(\frac{1}{2} + \alpha_j \right) - i \frac{z - E_0}{h} \right) \partial_x^\alpha a(x, h) \\ & + \sum_{|\beta|=|\alpha|} \mathcal{F}(x) \partial_x^\beta a(x, h) + \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \mathcal{F}(1) \partial_x^\beta a(x, h) \in S(h^{-N(C)+1}). \end{aligned}$$

Prenons $x = 0$ nous avons

$$\left(\sum_{j=1}^d \lambda_j \left(\frac{1}{2} + \alpha_j \right) - i \frac{z - E_0}{h} \right) \partial_x^\alpha a(0, h) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \mathcal{O}(\partial_x^\beta a(0, h)) + \mathcal{O}(h^{-N(C)+1}). \quad (\text{I.26})$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse que les valeurs z que nous considérons sont loin de l'ensemble $\mathbf{Res}_0(P)$ c.-à-d. z est à distance au moins δh de l'ensemble $\mathbf{Res}_0(P)$, donc par une récurrence sur $|\alpha|$ nous obtenons : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial_x^\alpha a(0, h) = \mathcal{O}(h^{-N(C)+1})$.

Le théorème de Hartman-Grobman [Per01, page 120] nous assure l'existence d'une suite d'ouverts de \mathbb{R}^d vérifiant $0 \in W_\infty \Subset \dots \Subset W_2 \Subset W_1 \Subset W$ et tel que $x \in W_j$ implique $x^+(t, x) \in W_j$ pour tout $t \leq 0$ où $x^+(t, x) = \exp(tH_p^+)(x)$ avec $H_p^+ = 2\nabla\varphi_+(x) \cdot \partial_x$. En utilisant encore une fois le fait que Λ_+ est la variété instable associée au point fixe hyperbolique $(0, 0)$ c.-à-d. il existe $c_0 > 0$ tel que $|x^+(t, x)| \leq e^{-c_0|t|}|x|$ pour tout $t \leq 0$ et $x \in W$, nous prouvons que $a \in S(h^{-N(C)+\frac{1}{4}})$ mais dans W_2 . Par itération, nous avons $a \in S(h^\infty)$ dans W_∞ .

Enfin soit Ω' un voisinage fermé de $(0, 0)$ tel que $\pi_x(\Omega') \subset W_\infty$ ⁵. En combinant, $u = ae^{\frac{i}{h}\varphi_+}$ microlocalement près de Ω' et $a \in S(h^\infty)$ dans W_∞ nous obtenons $u = 0$ microlocalement près de Ω' . \square

I.2.2 De l'analyse microlocale au sommet

Dans le même cadre que la section précédente, c.-à-d. l'opérateur de Schrödinger semi-classique P est donné par (I.1) avec le potentiel V qui vérifie l'hypothèse (A.I.2). Soient $\Omega \subset T^*\mathbb{R}^d$ un voisinage de $(0, 0)$ et U un voisinage de $S_-^\varepsilon = \{(x, \xi) \in \Lambda_-; |x| = \varepsilon\} \subset \Omega$, avec $\varepsilon > 0$.

Nous considérons le problème de Cauchy microlocal suivant :

$$\begin{cases} (P - z)u = 0 & \text{microlocalement près de } \Omega, \\ u = u_0 & \text{microlocalement près de } U, \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

où $z \in D(E_0, Ch)$ et u_0 étant la donnée initiale.

En dimension 1, ce problème a été étudié par B. Helffer et J. Sjöstrand [HS85, Appendix

5. $\pi_x : T^*\mathbb{R}^d \ni (x, \xi) \mapsto x \in \mathbb{R}^d$.

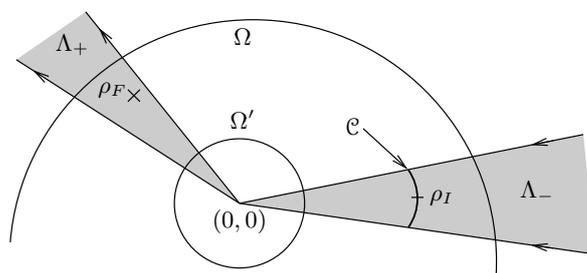


Figure I.6 – Le cadre géométrique du théorème I.4.

B] dans la catégorie analytique et par Y. Colin de Verdière et B. Parisse [CdVP94a, CdVP94b] dans la catégorie \mathcal{C}^∞ .

Le théorème I.3 de propagation des singularités assure que la donnée initiale u_0 définie sur U détermine de manière unique la solution u (si elle existe) en tout point $\rho_F = (x_F, \xi_F)$ sur Λ_+ , sous la condition que z est « loin » de l'ensemble des pseudo-résonances de P .

Notre problème maintenant est de construire u microlocalement près ρ_F en fonction de u_0 restreint à la surface initiale \mathcal{C} , et dont le support est dans un petit voisinage d'un point $\rho_I = (x_I, \xi_I) \in \mathcal{C}$.

Nous faisons deux hypothèses supplémentaires, la première concernant le paramètre spectral z pour que le théorème I.3 soit valide et la deuxième concernant le point initial $\rho_I = (x_I, \xi_I) \in \mathcal{C}$ et le point final $\rho_F = (x_F, \xi_F) \in \Lambda_+$.

(A.I.3) Il existe $\nu > 0$ tel que $\text{dist}(z, \mathbf{Res}_0(P)) > \nu h$,

où $\mathbf{Res}_0(P)$ est l'ensemble des pseudo-résonances donné par (I.22).

Dans la sous-section I.1.3, nous avons défini la direction limite correspondante à un point rentrant (ici ρ_I) ou à un point sortant (ici ρ_F), voir l'identité (I.14) et que cette direction ne dépend que du point base, ici x_I et x_F respectivement. La deuxième hypothèse est :

(A.I.4) Nous supposons que $\langle g(x_I) | g(x_F) \rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$.

En particulier, $g(x_I) \neq 0$. Cela signifie que, dans le cas $\lambda_1 < \lambda_2$, le flot hamiltonien à partir de ρ_I converge vers l'origine tangentiellement à l'axe x_1 . Dans le cas $\lambda_1 = \lambda_2$, nous pouvons aussi supposer, sans perte de généralité, que le vecteur $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ est colinéaire à $g(x_I)$. Le symbole semi-classique p est réel de type principal près ρ_I , nous pouvons donc modifier la surface initiale \mathcal{C} pour qu'elle soit donnée par $\{x_1 = \varepsilon\} \cap \Lambda_-$ près de ρ_I le cas échéant. Par conséquent, en notant $x_I = (\varepsilon, x'_I)$, les données initiales u_0 sur \mathcal{C} est une fonction de x' dans un petit voisinage de x'_I et 0 en dehors.

Théorème I.4 ([ix, Theorem 2.6]). *Nous supposons que le potentiel V vérifie l'hypothèse (A.I.2). Supposons que les hypothèses (A.I.3) et (A.I.4) sont vérifiées.*

Le problème de Cauchy microlocal (I.27) admet une unique solution $u = u_h$ polynomialement bornée. De plus, microlocalement près du point $\rho_F = (x_F, \xi_F) \in \Lambda_+$, la solution u

est donnée par la formule suivante :

$$u(x, h) = \frac{h^{\frac{S(\frac{z}{h})}{\lambda_1}}}{(2\pi h)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{\frac{i}{h}(\varphi_+(x) - \varphi_-(\varepsilon, y'))} d(x, y'; h) u_0(y') dy'. \quad (\text{I.28})$$

Ici $S(\frac{z}{h})$ est donnée par :

$$S\left(\frac{z}{h}\right) := \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} - i\left(\frac{z - E_0}{h}\right), \quad (\text{I.29})$$

et le symbole $d \in S(1)$ possédant le développement asymptotique suivant :

$$d(x, \eta'; h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x, y', \ln h) h^{\frac{\widehat{\mu}_k}{\lambda_1}}, \quad (\text{I.30})$$

où $0 = \widehat{\mu}_0 < \widehat{\mu}_1 (= \mu_2 - \mu_1) < \widehat{\mu}_2 < \dots$ est la suite croissante des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N} des $\{\mu_k - \mu_1\}_{k=1}^{\infty}$, avec les μ_k introduits dans la sous-section I.1.5. et $d_k(x, y', \ln h)$ est un polynôme en $\ln h$. En particulier, le symbole principal d_0 de d ne dépend pas de $\ln h$, et est donné par :

$$d_0(x, y') = e^{-i\pi \frac{d}{4} \lambda_1^{\frac{1}{2}} - \frac{S(\frac{z}{h})}{\lambda_1}} \exp\left(-\frac{S(\frac{z}{h})}{2\lambda_1} \pi i \sigma\right) \Gamma\left(\frac{S(\frac{z}{h})}{\lambda_1}\right) \times e^{I_\infty(x)} \sqrt{\frac{|\det \nabla_{y'}^2 \varphi_-(\varepsilon, y')|}{J_\infty(y')}} \frac{|g(\varepsilon, y')|}{|g(\varepsilon, y') \cdot g(x)|^{\frac{S(\frac{z}{h})}{\lambda_1}}}. \quad (\text{I.31})$$

Ici $\sigma = \text{sgn}(\langle g(x_I) | g(x_F) \rangle_{\mathbb{R}^d})$, $I_\infty(x) := \int_0^{-\infty} \left(\Delta \varphi_+(x(\tau)) - \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} \right) d\tau$, où $x(t)$ est le projeté sur \mathbb{R}_x^d des points de la courbe hamiltonienne $\exp(tH_p)(\rho_F)$. La fonction Gamma est notée par Γ .

Les « jacobiens » sont donnés par $J(t, y', \eta') := \det \frac{\partial x(t, y', \eta')}{\partial(t, y')}$, et

$$J_\infty(y') := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{J(t, y', \eta')}{J(0, y', \eta')} \Big|_{\eta' = \frac{\partial \varphi_-}{\partial y'}(\varepsilon, y')} \exp\left(\left(-\sum_{j=1}^d \lambda_j + 2\lambda_1\right)t\right),$$

avec $x(t, y', \eta')$ est le projeté sur \mathbb{R}_x^d des points de la courbe hamiltonienne $\exp(tH_p)\rho(y', \eta')$ pour y' près x'_I et η' près ξ'_I , et $\rho(y', \eta') := (\varepsilon, y'; -\sqrt{-|\eta'|^2 - V(\varepsilon, y')}, \eta') \in \{x_1 = \varepsilon\} \cap p^{-1}(E_0)$.

Croquis de la démonstration du théorème I.4 : Tout d'abord l'unicité de la solution (si elle existe) est due au théorème de propagation des singularités précédent puisque nous regardons des z qui sont à distance au moins νh de l'ensemble de $\mathbf{Res}_0(P)$.

L'idée principale de la preuve du théorème est d'exprimer la solution u microlocalement près du point fixe hyperbolique $(0, 0)$ comme une superposition de solutions BKW (L. Brillouin, H-A. Kramers et G. Wentzel) de l'équation de Schrödinger dépendant du temps « correspondante » :

$$u(x, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_0^\infty e^{i\varphi(t, x)/h} a(t, x; h) dt.$$

C'est la transcription du fait de considérer le problème de Cauchy microlocal comme une équation de propagation le long des courbes hamiltoniennes du champ de vecteurs, H_p . Cette idée a été introduite par B. Helffer et J. Sjöstrand dans [HS85] et c'est dans ce papier que les auteurs introduisent la notion de \mathbf{m} -développable permettant de décrire de point de vue d'analyse « fidèlement » le comportement des courbes hamiltoniennes au voisinage du point fixe hyperbolique.

Alors, la phase $\varphi(t, x)$ admet un développement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\varphi(t, x) \simeq \varphi_+(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{\mu_k}(t, x) e^{-\mu_k t},$$

où les μ_k sont introduits dans la sous-section 1.1.5.

Le symbole $a(t, x; h)$ admet un développement asymptotique classique en h :

$$a(t, x; h) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell(t, x) h^\ell,$$

dont les coefficients admettent des développements asymptotiques quand $t \rightarrow +\infty$:

$$a_\ell(t, x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell, k}(t, x) e^{-(S+\mu_k)t},$$

où $a_{\ell, k}(t, x)$ est polynomiale en t et $S := S(\frac{z}{h})$ définie par (1.29).

En particulier, $a_{0,0}$ est calculé explicitement à partir de la condition initiale sur Λ_- et nous donne l'expression du symbole principal d_0 sur Λ_+ . \square

Notons que pour ces constructions, il y a une obstruction sur la donnée u_0 . En fait cette donnée initiale ne doit pas être microlocalement supportée sur une certaine sous-variété $\tilde{\Lambda}_-$ de Λ_- , donnée par $\tilde{\Lambda}_- : g(x_-) := \gamma_1^-(x_-, \xi_-) = 0$ avec $(x_-, \xi_-) \in \Lambda_-$. Or l'hypothèse (A.I.4) assure entre autre que $g(x_I) \neq 0$ et nous choisissons u_0 « micro-supporté » près de $\rho_I = (x_I, \xi_I) \in \Lambda_-$.

En remarquant que microlocalement près de $\rho_F \in \Lambda_+$, u est également déterminé par sa trace (notons la u_+) sur une hypersurface transverse au flot hamiltonien, nous avons donc un opérateur bien défini, qui à u_0 fait correspondre u_+ appelé monodromie « singulière » due au passage par le point fixe hyperbolique et nous pouvons caractériser cet opérateur d'une manière plus intrinsèque en utilisant le formalisme mis en place par J. Sjöstrand

et M. Zworski [SZ02]. Nous avons décrit cet opérateur, qui est un opérateur h -intégrale de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$, dans [iv, Theorem 2.8], voir aussi une version simplifiée et introductive dans [BFRZ2003]⁶.

I.2.3 Résonances engendrées par un sommet du potentiel

Dans le même cadre que la section précédente, c.-à-d. l'opérateur de Schrödinger semi-classique P est donné par (I.1) avec le potentiel V qui vérifie l'hypothèse (A.I.2).

Nous supposons que le potentiel V vérifie l'hypothèse (A.I.1), c.-à-d. V analytique en dehors d'un compact et $\lim_{|X| \rightarrow +\infty, X \in \mathcal{S}} V(X) = 0$. Nous pouvons donc définir les résonances par distorsions analytiques, voir la sous-section I.1.1 et rappelons que $\mathbf{Res}(P)$ désigne l'ensemble des résonances de P .

Comme dans la sous-section I.1.3, nous définissons l'ensemble des trajectoires captées associé à l'énergie E_0 par : $K(E_0) = \{(x, \xi) \in p^{-1}(E_0); s \mapsto \exp(sH_p)(x, \xi) \text{ est bornée}\}$.

Finalement, nous supposons que

(A.I.5) $K(E_0) = \{(0, 0)\}$.

En particulier, $x = 0$ est l'unique maximum global de V . De plus, il existe un voisinage pointé de E_0 , $\mathcal{V} \setminus \{E_0\}$, dans lequel toutes les énergies sont non-captives.

Dans le cas non-globalement analytique, les résonances engendrées par un sommet du potentiel sont données par :

Théorème I.5 (Les résonances du sommet). *Nous supposons que les hypothèses (A.I.1), (A.I.2) et (A.I.5) sont vérifiées. Soit $C > 0$. Dans $D(E_0, Ch)$, nous avons*

$$\text{dist}(\mathbf{Res}(P), \mathbf{Res}_0(P)) = o(h),$$

quand h tend vers 0. De plus, pour tous $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\|\chi(P - z)^{-1}\chi\| \leq h^{-M}, \quad (\text{I.32})$$

uniformément pour h suffisamment petit et $z \in D(E_0, Ch) \setminus (\mathbf{Res}_0(P) + D(0, \varepsilon h))$.

La distribution des (pseudo)-résonances est illustrée dans la figure I.7.

Croquis de la démonstration du théorème I.5 : La preuve se fait en deux étapes : premièrement, nous montrons que P n'a pas de résonances « loin » des pseudo-résonances. Ensuite, nous prouvons que P a une résonance proche de chaque pseudo-résonance. C'est une stratégie assez générale pour obtenir l'asymptotique spectrale et qui sera utilisé dans ce chapitre et le prochain. Voir [xxii, section 1.2].

Tout d'abord, nous remarquons que l'équation vérifiée par un état résonant (ou plus généralement, un quasi-mode) se réduit à un système qui prend en considération uniquement

6. https://www.math.univ-paris13.fr/~zerzeri/Papers/BFRZ03_01

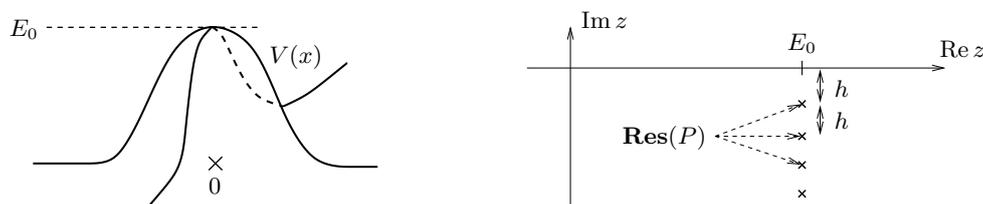


Figure I.7 – Un potentiel vérifiant les hypothèses du théorème I.5 et les résonances correspondantes.

ce qui se passe près de l'ensemble des trajectoires captées. Voir la sous-section I.1.4 et aussi [xxii, section 8]. Donc, il suffit d'étudier le système suivant :

$$\begin{cases} (P - z)u = 0 & \text{microlocalement près de } K(E_0), \\ u = 0 & \text{microlocalement près de tout point } \Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0), \end{cases}$$

Pour la première étape, nous utilisons le fait que nous sommes loin des pseudo-résonances donc le théorème I.3 de propagation des singularités est valide et nous montrons que toute solution polynomialement bornée u de l'équation précédente est nulle microlocalement près de $K(E_0)$. Donc pas de résonances de P « loin » des pseudo-résonances.

La deuxième étape est constructive. Soit $\nu \in \{\mu_k; k \in \mathbb{N}\}$. Les μ_k sont définies dans la sous-section I.1.5. Nous montrons que pour h suffisamment petit, P admet au moins une résonance dans le disque $D(z_\nu, \varepsilon h)$ avec $z_\nu = E_0 - ih\nu - ih \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} \in \mathbf{Res}_0(P)$. En effet, nous produisons une « fonction test » v et prouvons que

$$\oint_{\partial D(z_\nu, \varepsilon h)} (z - P_\theta)^{-1} v dz \neq 0,$$

montrant que la résolvante $(P_\theta - z)^{-1}$ ne peut pas être analytique près de z_ν . Le choix de la « fonction test » est comme suit :

Nous commençons par faire un choix bien adapté de la condition initiale u_0 , c.-à-d. prendre une distribution lagrangienne dont la variété lagrangienne associée est transverse à Λ_- -la variété stable associée au point critique hyperbolique $(0, 0)$ - le long d'une trajectoire entrante γ_ν déterminée par ν d'une manière assez précise. Puis nous résolvons le problème de Cauchy microlocal correspondant ci-dessus pour des énergies z très proche de z_ν , en utilisant le théorème I.4. En effectuant l'intégration en z le long d'un petit contour autour z_ν , nous obtenons le développement asymptotique de $\Pi_{z_\nu} u_0$, où Π_{z_ν} est le projecteur spectral associé à z_ν , donné par (I.3). Le terme principal par rapport à h provient de la singularité de la fonction Γ dans (I.31). \square

Le théorème précédent donne l'asymptotique des résonances modulo $o(h)$. Dans certains cas, il est possible de prouver un développement asymptotique complet en puissance en-

tière de h . Dans cette direction, nous présentons le résultat suivant qui est similaire à la proposition 0.3 de J. Sjöstrand [Sjö87].

Notation : Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, notons $z_0(\alpha, h) = E_0 - ih \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})$ la pseudo-résonance correspondante.

Commençons par définir la notion de *simplicité* pour les pseudo-résonances. Nous disons qu'une pseudo-résonance $z_0(\alpha, h)$ est *simple* si,

$$z_0(\alpha, h) = z_0(\alpha', h) \implies \alpha = \alpha'. \quad (\text{I.33})$$

Proposition I.6 (asymptotique modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$). *Nous supposons que les hypothèses (A.I.1), (A.I.2) et (A.I.5) sont vérifiées. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que la pseudo-résonance correspondante $z_0(\alpha, h)$ est simple. Alors, ils existent $\delta > 0$ et $z_\infty(h)$ vérifiant $z_\infty(h) \simeq E_0 + E_1 h + E_2 h^2 + \dots$ comme développement asymptotique complet avec $E_1 = -i \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})$ et*

$$\text{dist} \left(\mathbf{Res}(P), \{z_\infty(h)\} \right) = \mathcal{O}(h^\infty),$$

dans $D(z_\infty(h), \delta h)$. De plus, pour tout $N > 0$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, il existe $M > 0$ tel que

$$\left\| \chi(P - z)^{-1} \chi \right\| \leq h^{-M},$$

uniformément pour h suffisamment petit et $z \in D(z_\infty(h), \delta h) \setminus D(z_\infty(h), h^N)$.

Le développement asymptotique de $z_\infty(h)$ en puissance de h n'est connu que par une relation implicite.

Croquis de la démonstration de la proposition I.6 : Soit $\alpha^0 \in \mathbb{N}^d$ tel que la pseudo-résonance correspondante $z_0(\alpha^0, h) = E_0 - ih \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j^0 + \frac{1}{2})$ est simple.

D'après le théorème précédent nous savons déjà que pour $\delta > 0$ suffisamment petit, tous les résonances z dans $D(z_0(\alpha^0, h), 2\delta h)$ vérifient $z = z_0(\alpha^0, h) + o(h)$ et donc il y a au moins une de ces résonances. Pour obtenir la proposition, il suffit de construire $z_\infty(h)$ et de montrer que pour tout $N > 0$, l'opérateur P n'a pas de résonances plus une estimation de sa résolvante tronquée dans $D(z_\infty(h), \delta h) \setminus D(z_\infty(h), h^N)$ pour h petit. Comme pour le théorème de propagation des singularités, on montre qu'une fonction résonante u est une distribution lagrangienne associée à Λ_+ près de $(0, 0)$. Donc $u(x, h) = a(x, h)e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x)}$ microlocalement près de $(0, 0)$ pour un certain symbole $a \in S(h^{-B})$ avec $B \in \mathbb{R}$. De plus a vérifie l'équation de transport provenant de la projection du problème de Cauchy microlocal sur la structure lagrangienne de Λ_+ . L'équation de transport obtenue est « dégénérée » pour $\alpha = \alpha_0$ en utilisant cette propriété, nous nous ramenons à résoudre l'équation $\mathcal{G}(z, h) = 0$, avec $\mathcal{G}(z, h)$ holomorphe dans $D(z_0(\alpha^0, h), \nu h)$ et \mathcal{C}^∞ en $h \in [-1, 1]$ tel que $\mathcal{G}(z, h) \simeq \sum_{k \geq 0} h^k \mathcal{G}_k(z)$ quand $h \rightarrow 0$, avec $\mathcal{G}_0(z, h) = \frac{i}{h}(z - z_0(\alpha^0, h))$. Le résultat est obtenu par le théorème des fonctions implicites appliqué à \mathcal{G} . \square

Remarque I.7. Dans le cas analytique, la distribution semi-classique des résonances engendrées par un sommet est bien connue, voir [Sjö87] (et aussi [BCD87] avec une condition de viriel). Les auteurs prouvent qu'il y a une bijection b_h entre l'ensemble des pseudo-résonances et celui des résonances. En particulier, si $z_0(\alpha)$ est une pseudo-résonance simple alors $b_h(z_0(\alpha))$ est une résonance simple de P . Cette bijection b_h est prouvée à l'aide de la méthode basée sur le problème de Grushin.

Dans le cas non-globalement analytique, par la méthode que nous utilisons -en comparant plutôt les ensembles « globalement »- nous n'avons pas d'informations précises concernant la multiplicité des résonances, sauf des minoration dans certains cas. Entre autre dans le cas où $z_0(\alpha)$ est une pseudo-résonance simple nous ne pouvons pas dire que la résonance correspondante $z_\infty(h)$ donnée par le théorème I.6 est simple.

Rappelons la définition d'un état résonant de P . Soit $z \in \mathcal{C}_\theta \cap \mathbf{Res}(P)$. Nous disons que $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ est un état résonant de P associé à la résonance z si et seulement si $(P_\theta - z)u = 0$. Voir [xxii, section 7]. Dans la preuve du théorème I.5, nous obtenons le résultat sur le développement asymptotique des états résonants suivant :

Proposition I.8 (Description des états résonants). Nous gardons les mêmes hypothèses du théorème I.5. Nous fixons $\theta = h|\ln h|$. Soit $u = u(h)$ une famille d'états résonants normalisés associés à une résonance $z = z(h) \in D(E_0, Ch)$. Alors, il existe $a \in S(h^{-M})$ avec $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x, h) = a(x, h)e^{i\varphi_+(x)/h} \text{ microlocalement près de } (0, 0).$$

De plus, le symbole a satisfait près de 0 l'équation de transport suivante :

$$2\nabla\varphi_+(x) \cdot \nabla a(x, h) + \left(\Delta\varphi_+(x) - i\frac{z - E_0}{h} \right) a(x, h) - ih\Delta a(x, h) \in S(h^\infty). \quad (\text{I.34})$$

Nous pouvons aussi montrer que a n'est pas microlocalement nulle près de 0. Dans le cas des pseudo-résonances simples, l'équation de transport (I.34) peut être utilisé pour prouver que a admet un développement asymptotique complet en puissance de h avec une formule explicite du terme principal en 0.

I.3 Projecteur Spectral et groupe de Schrödinger

Dans toute cette section, nous supposons que le potentiel V vérifie l'hypothèse suivante :

(A.I.1)_g Le potentiel V admet une extension analytique dans

$$\mathcal{S}_g = \{X \in \mathbb{C}^d; |\operatorname{Im} X| < (\tan \theta_0)\langle \operatorname{Re} X \rangle\}$$

pour un certain θ_0 positif. Ici $\langle x \rangle = (1 + |x|)^{\frac{1}{2}}$.

De plus, nous supposons que $\lim_{|X| \rightarrow +\infty, X \in \mathcal{S}_g} V(X) = 0$.

Dans ce cas c.-à-d. où le potentiel V est globalement analytique dans un voisinage près de \mathbb{R}^d , la distribution des résonances près du sommet global E_0 de V est bien connue et elle est donnée par le résultat suivant :

Théorème I.9 ([BCD87, Sjö87]). *Nous supposons que les hypothèses (A.I.1)_g, (A.I.2) et (A.I.5) sont vérifiées. Soit C une constante positive (indépendante de h) telle que $C \neq \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. Alors, dans $D(E_0, Ch)$, il existe une bijection*

$$b_h : \mathbf{Res}_0(P) \cap D(E_0, Ch) \longrightarrow \mathbf{Res}(P) \cap D(E_0, Ch),$$

tel que $b_h(E) = E + o(h)$.

Nous remarquons que le nombre de résonances dans tout disque de la forme $D(E_0, Ch)$ est borné, avec $C > 0$ et $C \neq \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

En particulier, si E_α^0 est une pseudo-résonance simple, alors, la résonance correspondante $E_\alpha := b_h(E_\alpha^0)$ est simple pour h suffisamment petit (c.-à-d. sa multiplicité est un), et elle admet un développement asymptotique complet en puissance entière de h dont le terme principal est E_α^0 .

Dans ce cadre, nous présentons deux applications, une formule explicite en puissance de h du projecteur spectral associé à une (pseudo-)résonance simple et le comportement du semi-groupe d'évolution de l'opérateur de Schrödinger en temps grand associé.

I.3.1 Projecteur spectral associé à une résonance simple engendrée par un sommet

Soit P l'opérateur de Schrödinger semi-classique donné par (I.1). Le résultat suivant décrit le comportement du projecteur spectral associé à une (pseudo-)résonance simple.

Théorème I.10 ([ix, Theorem 4.1]). *Nous supposons que les hypothèses (A.I.1)_g, (A.I.2) et (A.I.5) sont vérifiées. Soit $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $E_\beta = b_h(E_\beta^0) \in \mathbf{Res}(P)$ est une (pseudo-)résonance simple. Alors, en tant qu'opérateur de $L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, nous avons*

$$\Pi_{E_\beta} = c(h) \langle \cdot, \overline{f_\beta} \rangle f_\beta, \quad (\text{I.35})$$

avec

$$c(h) = h^{-|\beta| - \frac{d}{2}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(|\beta| + \frac{d}{2})}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \beta!} \prod_{j=1}^d \lambda_j^{\beta_j + \frac{1}{2}}, \quad (\text{I.36})$$

et la fonction $f_\beta(x, h)$ possède les propriétés suivantes :

- (i) elle est localement uniformément dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, c.-à-d. $\forall \chi \in \mathcal{C}_0^\infty$, $\|\chi f_\beta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim 1$,
- (ii) elle est solution de $P f_\beta = E_\beta f_\beta$,
- (iii) elle est sortante (c.-à-d. microlocalement nulle près de tout point $\rho = (x, \xi)$ avec $|x| \gg 1$, $\cos(x, \xi) < -\frac{1}{2}$).

(iv) De plus, $f_\beta = d^\beta(x, h)e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x)}$ microlocalement près de $(0, 0)$, où $d^\beta(x, h) \in S(1)$ est un symbole classique vérifiant

$$d^\beta(x, h) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} d_j^\beta(x) h^j \quad \text{et} \quad d_0^\beta(x) = x^\beta + \mathcal{O}(|x|^{|\beta|+1}).$$

Rappelons que $E_\beta^0 := E_0 - ih \sum_{j=1}^d \lambda_j(\beta_j + \frac{1}{2})$, pour tout $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$.

Croquis de la démonstration du théorème I.10 : Nous commençons par choisir une courbe hamiltonienne de la variété stable associée au point critique hyperbolique $(0, 0)$, Λ_- . L'existence d'une telle courbe est due à la propriété \mathbf{m} -développable des courbes hamiltoniennes rentrantes (quand $t \rightarrow +\infty$) et que la pseudo-résonance E_β^0 est simple. Notons cette courbe $\gamma_\beta \in \Lambda_-$. Maintenant, nous faisons un choix bien adapté de la condition initiale u_0 , c.-à-d. prendre une distribution lagrangienne dont la variété lagrangienne associée est transverse à Λ_- le long de la courbe hamiltonienne γ_β . Puis nous résolvons le problème de Cauchy microlocal correspondant pour des énergies z très proche de $E_\beta = b_h(E_\beta^0)$, en utilisant le théorème I.4. En effectuant l'intégration en z le long d'un petit contour autour de $E_\beta = b_h(E_\beta^0)$, nous obtenons le développement asymptotique de $\Pi_{E_\beta} u_0$, où Π_{E_β} est le projecteur spectral associé à E_β , donné par (I.3). Le terme principal par rapport à h provient de la singularité de la fonction Γ dans (I.31). En particulier, nous obtenons toutes les propriétés indiquées pour f_β . Enfin, le coefficient $c(h)$ découle du calcul de $\langle u_0, \bar{f}_\beta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. \square

Dans la situation d'un « puits dans l'isle » ponctuel, le projecteur spectral généralisé a été calculé par B. Helffer et J. Sjöstrand [HS86], en particulier, les auteurs ont prouvé que cet opérateur est presque orthogonal. En effet, si la résonance z est isolée et la fonction troncature $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est égale à 1 près du puits, alors $\chi \Pi_z \chi$ est exponentiellement proche du projecteur spectral associé au problème de Dirichlet correspondant et $\|\chi \Pi_z \chi\| = 1 + \mathcal{O}(e^{-\frac{C}{h}})$ avec un certain $C > 0$. Dans le cas des résonances générées par un sommet la situation est très différente puisque la norme du projecteur tronqué est d'ordre $h^{-|\beta| - \frac{d}{2}}$, c.-à-d. pour $\chi \in \mathcal{C}^\infty$, $\chi \neq 0$, $\|\chi \Pi_{E_\beta} \chi\| \sim h^{-|\beta| - \frac{d}{2}}$. Par conséquent, le projecteur n'est pas borné et sa norme dépend de la résonance.

I.3.2 Comportement en temps grand du groupe de Schrödinger

Nous considérons le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, x) = P\psi(s, x), \\ \psi(0, x) = \psi_0(x). \end{cases}$$

Nous désignons la solution $\psi(s, x)$ par $e^{-\frac{i}{h}sP} \psi_0$. L'opérateur $e^{-\frac{i}{h}sP}$ est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous voulons décrire le comportement en temps grand du groupe de Schrödinger en

fonction d'objets spectraux. Commençons par rappeler la description de cet objet dans le cas de valeurs propres isolées. Soit E^* une valeur propre isolée de P (notons N_0 sa multiplicité, finie), alors pour tout $\psi(E) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ supporté près de E^* , nous avons

$$e^{-\frac{i}{\hbar}sP}\psi(P) = e^{-\frac{i}{\hbar}sE^*}\Pi_{E^*}\psi(E^*), \quad (\text{I.37})$$

où Π_{E^*} est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à E^* engendré par une base orthonormée de fonctions propres $\{f_j\}_{j=1, \dots, N_0}$,

$$\Pi_{E^*} = \sum_{j=1}^{N_0} \langle \cdot, f_j \rangle f_j. \quad (\text{I.38})$$

Ici $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$, pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Grosso modo, comme expliqué dans l'introduction générale, les résonances sont associées aux états métastables. Formules de type (I.37), (I.38) impliqueraient en particulier qu'un état métastable se désintègre comme $e^{-\frac{|\text{Im } z_0|}{\hbar}t}\Pi_{z_0}$ pour une résonance z_0 . C'est pourquoi l'inverse de la *largeur* de la résonance $|\text{Im } z|$ est considéré pour décrire la durée de vie de la particule quantique piégée. Nous remarquons que le projecteur Π_{z_0} n'est pas orthogonal et sa norme n'est pas nécessairement 1.

Dans le cas des résonances générées par un sommet, nous avons, en utilisant la description du projecteur du théorème précédent,

Théorème I.11 ([ix, Theorem 6.1]). *Nous supposons que les hypothèses (A.I.1)_g, (A.I.2) et (A.I.5) sont vérifiées. Soit C une constante positive telle que $C \neq \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. Alors, pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et toute application $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée dans un petit voisinage de E_0 , il existe $K = K(C) > 0$ tel que pour tout $s \geq 0$, nous avons quand $h \rightarrow 0$,*

$$\chi e^{-\frac{i}{\hbar}sP}\chi\psi(P) = \sum_{E_\alpha \in \mathbf{Res}(P) \cap D(E_0, Ch)} \chi \text{Residue}_{E_\alpha} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}sE} R_+(z) \right) \chi\psi(P) + \mathcal{O}(h^\infty) + \mathcal{O}(e^{-Cs}h^{-K}). \quad (\text{I.39})$$

En particulier, si tous les pseudo-résonances dans $D(E_0, Ch)$ sont simples, nous avons, pour tout $s \geq 0$, et quand $h \rightarrow 0$,

$$\chi e^{-\frac{i}{\hbar}sP}\chi\psi(P) = \sum_{E_\alpha \in \mathbf{Res}(P) \cap D(E_0, Ch)} e^{-\frac{i}{\hbar}sE_\alpha} \chi \Pi_{E_\alpha} \chi\psi(P) + \mathcal{O}(h^\infty) + \mathcal{O}(e^{-Cs}h^{-K}). \quad (\text{I.40})$$

Ici Π_{E_α} est le projecteur spectral donné par (I.3) et $R_+(z)$ est le prolongement méromorphe de la résolvante $(z - P)^{-1}$ en tant qu'opérateur de $L_{\text{comp}}^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$ à partir du demi-plan supérieur vers \mathcal{C}_θ à travers $[0, +\infty[$.

Croquis de la démonstration du théorème I.11 : La preuve repose essentiellement sur une estimation polynomiale -par rapport au paramètre h^{-1} - de la résolvante de l'opérateur « distordu » P_θ autour des résonances. En effet, supposons que le potentiel V vérifie les hypothèses (A.I.1)_g, (A.I.2) et (A.I.5), nous avons prouvé dans [iv], l'estimation suivante :

$$\|(z - P_\theta)^{-1}\| \lesssim h^{-C(\mu)} \prod_{z_\alpha \in \text{Res}(P) \cap D(E_0, 2\mu h)} |z - z_\alpha|^{-1}, \quad (\text{I.41})$$

pour $z \in [E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon] + i[-\mu h, \mu h]$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ petit.

Cette estimation nous permet de faire du calcul h -pseudo-différentiel. Des estimations similaires autour des résonances sont obtenues dans diverses situations, voir par exemple Gérard [Gér88] pour le cas de deux obstacles strictement convexes. Pour prouver ce résultat nous utilisons des estimations d'énergie développées par A. Martinez [Mar02b], J. Sjöstrand [Sjö97] et S-H. Tang et M. Zworski [TZ98]. Plus un ingrédient très important dû au calcul h -pseudo-différentiel, le suivant : soient $f(\lambda), g(\lambda) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset \implies f(P)\chi g(P) = \mathcal{O}(h^\infty), \quad (\text{I.42})$$

où $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Fort de ces deux arguments, nous pouvons donner un peu plus de détails : Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty([E_0 - \frac{\epsilon}{2}, E_0 + \frac{\epsilon}{2}])$, $\psi \equiv 1$ sur $[E_0 - \frac{\epsilon}{4}, E_0 + \frac{\epsilon}{4}]$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Nous calculons maintenant $I := \chi e^{-\frac{i}{h}sP} \chi \psi(P)$. Par la propriété I.42, nous avons

$$I = \chi e^{-\frac{i}{h}sP} f(P)\chi \psi(P) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

pour toute fonction troncature $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f \equiv 1$ on $[E_0 - 2\epsilon, E_0 + 2\epsilon]$. Soit E_λ la décomposition spectrale associée à l'opérateur autoadjoint P . Alors

$$\chi e^{-\frac{i}{h}sP} f(P)\chi \psi(P) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{h}s\lambda} f(\lambda) \chi dE_\lambda \chi \psi(P).$$

La formule de Stone donne,

$$dE_\lambda = \frac{1}{2i\pi} \left((P - (\lambda + i0))^{-1} - (P - (\lambda - i0))^{-1} \right) d\lambda,$$

donc,

$$\chi e^{-\frac{i}{h}sP} f(P)\chi \psi(P) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda/h} f(\lambda) \chi (R_+(\lambda) - R_-(\lambda)) \chi d\lambda \psi(P),$$

où $R_\pm(z) = (z - P)^{-1}$ est analytique pour $\pm \text{Im } z > 0$.

Maintenant nous modifions le contour \mathbb{R} en l'union des intervalles suivants⁷ :

$$\Gamma_1 = (-\infty, E_0 - \epsilon], \quad \Gamma_5 = [E_0 + \epsilon, +\infty),$$

7. Les contours Γ_j , $j = 1, 2, 3, 4, 5$ sont illustrés dans la figure I.8.

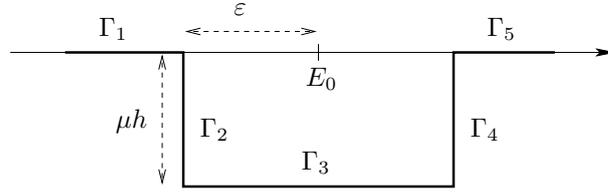


Figure I.8 – Les contours Γ_j , $j = 1, \dots, 5$.

$$\Gamma_2 = (E_0 - \epsilon) + i[0, -C'h], \quad \Gamma_4 = (E_0 + \epsilon) + i[-C'h, 0],$$

et

$$\Gamma_3 = [E_0 - \epsilon, E_0 + \epsilon] - iC'h,$$

où nous choisissons C' de telle sorte que $C' \neq \sum_{j=1}^d (\alpha_j + \frac{1}{2}) \lambda_j$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et nous posons

$$I_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} e^{-itz/h} f(z) \chi(R_+(z) - R_-(z)) \chi dz \psi(P) \quad (j = 1, 5),$$

$$I_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} e^{-itz/h} \chi(R_+(z) - R_-(z)) \chi dz \psi(P) \quad (j = 2, 3, 4), \quad f(z) = 1 \text{ pour } z \in \Gamma_j.$$

Par le théorème des résidus, nous obtenons

$$I = \sum_{z\beta \in \mathbf{Res}(P) \cap \Omega(\epsilon, C'h)} \chi \mathbf{Res}_{z\beta} \left(e^{-\frac{i}{h}sz} R_+(z) \right) \chi \psi(P) - \sum_{j=1}^5 I_j,$$

où $\Omega(\epsilon, C'h)$ est le rectangle délimité par Γ_j , $j = 2, 3, 4$ et le réel, voir figure I.8. Ici nous avons utilisé le fait que $R_-(z)$ est holomorphe dans $\Omega(\epsilon, C'h)$. La somme dans la partie de droite de l'identité précédente coïncide avec le terme correspondant dans la formule (I.39) en utilisant l'estimation (I.41).

Enfin, par le calcul h -pseudo-différentiel -essentiellement la propriété (I.42)- nous avons :

$$I_1, I_5 = \mathcal{O}(h^\infty) \quad \text{et} \quad I_2, I_4 = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Ici nous utilisons le fait que le support de ψ est à distance strictement positive de la partie réelle de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$. De plus,

$$\|I_3\| = \int_{\Gamma_3} |e^{-\frac{i}{h}sz}| |\chi(R_+(z) - R_-(z)) \chi| dz = \mathcal{O}(e^{-C's} h^{-K'}),$$

en tant qu'opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Le terme exponentiel dans l'estimation précédente vient du terme $|e^{-\frac{i}{h}sz}|_{\Gamma_3}$. Notons que l'estimation sur la résolvante est pertinente puisqu'elle garantit que la résolvante $R_+(z)$ (et aussi $R_-(z)$) croît au plus polynomialement par rapport à h^{-1} sur les contours (bien sûr près de E_0). \square

Remarque I.12. (i) Nous avons remarqué dans le Théorème I.10 que la norme du projecteur tronqué $\chi \Pi_{E_\alpha} \chi$ est d'ordre $\sim h^{-|\alpha| - \frac{d}{2}}$ lorsque E_α^0 est simple. Puisque,

$|e^{-\frac{i}{h}sE_\alpha}| = e^{-\frac{s}{h}|\text{Im} E_\alpha|} \sim e^{-s \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})}$ pour $E_\alpha \in \mathbf{Res}(P) \cap D(E_0, Ch)$, le terme indexé par α dans la somme de (I.40) est plus grand que l'erreur pour

$$s \geq \frac{K - \frac{d}{2} - |\alpha|}{C - \sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})} \ln\left(\frac{1}{h}\right) + \text{Cte.} \quad (\text{I.43})$$

(ii) Si $\{\lambda_j\}_{j=1}^d$ sont \mathbb{Z} -indépendants, alors tous les (pseudo)-résonances sont simples et (I.40) est valide pour tout C différent de $\sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})$, $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

I.4 Commentaires et suite

Nous présentons un résultat en collaboration avec T. Watanabe concernant la probabilité de transition pour de multiples croisements évités avec un petit écart dans le cas où le potentiel est analytique dans un certain voisinage complexe de \mathbb{R} . La géométrie près des zéros non-dégénérés du potentiel est la même que celle donnée par un point fixe hyperbolique en dimension 1. Donc par le théorème I.4 notre résultat peut être généraliser au cas où le potentiel est non-globalement analytique.

Commençons par introduire le modèle. Nous considérons l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$ih \frac{d}{dt} \psi(t) = H(t; \varepsilon) \psi(t), \quad \text{où} \quad H(t; \varepsilon) := \begin{pmatrix} W(t) & \varepsilon \\ \varepsilon & -W(t) \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Le potentiel W est une fonction à valeurs réelles sur \mathbb{R} et $\psi(t) = {}^t(\psi_1(t), \psi_2(t)) \in \mathbb{C}^2$. Ici h est un paramètre semi-classique et ε est l'ordre de l'écart au point du croisement évité. La matrice $H(t; \varepsilon)$ a deux valeurs propres réelles $\lambda_\pm(t; \varepsilon) := \pm \sqrt{W(t)^2 + \varepsilon^2}$ et le trou spectral entre ces deux valeurs propres $g(t; \varepsilon) := \lambda_+ - \lambda_- \geq 2\varepsilon$ est strictement positive pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons que $g(t_0; \varepsilon) = 2\varepsilon$ si et seulement si $W(t_0) = 0$. Donc le point $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $W(t_0) = 0$ (s'il existe) joue un rôle très particulier.

Nous voulons étudier la probabilité de transition entre les énergies du système ci-dessus, $\lambda_\pm(t; \varepsilon)$. Dans ce cadre le résultat type est la formule de Landau-Zener, c.-à-d. la probabilité de transition est donnée par $\mathbb{P}(\varepsilon; h) = \exp\left(-\frac{\pi \varepsilon^2}{vh}\right)$, pour $W(t) := vt$ ($v > 0$), voir [Zen32]. De cette formule, la probabilité de transition tend vers 1 quand $\varepsilon \downarrow 0$, tandis qu'elle décroît exponentiellement quand $h \downarrow 0$. La généralisation de la formule de Landau-Zener par rapport à $h \downarrow 0$ pour un ε fixé a été étudiée par plusieurs d'auteurs, voir [HJ06] et les références qui y sont données. En particulier dans [JMP91] A. Joye, G. Milet et

C-E. Pfister utilisent la méthode BKW complexe pour de multiples croisements évités et A. Martinez dans [Mar94] utilise plutôt l'approche microlocale. Remarquons que l'effet adiabatique ($h \downarrow 0$) et l'effet d'interaction ($\varepsilon \downarrow 0$) jouent des rôles « opposés » dans la probabilité de transition.

Dans [xiii], nous étudions le comportement asymptotique de la probabilité de transition lorsque les deux paramètres h et ε tendent vers 0 simultanément, dans le cas où le potentiel W est à courte portée (modulo une constante additive), globalement analytique dans un certain voisinage du réel et admet un nombre fini de zéros non-dégénérés (≥ 2), c.-à-d. $W(t_k) = 0$ et $W'(t_k) \neq 0$ pour $k = 1 \cdots, n$ avec $n \geq 2$. La formule de Landau-Zener -dans le cas W linéaire- indique que le rapport entre h et ε^2 doit être crucial.

Plus précisément, il y a trois cas, comme dans [CdVLP99] (voir aussi [Rou04]) :

Cas n° 1 : $(\varepsilon, h) \downarrow (0, 0)$ et $\frac{h}{\varepsilon^2} \downarrow 0$. Ce régime a été traité dans [Joy94] quand W s'annule en un seul point ($n = 1$), mais pour des Hamiltoniens plus généraux. Dans [xiii] nous obtenons une petite extension de ce résultat dans notre cadre plus simple mais avec de multiple croisements évités ($n \geq 2$), en utilisant la méthode WKB exacte, développée par C. Gérard et A. Grigis (voir [GG88]). Notons que T. Watanabe a traité le cas où W a un zéro dégénéré, le comportement asymptotique obtenu dépend fortement de l'ordre de la dégénérescence, voir [Wat06].

Cas n° 2 : $(\varepsilon, h) \downarrow (0, 0)$ et $\frac{h}{\varepsilon^2} \sim C$ où C est une constante strictement positive. Ce cas a été étudié par G-A. Hagedorn où le cadre considéré est plus général que le modèle Landau-Zener et le résultat est une extension naturelle de la formule de Landau-Zener dans le cas d'un seul croisement non-dégénéré évité. Voir [Hag91, page 435, Formule (1.7)]. La preuve est essentiellement basée sur les propriétés des fonctions de Weber, dites aussi « parabolic cylinder functions », comme dans l'article de Zener.

Cas n° 3 : $(\varepsilon, h) \downarrow (0, 0)$ et $\frac{\varepsilon^2}{h} \downarrow 0$. Ce régime est notre principal intérêt dans [xiii]. Ce cas est beaucoup plus compliqué que les autres. En effet les constructions BKW ne marche plus près des zéros, t_k , de W car les points tournants correspondants, $\zeta_k \sim t_k + i \frac{\varepsilon}{W'(t_k)}$ et $\bar{\zeta}_k$ ($\varepsilon \downarrow 0$), s'écrasent très vite sur t_k quand $\frac{\varepsilon^2}{h} \downarrow 0$. Pour pallier à ce défaut, nous décomposons la matrice de diffusion (scattering) en un produit de matrices de transfert mettant en évidence le passage par les zéros du potentiel W . Puis, nous utilisons une forme normale près de ces zéros non-dégénérés de W (voir [HS89]) dont nous connaissons les solutions dites microlocales ainsi que leurs propriétés, essentiellement l'ensemble de fréquences correspondant, ce qui nous permet de les connecter au solutions BKW dans un certain voisinage dicté par le sous-régime que nous regardons.

En effet nous avons deux sous-régimes dans le **Cas n° 3** :

- 3.1. Dans le cas où $\varepsilon = \mathcal{O}(h)$, nous pouvons recoller les solutions microlocales avec celles BKW correspondantes dans un $\mathcal{O}(1)$ -voisinage (indépendant du paramètre

h) des zéros de W , en utilisant la stratégie développée par S. Fujiié, C. Lasser et L. Nédélec dans [FLN09].

3.2. Dans le cas où $h \ll \varepsilon \leq o(\sqrt{h})$, la situation est plus critique, nous faisons le recollement des solutions dans un anneau d'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ autour des zéros de W . Donc une certaine uniformité par rapport à h est requise à chaque étape et le paramètre semi-classique dans ce cas est $\mu := \frac{\varepsilon}{\sqrt{h}}$.

Dans les deux sous cas, nous montrons que le développement asymptotique de la probabilité de transition dépend de la parité du nombre de zéros du potentiel W et nous donnons une formule explicite du pré-facteur $C_n(h)$ de $\frac{\varepsilon^2}{h}$. De plus, nous dérivons une sorte de condition de quantification à la Bohr-Sommerfeld lorsque le pré-facteur $C_n(h)$ s'annule.

Nous terminons cette section par exposer le résultat du **Cas n^{os} 1 et 3**. Supposons que :

(A.I.6) Le potentiel W est \mathcal{C}^∞ à valeurs réelles sur \mathbb{R} et admet une extension analytique dans le secteur $\mathcal{S} = \{t \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im} t| < \langle \operatorname{Re} t \rangle \tan \alpha_0\}$, pour certains $\alpha_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(A.I.7) Il existe deux constantes non-nulles E_r, E_l et $\delta > 1$ tels que

$$W(t) = \begin{cases} E_r + \mathcal{O}(|t|^{-\delta}) & \text{as } \operatorname{Re} t \rightarrow +\infty \text{ in } \mathcal{S}, \\ E_l + \mathcal{O}(|t|^{-\delta}) & \text{as } \operatorname{Re} t \rightarrow -\infty \text{ in } \mathcal{S}. \end{cases}$$

Sous la condition d'analyticité **(A.I.6)** et l'hypothèse **(A.I.7)**, nous prouvons l'existence de quatre solutions de Jost $J_\pm^r(t)$ et $J_\pm^l(t)$ entièrement définies par les conditions asymptotiques :

$$\begin{aligned} J_+^r(t) &\sim \exp\left[+\frac{i}{h}\sqrt{E_r^2 + \varepsilon^2 t}\right] \begin{pmatrix} -\sin \theta_r \\ \cos \theta_r \end{pmatrix} && \text{quand } \operatorname{Re} t \rightarrow +\infty \text{ dans } \mathcal{S}, \\ J_-^r(t) &\sim \exp\left[-\frac{i}{h}\sqrt{E_r^2 + \varepsilon^2 t}\right] \begin{pmatrix} \cos \theta_r \\ \sin \theta_r \end{pmatrix} && \text{quand } \operatorname{Re} t \rightarrow +\infty \text{ dans } \mathcal{S}, \end{aligned}$$

où $\tan 2\theta_r = \frac{\varepsilon}{E_r}$, ($0 < \theta_r < \frac{\pi}{2}$) et des formules similaires pour $J_\pm^l(t)$ quand $\operatorname{Re} t \rightarrow -\infty$ in \mathcal{S} . Les couples des solutions de Jost (J_+^r, J_-^r) et (J_+^l, J_-^l) sont des bases orthonormées de \mathbb{C}^2 pour tout t fixé.

Définition I.13. La matrice de diffusion (Scattering) S est définie comme la matrice de passage d'une base de solutions de Jost vers la deuxième :

$$\begin{pmatrix} J_+^l & J_-^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_+^r & J_-^r \end{pmatrix} S(\varepsilon; h), \quad S(\varepsilon; h) = \begin{pmatrix} s_{11}(\varepsilon; h) & s_{12}(\varepsilon; h) \\ s_{21}(\varepsilon; h) & s_{22}(\varepsilon; h) \end{pmatrix}.$$

La matrice S est unitaire indépendante de t . Alors $|s_{11}(\varepsilon; h)|^2 + |s_{21}(\varepsilon; h)|^2 = 1$. De plus, les coefficients de S vérifient : $s_{11}(\varepsilon; h) = \overline{s_{22}(\varepsilon; h)}$ et $s_{12}(\varepsilon; h) = -s_{21}(\varepsilon; h)$.

Définition I.14. La probabilité de transition $\mathbb{P}(\varepsilon; h)$ est définie par :

$$\mathbb{P}(\varepsilon; h) := |s_{21}(\varepsilon; h)|^2 = |s_{12}(\varepsilon; h)|^2.$$

Nous supposons que

(A.I.8) Le potentiel W possède un nombre fini de zéros $t_1 > \cdots > t_n$ ($n \geq 1$) dans \mathbb{R} et chaque zéro est non-dégénéré. C'est-à-dire pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $W(t_k) = 0$ et $W'(t_k) \neq 0$.

Nous posons $v_k := |W'(t_k)| > 0$ pour $k = 1, \dots, n$ et supposons que $W'(t_1) > 0$ sans perte de généralité. Le signe de $W(t)$ pour $t < t_n$ change en fonction de la parité de n .

Pour chaque k ($k = 1, \dots, n$), il existe deux points tournants $\zeta_k(\varepsilon)$ et $\overline{\zeta_k(\varepsilon)}$, les zéros simples dans \mathcal{S} de $2\sqrt{-\det H(t; \varepsilon)}$ proche de t_k , où $\det H(t; \varepsilon) := -W(t)^2 - \varepsilon^2$, dont l'asymptotique est $\zeta_k(\varepsilon) \sim t_k + \frac{i}{v_k} \varepsilon$ quand $\varepsilon \downarrow 0$.

Pour $k = 1, \dots, n$ l'action $A_k(\varepsilon)$ est donnée par :

$$A_k(\varepsilon) = 2 \int_{t_k}^{\zeta_k(\varepsilon)} \sqrt{W(t)^2 + \varepsilon^2} dt, \quad (\text{I.44})$$

où chaque chemin d'intégration est le segment complexe de t_k à $\zeta_k(\varepsilon)$ et la détermination de la racine carrée est donnée par ε au point $t = t_k$. Pour cette détermination $\text{Im} A_k(\varepsilon) = \frac{\pi \varepsilon^2}{2v_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ est positive. Ces actions sont indépendantes de h .

Nous pouvons maintenant annoncer le résultat correspondant au **Cas n° 1**.

Proposition I.15. Les hypothèses **(A.I.6)**—**(A.I.8)** sont vérifiées. Alors la probabilité de transition $\mathbb{P}(\varepsilon; h)$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(\varepsilon; h) = \left| \sum_{k \in \Lambda} (-1)^k e^{\frac{i}{h}(A_k(\varepsilon) - R_{1,k}(\varepsilon))} \right|^2 + \mathcal{O} \left(\frac{h}{\varepsilon^2} e^{-\frac{2\alpha(\varepsilon)}{h}} \right), \quad \text{quand } (\varepsilon, h) \downarrow (0, 0) \text{ et } \frac{h}{\varepsilon^2} \downarrow 0,$$

où $\alpha(\varepsilon) = \min_{k \in \Lambda} \text{Im} A_k(\varepsilon) > 0$, voir **(I.44)**, et Λ est l'ensemble des $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ dont le v_k correspondant réalise le $\max\{v_1, \dots, v_n\}$.

La proposition précédente implique que dans le **Cas 1**, c.-à-d. $(\varepsilon, h) \downarrow (0, 0)$ et $\frac{h}{\varepsilon^2} \downarrow 0$, la probabilité de transition $\mathbb{P}(\varepsilon; h)$ décroît exponentiellement et son taux de décroissance est caractérisé par le maximum des $(v_p)_{p=1, \dots, n}$. La preuve de cette proposition est basée sur la méthode BKW exacte dont les asymptotiques des solutions BKW sont valables même près des croisements évités.

Enfin, introduisons l'action de Maslov donnée par

$$R_{j,k}(\varepsilon) = 2 \int_{t_k}^{t_j} \sqrt{W(t)^2 + \varepsilon^2} dt, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k \leq n. \quad (\text{I.45})$$

Puisque $t_j \geq t_k$ pour $j \leq k$ alors $R_{j,k}(\varepsilon)$ est positive et son asymptotique est donnée par : $R_{j,k}(\varepsilon) = \mathcal{A}_{j,k} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ as $\varepsilon \downarrow 0$, où $\mathcal{A}_{j,k}$ est l'aire délimitée par le graphe de $\pm W(t)$ pour $t \in [t_k, t_j]$, c.-à-d. $\mathcal{A}_{j,k} = 2 \int_{t_k}^{t_j} |W(t)| dt$. Ces actions sont aussi indépendantes de h .

Le théorème suivant est une amélioration du théorème 2.6 de [xiii] dont le sens où les restes sont mieux contrôlés et le pré-facteur C_n de $\frac{\varepsilon^2}{h}$ dépend d'une manière très simple de h . Ce théorème correspond au **Cas n° 3**.

Théorème I.16. *Les hypothèses (A.I.6)–(A.I.8) sont vérifiées. Alors la probabilité de transition $\mathbb{P}(\varepsilon; h)$ est donnée par : Pour tout $\delta > 0$,*

$$\mathbb{P}(\varepsilon; h) = \begin{cases} 1 - C_n(h)\pi\frac{\varepsilon^2}{h} + \mathcal{O}\left(\sqrt{h}\frac{\varepsilon^2}{h}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{h}\right)^{2-\delta}\right) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ C_n(h)\pi\frac{\varepsilon^2}{h} + \mathcal{O}\left(\sqrt{h}\frac{\varepsilon^2}{h}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{h}\right)^{2-\delta}\right) & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

quand $(\varepsilon, h) \downarrow (0, 0)$ et $\frac{\varepsilon^2}{h} \downarrow 0$. Ici $C_1(h) = \frac{1}{v_1}$ et $C_n(h)$ pour $n \geq 2$ est donnée par :

$$C_n(h) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k} + 2 \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{v_k v_j}} \cos \left[\frac{2}{h} \int_{t_k}^{t_j} W(s) ds + \frac{(-1)^j - (-1)^k}{2} \frac{\pi}{2} \right]. \quad (\text{I.46})$$

Remarque I.17. (i) Lorsque $n = 1$, nous retrouvons la formule de Landau-Zener.

(ii) Le développement asymptotique de $\mathbb{P}(\varepsilon; h)$ quand $\frac{\varepsilon^2}{h} \downarrow 0$ dépend de la parité de n donc les évolutions en temps des états propres se propagent le long des potentiels $\pm W(t)$ au lieu des énergies du système $\lambda_{\pm}(t; \varepsilon)$.

(iii) Dans ce régime les v_k ne déterminent pas le taux de décroissance de la probabilité de transition. En fait, le coefficient $C_n(h)$ pour $n \geq 2$ peut s'annuler, tandis que $C_1(h) = \frac{1}{v_1}$ ne s'annule jamais. Par exemple, prenons $n = 2$ et $v_1 = v_2$. Sous l'hypothèse que le terme principal $C_2(h)$ s'annule, nous obtenons : Pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(\varepsilon; h) = \mathcal{O}\left(\sqrt{h}\frac{\varepsilon^2}{h}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{h}\right)^{2-\delta}\right)$$

quand $(\varepsilon, h) \downarrow (0, 0)$ et $\frac{\varepsilon^2}{h} \downarrow 0$. Cette hypothèse est équivalente à

$$2 \int_{t_2}^{t_1} W(s) ds = \left(-\frac{\pi}{2} + 2N\pi\right)h$$

pour un certain entier N . Nous pouvons considérer cette condition comme une condition de quantification à la Bohr-Sommerfeld.

Références bibliographiques

- [AM78] R. Abraham and J. Marsden. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, M., 1978. Second edition, revised and enlarged, With the assistance of T. Rațiu and R. Cushman.
- [BCD87] P. Briet, J.-M. Combes, and P. Duclos. On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit II : Barrier top resonances. *Comm. in Partial Differential Equations*, 2(12) :201–222, 1987.
- [BM04] J.-F. Bony and L. Michel. Microlocalization of resonant states and estimates of the residue of the scattering amplitude. *Comm. Math. Phys.*, 246(2) :375–402, 2004.
- [CdVLP99] Y. Colin de Verdière, M. Lombardi, and J. Pollet. The microlocal Landau-Zener formula. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 71(1) :95–127, 1999.
- [CdVP94a] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique. I. Concentration microlocale. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(9-10) :1535–1563, 1994.
- [CdVP94b] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique. II. Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 61(3) :347–367, 1994.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [DSZ04] N. Dencker, J. Sjöstrand, and M. Zworski. Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57(3) :384–415, 2004.
- [FLN09] S. Fujiié, C. Lasser, and L. Nédélec. Semiclassical resonances for a two-level Schrödinger operator with a conical intersection. *Asymptot. Anal.*, 65(1-2) :17–58, 2009.
- [Gér88] C. Gérard. Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes. *Mém. Soc. Math. France*, (31) :146, 1988.
- [GG88] C. Gérard and A. Grigis. Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier. *J. Differential Equations*, 72(1) :149–177, 1988.
- [GS87] C. Gérard and J. Sjöstrand. Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type. *Comm. Math. Phys.*, 108 :391–421, 1987.

- [Hag91] G. A. Hagedorn. Proof of the Landau-Zener formula in an adiabatic limit with small eigenvalue gaps. *Comm. Math. Phys.*, 136(3) :433–449, 1991.
- [HJ06] G. A. Hagedorn and A. Joye. Recent results on non-adiabatic transitions in quantum mechanics. In *Recent advances in differential equations and mathematical physics*, volume 412 of *Contemp. Math.*, pages 183–198. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Hör94] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. IV*, volume 275 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Fourier integral operators, Corrected reprint of the 1985 original.
- [HS85] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semiclassical limit. III. Interaction through nonresonant wells. *Math. Nachr.*, 124 :263–313, 1985.
- [HS86] B. Helffer and J. Sjöstrand. Résonances en limite semi-classique. *Mém. Soc. Math. France*, (24-25) :iv+228, 1986.
- [HS89] B. Helffer and J. Sjöstrand. Semiclassical analysis for Harper’s equation. III. Cantor structure of the spectrum. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (39) :1–124, 1989.
- [JMP91] A. Joye, G. Milet, and C.-E. Pfister. Interferences in adiabatic transition probabilities mediated by stokes lines. *Phys. Rev. A*, 44 :4280–4295, 1991.
- [Joy94] A. Joye. Proof of the Landau-Zener formula. *Asymptotic Anal.*, 9(3) :209–258, 1994.
- [Mar94] A. Martinez. Precise exponential estimates in adiabatic theory. *J. Math. Phys.*, 35(8) :3889–3915, 1994.
- [Mar02a] A. Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Universitext. Springer-Verlag, 2002.
- [Mar02b] A. Martinez. Resonance free domains for non globally analytic potentials. *Ann. Henri Poincaré*, 3(4) :739–756, 2002.
- [Per01] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, third edition, 2001.
- [Rob87] D. Robert. *Autour de l’approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987.
- [Rou04] V. Rousse. Landau-Zener transitions for eigenvalue avoided crossings in the adiabatic and Born-Oppenheimer approximations. *Asymptot. Anal.*, 37(3-4) :293–328, 2004.

- [Sjö87] J. Sjöstrand. Semiclassical resonances generated by nondegenerate critical points. In *Pseudodifferential operators (Oberwolfach, 1986)*, volume 1256 of *Lecture Notes in Math.*, pages 402–429. Springer, Berlin, 1987.
- [Sjö97] J. Sjöstrand. A trace formula and review of some estimates for resonances. In *Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996)*, volume 490 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 377–437. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [SZ02] J. Sjöstrand and M. Zworski. Quantum monodromy and semi-classical trace formulae. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 81(1) :1–33, 2002.
- [TZ98] S.-H. Tang and M. Zworski. From quasimodes to resonances. *Math. Res. Lett.*, 5(3) :261–272, 1998.
- [Wat06] T. Watanabe. Adiabatic transition probability for a tangential crossing. *Hiroshima Math. J.*, 36(3) :443–468, 2006.
- [Zen32] C. Zener. Non-adiabatic crossing of energy levels. *Proc. R. Soc. London A*, 137 :696–702, 1932.
- [Zwo12] M. Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

Chapitre II

Orbites homoclines/hétéroclines et asymptotiques des résonances *Un parfum*

Articles présentés dans le chapitre II

- [xxii] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Resonances for Homoclinic Trapped Sets*. Accepté le 27 avril **2018** à la revue *Astérisque*, 249 pages.
- [xx] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Quantization condition for multi-barrier resonances*. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B67 (2017)*, p. 43–53.
- [xix] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Propagation des singularités et résonances*. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 355 (**2017**), n° 8, p. 887–891.
- [xv] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *WKB Solutions Near an Unstable Equilibrium and Applications*. in *Nonlinear Physical Systems - Spectral Analysis, Stability and Bifurcations*, Editors : Oleg N. Kirillov, Dmitry E. Pelinovsky, ISTE, Wiley, (**2014**), p. 15–39.
- [xiv] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Width of resonances created by homoclinic orbits -isotropic fixed point case-*. *Spectral and Scattering Theory and Related Topics. RIMS Kôkyûroku Bessatsu B45 (2014)*, p. 31–44.
- [x] J-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri, *Semiclassical width of resonances created by homoclinic orbits*. *International Conference the 26th Matsuyama Camp, Recent Development on Partial Differential Equations, (dedicated to the 60th Birthday of Professor Yoshinori Morimoto) January 6-9, 2011, Lecture Notes*.
- [iii] S. Fujiié and M. Zerzeri, *Bohr-Sommerfeld quantization condition derived by a microlocal WKB method*. *Vietnam J. Math.* 32 (**2004**), Special Issue, p. 153–160.

Mots-clés : Résonances, analyse microlocale, analyse semi-classique, trajectoires homoclines, trajectoires hétéroclines, opérateurs de Schrödinger

Classification mathématique par matières (2010) : 35B34, 35P20, 37C29, 37C25, 35C20, 81Q20, 35S10, 35J10

II.1 Introduction et préliminaires



Dans ce chapitre, nous présentons l'asymptotique des résonances dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées est constitué d'un point fixe hyperbolique et un nombre fini d'orbites homoclines. Dans ce cas, nous mettons l'accent sur deux phénomènes remarquables, le premier concerne l'accumulation des résonances sur des courbes et décortiquer ce phénomène à l'échelle microscopique et macroscopique puis le phénomène de vibration. Nous donnons aussi la condition de quantification pour les résonances générées par un ensemble constitué d'un nombre fini de sommets avec un nombre fini d'orbites homoclines/hétéroclines dont le cadre est transcrit par le langage des graphes. Nous obtenons en général un nuage de résonances sans aucune structure, au passage nous définissons un coefficient d'amortissement (« damping ») qui délimite entre autre une zone sans résonance.

Dans le cas d'un potentiel à trois bosses en dimension 2 où les calculs sont explicites, nous montrons qu'il y a trois cas de configurations.

Nous terminons ce chapitre par la description des états résonants dans des cas très précis et des phénomènes de micro-localisation assez inhabituelles, par exemple les résonances sont données par un certain cycle du graphe alors que les états résonants correspondants sont micro-localisés dans une autre région du graphe.

Nous considérons l'opérateur de Schrödinger semi-classique sur \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) donné par

$$P = -h^2 \Delta + V(x), \quad (\text{II.1})$$

où $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = 0$. L'opérateur P est un opérateur autoadjoint, non borné de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$.

(A.II.1) Nous supposons que le potentiel V admet une extension analytique dans

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{C}^d; |\operatorname{Re} X| > C \text{ et } |\operatorname{Im} X| < (\tan \theta_0) |\operatorname{Re} X|\}$$

pour certains C et θ_0 positifs. Voir figure I.1.

De plus, on suppose que $\lim_{|X| \rightarrow +\infty, X \in \mathcal{S}} V(X) = 0$.

Nous pouvons définir les résonances de P dans un secteur autour de \mathbb{R}^+ , par distorsions analytiques à la W. Hunziker, voir la section I.1.1.

Dans tout le chapitre nous considérons des ensembles captés qui contiennent au moins un point fixe hyperbolique. Soit $E_0 > 0$. Supposons que

(A.II.2) Le potentiel V admet un maximum local non-dégénéré au point $x = 0$, c.-à-d. près

de $x = 0$, modulo un changement de variables linéaire,

$$V(x) = E_0 - \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j^2}{4} x_j^2 + \mathcal{O}(|x|^3), \quad (\text{II.2})$$

avec $E_0 > 0$ et $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$.

Nous rappelons très brièvement la structure géométrique près de ces points. Pour plus de détails voir la section I.1.3. Cette hypothèse implique que le point $(0, 0) \in T^*\mathbb{R}^d$ est un point fixe du champ hamiltonien H_p . Donc le théorème de la variété stable assure l'existence locale d'une variété lagrangienne rentrante Λ_-^{loc} et d'une variété lagrangienne sortante Λ_+^{loc} caractérisées par :

$$\Lambda_{\mp}^{\text{loc}} = \left\{ (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d \text{ près de } (0, 0); \exp(tH_p)(x, \xi) \rightarrow (0, 0) \right. \\ \left. \text{quand } t \rightarrow \pm\infty \text{ et restant près de } (0, 0) \right\} \subset p^{-1}(E_0).$$

De plus, il existe deux fonctions \mathcal{C}^∞ , φ_{\mp} , définies au voisinage 0 et vérifiant

$$\varphi_{\mp}(x) = \mp \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{4} x_j^2 + \mathcal{O}(x^3),$$

telles que $\Lambda_{\mp}^{\text{loc}} = \Lambda_{\varphi_{\mp}} := \{(x, \xi), \xi = \nabla\varphi_{\mp}(x)\}$ près de $(0, 0)$. Comme P est l'opérateur de Schrödinger, nous avons $\varphi_- = -\varphi_+$.

Nous définissons maintenant la variété lagrangienne rentrante/sortante globale Λ_{\mp} :

$$\Lambda_{\mp} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \exp(tH_p)(\Lambda_{\mp}^{\text{loc}}), \quad (\text{II.3})$$

qui vérifie $\Lambda_{\mp} = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d, \exp(tH_p)(x, \xi) \rightarrow (0, 0) \text{ quand } t \rightarrow \pm\infty\}$. Deux petites remarques :

- a) L'intersection $\Lambda_- \cap \Lambda_+$ peut être l'ensemble vide (par exemple dans le cas d'un sommet global du potentiel).
- b) L'intersection $\Lambda_- \cap \Lambda_+$ est incluse dans l'ensemble capté $K(E_0)$.¹

II.2 Orbites homoclines et résonances.

Dans cette section nous présentons l'asymptotique des résonances dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées est constitué d'un seul point fixe hyperbolique et un nombre fini d'orbites homoclines. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction générale, nous avons obtenu aussi des résultats dans le cas des nappes homoclines. Voir [xxii, chapitres 5 et aussi 3].

1. L'ensemble capté $K(E_0) = \{(x, \xi) \in p^{-1}(E_0); s \mapsto \exp(sH_p)(x, \xi) \text{ est bornée}\}$.

Nous ajoutons trois hypothèses pour avoir le cadre géométrique souhaité.

Nous supposons que l'ensemble des trajectoires captées dans la surface d'énergie $p^{-1}(E_0)$ vérifie

(A.II.3) $K(E_0) \subset \Lambda_- \cap \Lambda_+$.

Cette hypothèse assure que toutes les trajectoires captées à énergie E_0 sont liées au point fixe hyperbolique. Dans le sens où l'ensemble $\mathcal{H} = \Lambda_- \cap \Lambda_+ \setminus \{(0, 0)\}$ est la réunion d'orbites homoclines associées au point $(0, 0)$. Une orbite homocline est une bicaractéristique de H_p qui converge vers le point $(0, 0)$ quand t tend vers $-\infty$ et t tend vers $+\infty$. Donc, il n'a pas de courbe hamiltonienne captée à énergie E_0 qui est à une distance strictement positive du point fixe hyperbolique $(0, 0)$.

La deuxième hypothèse est :

(A.II.4) L'ensemble \mathcal{H} est constitué d'un nombre fini d'orbites homoclines sur lesquelles Λ_+ et Λ_- se croisent transversalement.

Notons par γ_k , $k = 1, \dots, K$, ces orbites homoclines, ce sont bien sûr des courbes hamiltoniennes.

Pour chaque courbe γ_k , nous lui associons son action $A_k = \int_{\gamma_k} \xi dx$ et son indice de Maslov ν_k .

Soit $\gamma_k(t) = (x_k(t), \xi_k(t))$ une paramétrisation de γ_k . Alors, il existe deux directions asymptotiques $g_{\mp}^k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telles que

$$x_k(t) = g_{\mp}^k e^{\mp \lambda_1 t} + o(e^{\mp \lambda_1 t}), \text{ quand } t \rightarrow \pm \infty.$$

La dernière hypothèse pour cette section est :

(A.II.5) $\langle g_-^k | g_+^l \rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$ pour tout $k, l \in \{1, \dots, K\}$.

Cette hypothèse assure que les variétés Λ_{\mp} ne peuvent pas s'enrouler autour d'elles-mêmes, c.-à-d. dans un petit voisinage de $\exp(sH_p)(\rho)$ avec $\rho \in \Lambda_{\mp}^{\text{loc}}$, la variété Λ_{\mp} coïncide avec $\exp(sH_p)(\Lambda_{\mp}^{\text{loc}})$.

Enfin, nous introduisons le déterminant de Maslov asymptotique associé à ces courbes :

Soit $\gamma_k(t, y) = (x_k(t, y), \xi_k(t, y)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow T^*\mathbb{R}^d$, définie d'un voisinage de $\mathbb{R} \times \{0\}$ vers un voisinage de γ_k , une paramétrisation \mathcal{C}^{∞} de Λ_+ par les courbes hamiltoniennes tel que $\gamma_k(t, 0) = \gamma_k(t)$.

Alors, les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k^+ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \sqrt{\left| \det \frac{\partial x_k(t, y)}{\partial(t, y)} \Big|_{t=s, y=0} \right|} \exp \left(-s \left(\sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} \right) \right), \\ \mathcal{M}_k^- &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\left| \det \frac{\partial x_k(t, y)}{\partial(t, y)} \Big|_{t=s, y=0} \right|} \exp \left(-s \left(\sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} - \lambda_1 \right) \right), \end{aligned} \tag{II.4}$$

existent et appartiennent à $]0, +\infty[$.

Dans [xxii, section 4, Example 4.11 et Appendix B.3], nous avons construit en dimension 2 un potentiel -constitué de trois parties radiales localisées assez loin l'une de l'autre - tel que le hamiltonien correspondant vérifie toutes les hypothèses ci-dessus.

II.2.1 Règle de quantification et asymptotique des résonances

Soit $C > 0$. Nous regardons les résonances dans un voisinage de E_0 dépendant de h . Ça sera dans des boîtes de la forme $E_0 + [-Ch, Ch] + i[-D_0h - C\frac{h}{|\ln h|}, h]$, D_0 est une constante positive qui va être fixée après, dans un certain sens elle décrira le passage par le point fixe hyperbolique. Nous remarquerons dans la suite que nous sommes en train de regarder les résonances dans une région loin des résonances générées par le sommet.

Comme déjà vue dans la section I.2.2, théorème I.4, le passage du point fixe hyperbolique est pondéré d'une certaine puissance en h , donnée par $S(\frac{z}{h}) := \sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} - i\frac{z - E_0}{h}$.

L'objet qui code la dynamique le long de l'ensemble capté à l'énergie E_0 -constitué du point fixe hyperbolique et les K -orbites homoclines associées- est une matrice d'ordre K , $\mathcal{Q}(z, h) = (\mathcal{Q}_{k,\ell}(z, h))_{1 \leq k, \ell \leq K}$, où

$$\mathcal{Q}_{k,\ell}(z, h) = e^{iA_k/h} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda_1} S\left(\frac{z}{h}\right)\right) \sqrt{\frac{\lambda_1}{2\pi} \frac{\mathcal{M}_k^+}{\mathcal{M}_k^-}} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu_k + \frac{1}{2})} |g_-^\ell| \left(i\lambda_1 g_+^k \cdot g_-^\ell\right)^{-\frac{1}{\lambda_1} S\left(\frac{z}{h}\right)}. \quad (\text{II.5})$$

Définition II.1 (Règle de quantification). *Nous disons que z est une pseudo-résonance de P si 1 est une valeur propre de la matrice $h^{\frac{1}{\lambda_1} S\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{2}} \mathcal{Q}(z, h)$.*

Notons par $\mathbf{Res}_0(P)$ l'ensemble des pseudo-résonances de P . La puissance en h est donnée par :

$$h^{\frac{1}{\lambda_1} S\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{\lambda_1} (D_0 - i\sigma)}$$

où $D_0 := \sum_{j=2}^d \frac{\lambda_j}{2}$ est la constante d'amortissement (damping) associée au point fixe hyper-

bolique $(0, 0)$ et $\sigma := \frac{z - E_0}{h}$ est dans un ensemble compact de \mathbb{C} .

Soient $\mu_1(\tau, h), \dots, \mu_K(\tau, h)$ les valeurs propres de $\mathcal{Q}(E_0 + h\tau - ihD_0, h)$. Alors l'application $[-C, C] \times]0, 1] \ni (\tau, h) \mapsto \mathcal{Q}(E_0 + h\tau - ihD_0, h)$ est analytique. Soit $k = 1, \dots, K$. L'application $[-C, C] \times]0, 1] \ni (\tau, h) \mapsto \mu_k(\tau, h)$ est continue. De plus, pour h fixé, l'application $[-C, C] \ni \tau \mapsto \mu_k(\tau, h)$ est analytique en dehors des croisements.

Nous avons maintenant l'asymptotique des pseudo-résonances donnée par la proposition suivante :

Proposition II.2 (Asymptotique des pseudo-résonances). *Nous supposons que les hypothèses (A.II.1)—(A.II.5) sont vérifiées. Soient $C > 0$ et $\delta(h)$ une fonction qui tend vers*

0 quand $h \rightarrow 0$. Alors, uniformément par rapport à $\tau \in [-C, C]$, une pseudo-résonance z dans $E_0 + [-Ch, Ch] + i[-D_0h - C\frac{h}{|\ln h|}, h]$, avec $\operatorname{Re}(z) \in E_0 + \tau h + h\delta(h)[-1, 1]$ vérifie

$$z = z_{q,k}(\tau) + o\left(\frac{h}{|\ln h|}\right), \quad (\text{II.6})$$

où

$$z_{q,k}(\tau) = E_0 + 2q\pi\lambda_1 \frac{h}{|\ln h|} - iD_0h + i \ln(\mu_k(\tau, h))\lambda_1 \frac{h}{|\ln h|}, \quad (\text{II.7})$$

pour un certain $q \in \mathbb{Z}$, et $k \in \{1, \dots, K\}$.

D'autre part, pour tout $\tau \in [-C, C]$, $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \{1, \dots, K\}$ tels que $z_{q,k}(\tau)$ est donné par l'identité précédente, avec la partie réelle dans $E_0 + \tau h + h\delta(h)[-1, 1]$, il existe une pseudo-résonance z vérifiant (II.6) uniformément par rapport à q, k, τ .

Maintenant, nous utilisons la distance définie dans le chapitre I, identité (I.20), pour pouvoir comparer l'ensemble des résonance de P à celui des pseudo-résonances correspondant.

Théorème II.3 (Asymptotique des résonances). *Nous supposons que les hypothèses (A.II.1)–(A.II.5) sont vérifiées. Soient $C, \delta_1 > 0$. Dans $\text{Box}^- := E_0 + [-Ch, Ch] + i[-D_0h - C\frac{h}{|\ln h|}, h]$, nous avons :*

$$\operatorname{dist}(\mathbf{Res}(P), \mathbf{Res}_0(P)) = o\left(\frac{h}{|\ln h|}\right),$$

quand h tend vers 0. De plus, pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, il existe $M > 0$ telle que

$$\|\chi(P - z)^{-1}\chi\| \lesssim h^{-M},$$

uniformément par rapport à h suffisamment petit et $z \in \text{Box}^-$, avec $\operatorname{dist}(z, \mathbf{Res}_0(P)) \geq \delta_1 \frac{h}{|\ln h|}$.

Avec ce genre de correspondance -en comparant les ensembles- nous ne pouvons pas contrôler la multiplicité des résonances. Néanmoins, nous avons une minoration de la multiplicité par le résultat suivant :

Proposition II.4 (Borne inférieure sur la multiplicité). *Dans la même situation du théorème précédent. Soit $s > 0$ suffisamment petit. Alors, pour toute pseudo-résonance z dans Box^- , nous avons*

$$\operatorname{card}(\mathbf{Res}(P) \cap D\left(z, 2s \frac{h}{|\ln h|}\right)) \geq \operatorname{card}\left\{(q, k) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, K\}; z_{q,k}(\operatorname{Re}\sigma) \in D\left(z, s \frac{h}{|\ln h|}\right)\right\},$$

où $\sigma = \frac{z - E_0}{h}$ et $z_{q,k}(\cdot)$ est donnée par (II.7). Dans l'expression précédente, les résonances de P sont comptées avec leur ordre de multiplicité.

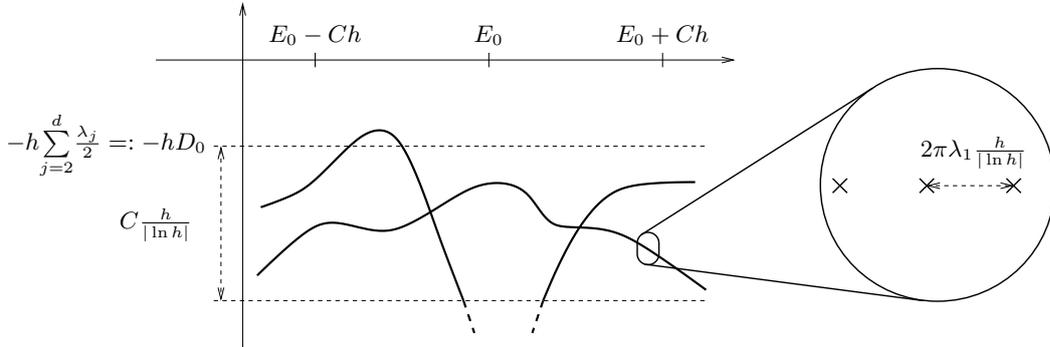


Figure II.1 – Une asymptotique des résonances à deux échelles du théorème II.3.

II.2.2 Phénomènes remarquables

Les résultats de la section précédente nous indiquent que les valeurs propres de la matrice $\mathcal{Q}(E_0 + h\tau - ihD_0, h)$ jouent un rôle central pour l'asymptotique des résonances. Nous pouvons en déduire plusieurs propriétés sur les résonances engendrées par un nombre fini de courbes homoclines. Voici deux d'entre eux :

II.2.2.1 Accumulation sur des courbes

Dans le cadre géométrique de cette section, les résonances s'accablent sur des courbes. De plus nous avons une asymptotique des résonances à deux échelles :

À l'échelle macroscopique en h : les résonances s'accablent sur les courbes :

$$\text{Im}\sigma = -D_0 + \ln\left(|\mu_k(\text{Re}\sigma, h)|\right) \frac{\lambda_1}{|\ln h|}, \quad (\text{II.8})$$

où $\sigma = \frac{z - E_0}{h}$ avec $\text{Re}\sigma \in [-C, C]$ est le paramètre spectral associé rééchélonné. Pour h fixé, ces courbes sont continues et analytiques en dehors des croisements.

À l'échelle microscopique en $h|\ln(h)|^{-1}$: ces courbes deviennent des droites horizontales où les paquets de résonances sont régulièrement distribués et espacés par :

$$2\pi\lambda_1 \frac{h}{|\ln h|} + o\left(\frac{h}{|\ln h|}\right).$$

Exemple 1 : Une seule trajectoire homocline

Supposons que $K = 1$. Dans ce cas la matrice \mathcal{Q} est un scalaire et $g_+ \cdot g_- = c|g_+|^2$ pour un certain $c > 0$, grâce à la symétrie du hamiltonien associé.

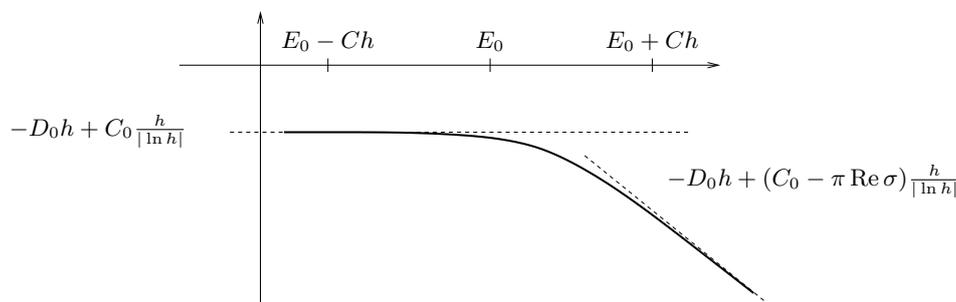


Figure II.2 – Courbe d’accumulation générée par une seule trajectoire homocline.

D’après la proposition II.2, nous avons :

$$z_q(\tau) = E_0 - \frac{A\lambda_1}{|\ln h|} + 2q\pi\lambda_1 \frac{h}{|\ln h|} - ihD_0 + i \ln(\mu(\tau))\lambda_1 \frac{h}{|\ln h|}, \quad (\text{II.9})$$

où $\mu(\tau) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\tau}{\lambda_1}\right) \sqrt{\frac{\lambda_1}{2\pi} \frac{\mathcal{M}^+}{\mathcal{M}^-}} e^{-\frac{\pi}{2}(\nu+1)i} |g_-| (\lambda_1 |g_+| |g_-|)^{-\frac{1}{2} + i\frac{\tau}{\lambda_1}} e^{-\frac{\pi\tau}{2\lambda_1}}$, et $q \in \mathbb{Z}$. Ici A est l’action le long de l’orbite homocline γ_1 .

La courbe d’accumulation donnée par (II.8), vérifie

$$\begin{aligned} \text{Im } \sigma &= -D_0 + \frac{C_0}{|\ln h|} - \frac{\lambda_1}{2|\ln h|} \ln \left(e^{\frac{2\pi}{\lambda_1} \text{Re } \sigma} + 1 \right) \\ &= -D_0 + \frac{1}{|\ln h|} \begin{cases} C_0 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{2\pi}{\lambda_1} |\text{Re } \sigma|}\right) & \text{si } \text{Re } \sigma \rightarrow -\infty, \\ -\pi \text{Re } \sigma + C_0 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{2\pi}{\lambda_1} |\text{Re } \sigma|}\right) & \text{si } \text{Re } \sigma \rightarrow +\infty, \end{cases} \end{aligned}$$

avec $C_0 = \lambda_1 \ln \left(\frac{\mathcal{M}^+}{\mathcal{M}^-} \sqrt{\frac{|g_-|}{|g_+|}} \right)$.

- (i) D’après l’identité précédente, la courbe d’accumulation est indépendante de h . Donc l’asymptotique des résonances est figé à l’ordre macroscopique.
- (ii) A l’échelle microscopique la situation est totalement différente. En effet, pour τ fixé, l’identité (II.8) montre que les $z_q(\tau)$ dont la partie réelle est « proche » de $E_0 + \tau h$ vérifie

$$\frac{|\ln h|}{h} \left(z_q(\tau) - \left(E_0 + \tau h - ihD_0 \right) \right) = -A\lambda_1 h^{-1} + 2q\pi\lambda_1 - \tau |\ln h| + i \ln(\mu(\tau))\lambda_1.$$

Donc les résonances semble se déplacer de la droite vers la gauche quand h tend vers 0^+ . Ce phénomène est un exemple de la dynamique microscopique sur les courbes d’accumulation.

Remarque II.5. Notons que dans le cas unidimensionnel et V globalement analytique dans un certain voisinage de \mathbb{R} , S. Fujiié et T. Ramond [FR98, Theorem 0.7] ont prouvé la

formule correspondante à (II.9). L'approche utilisée est la méthode BKW complexe combinée à la réduction -près du point fixe hyperbolique- de l'opérateur de départ à l'équation de Weber.

II.2.2.2 Vibration

Revenons au cas de plusieurs trajectoires homoclines ($K \geq 1$). Les courbes d'accumulation bouge avec h . La dépendance en h provient « uniquement » du facteur action $e^{\frac{i}{h}A_k}$, $k = 1, \dots, K$. Rappelons que les courbes d'accumulation sont continues par rapport à h et analytiques en dehors des croisements. En comparant les actions A_k , $k = 1, \dots, K$, nous avons exactement trois situations :

- a) Si $A_1 = \dots = A_K$ alors $\mu_k(\tau, h) = e^{\frac{i}{h}A_1} e^{-iA_1} \mu_k(\tau, 1)$. Puisque dans (II.8), il y a que le module des $\mu_k(\tau, h)$ qui intervient donc les courbes d'accumulation sont indépendantes de h dans ce cas.
- b) Si on suppose qu'on a exactement deux actions différentes, B et C . Donc la matrice correspondante ainsi que le module de ses valeurs propres dépendent de h par le terme $e^{\frac{i}{h}(B-C)}$. Donc les courbes d'accumulation sont périodiques en $\frac{1}{h}$ et de période $\frac{2\pi}{|B-C|}$.
- c) Si il existe au moins trois actions A_k qui sont \mathbb{Z} -indépendantes les courbes d'accumulation ne sont plus périodiques par rapport à h^{-1} , mais elles sont des fonctions lisses (au moins continues) de $e^{\frac{i}{h}(A_2-A_1)}, \dots, e^{\frac{i}{h}(A_k-A_1)}$. C'est le phénomène « vibratoire ».

Exemple 2 : Deux courbes homoclines en dimension $d = 2$, et $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$. Le potentiel est illustré dans la partie de dessus de la figure II.3.

Les deux courbes d'accumulation sont périodiques par rapport à $\frac{1}{h}$. De plus l'asymptotique des $z_{q,k}(\tau)$ est donnée par

$$z_{q,k}(\tau) = E_0 - \frac{A_k \lambda}{|\ln h|} - i \frac{\lambda}{2} h + \left(2q\pi\lambda + i \ln(\mu_k(\tau))\lambda + \mathcal{O}(\tau^{-1}) \right) \frac{h}{|\ln h|},$$

quand $\tau \rightarrow -\infty$ avec

$$\mu_k(\tau) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - i \frac{\tau}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mathcal{M}_k^+}{\mathcal{M}_k^-}} e^{-\frac{\pi}{2}(\nu_k+1)i} |g_-^k| \left(\lambda |g_+^k| |g_-^k| \right)^{-\frac{1}{2} + i \frac{\tau}{\lambda}} e^{-\frac{\pi\tau}{2\lambda}}.$$

D'autre part, quand $\tau \rightarrow +\infty$,

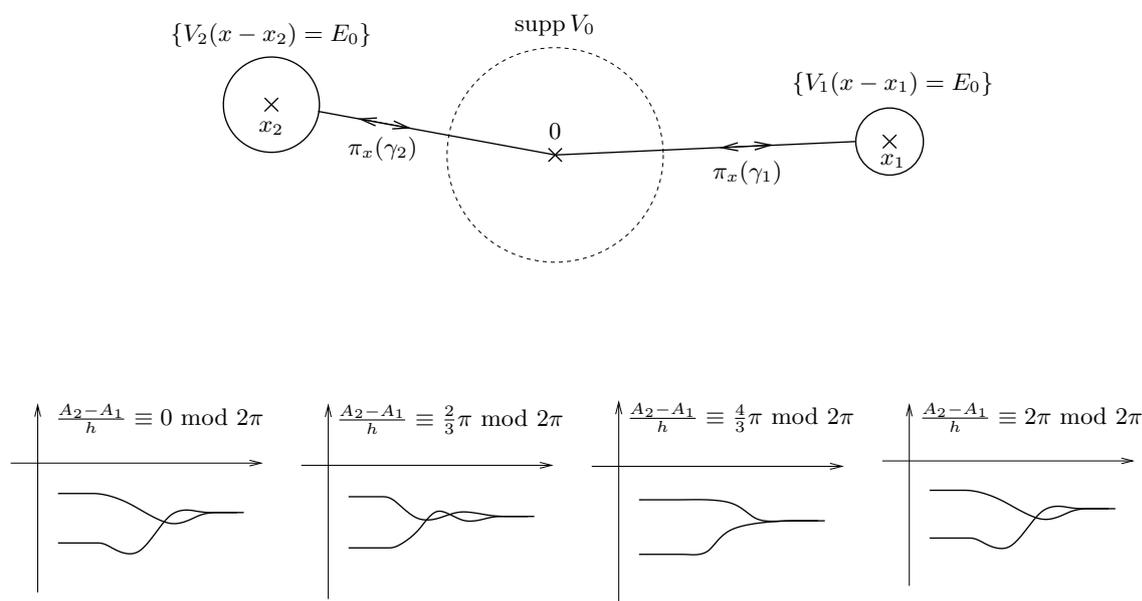


Figure II.3 – La géométrie du potentiel V en dimension $d = 2$ et $K = 2$. Le phénomène de vibration des courbes d’accumulation.

$$\begin{cases} z_{q,1}(\tau) = E_0 - \frac{(A_1 + A_2)\lambda}{2|\ln h|} - i\frac{\lambda}{2}h + \left(2q\pi\lambda + i\ln(\mu_{\widehat{12}}(\tau))\lambda + \mathcal{O}(\tau^{-1})\right) \frac{h}{|\ln h|}, \\ z_{q,2}(\tau) = z_{q,1}(\tau) + \left(\pi\lambda + \mathcal{O}(\tau^{-1})\right) \frac{h}{|\ln h|}, \end{cases}$$

$$\text{avec } \mu_{\widehat{12}}(\tau) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\tau}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_1^+ \mathcal{M}_2^+}{\mathcal{M}_1^- \mathcal{M}_2^-}} e^{-\frac{\pi}{4}(\nu_1 + \nu_2)i} \sqrt{|g_-^1| |g_-^2|} \left(\lambda \sqrt{|g_-^1| \cdot g_+^2| |g_-^2| \cdot g_+^1|}\right)^{-\frac{1}{2} + i\frac{\tau}{\lambda}} e^{\frac{\pi\tau}{2\lambda}}.$$

Remarque II.6. Quand $\tau \rightarrow -\infty$, la distribution des résonances est « comparable » à la somme de deux distributions générées par deux trajectoires indépendantes. Alors que dans le régime $\tau \rightarrow +\infty$, cette dernière est « comparable » à celle générée par une seule trajectoire mais les paquets de résonances sont espacés de $\pi\lambda h |\ln h|^{-1}$.

De plus, les deux courbes d’accumulation sont décrites par :

$$\text{Im } \sigma = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{|\ln h|} \begin{cases} C_k + \mathcal{O}(|\text{Re } \sigma|^{-1}) & \text{quand } \text{Re } \sigma \rightarrow -\infty, \\ C_{\widehat{12}} + \mathcal{O}(|\text{Re } \sigma|^{-1}) & \text{quand } \text{Re } \sigma \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

avec

$$C_k = \lambda \ln \left(\frac{\mathcal{M}_k^+}{\mathcal{M}_k^-} \sqrt{\frac{|g_-^k|}{|g_+^k|}} \right) \quad \text{et} \quad C_{\widehat{12}} = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{\lambda}{2} |\ln |\cos(x_1, x_2)||.$$

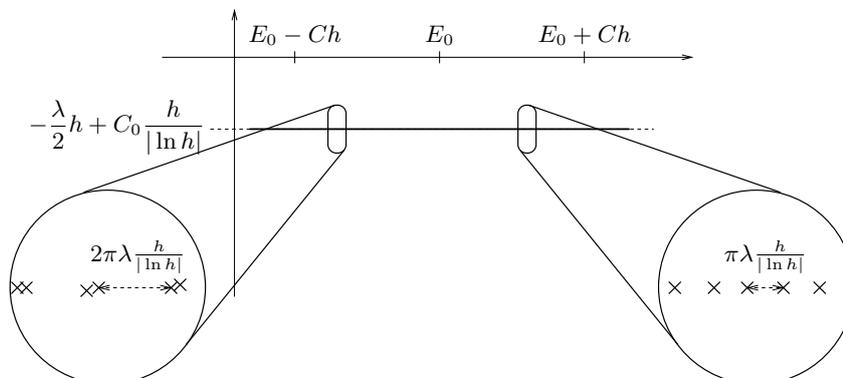


Figure II.4 – La dynamique des résonances à l'échelle microscopique (cas symétrique).

Remarquons que $C_{\widehat{12}} \geq \frac{C_1 + C_2}{2}$. Donc la position de l'asymptote à droite est toujours au dessus de la médiane des deux asymptotes à gauche.

Une autre remarque concernant cet exemple, nous supposons de plus la symétrie parfaite, c.-à-d. $V_1 = V_2$ et $x_1 = -x_2$, nous avons

$$\operatorname{Im} \sigma = -\frac{\lambda}{2} + \frac{C_0}{|\ln h|},$$

où $C_0 := C_1 = C_2 = C_{\widehat{12}} = \lambda \ln \left(\frac{M^+}{M^-} \sqrt{\frac{|g_-|}{|g_+|}} \right)$.

A l'échelle macroscopique l'asymptotique des résonances est « triviale », une droite horizontale. Alors que, à l'échelle microscopique, l'asymptotique des résonances est donnée par

$$z_{q,1}(\tau) = z_{q,2}(\tau) + \frac{h}{|\ln h|} \begin{cases} \mathcal{O}(\tau^{-1}) & \text{quand } \tau \rightarrow -\infty, \\ \pi\lambda + \mathcal{O}(\tau^{-1}) & \text{quand } \tau \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Remarque II.7. *Les paquets de résonances sont de multiplicité au moins*

- deux et espacés de $2\pi\lambda h |\ln h|^{-1}$ pour $\tau \ll -1$,
- un et espacés de $\pi\lambda h |\ln h|^{-1}$, $\tau \gg 1$.

Donc la distribution microscopique des résonances change le long de la courbe d'accumulation.

Ce phénomène a été relevé par Y. Colin de Verdière et B. Parisse dans leur travail sur les valeurs propres associées à un double puits dégénéré en dimension 1, voir [CdVP94].

L'ensemble des trajectoires captées dans ce cas est :

- deux trajectoires périodiques hyperboliques pour $E_0 - \varepsilon < E < E_0$, et

— une trajectoire périodique hyperbolique pour $E_0 < E < E_0 + \varepsilon$.

II.3 Potentiel multi-barrières

Dans cette section nous présentons l'asymptotique des résonances dans le cas où l'ensemble des trajectoires captées est constitué d'un nombre fini de points fixes hyperboliques et un nombre fini d'orbites homoclines/hétéroclines. La différence par rapport au cas étudié dans la section précédente c'est qu'il y a plusieurs sommets. Donc il y aura une concurrence entre les géométries correspondantes dictées par les sommets. En effet au passage de chaque point fixe la solution est pondérée d'une certaine puissance correspondante en h .

II.3.1 Cadre géométrique

Nous supposons que le potentiel V vérifie (A.II.1). Soit $E_0 > 0$. Supposons que :

(A.II.6) Il existe un ensemble fini \mathbf{S} dans \mathbb{R}^d tel que $V(x)$ admet un maximum non-dégénéré en tout point $s \in \mathbf{S}$, avec $V(s) = E_0$.

Soient $s, \tilde{s} \in \mathbf{S}$. Supposons que l'intersection $\Lambda_-^s \cap \Lambda_+^{\tilde{s}}$ est non vide. La courbe hamiltonienne $\alpha(t) := \exp(tH_p)(x_0, \xi_0)$ partant d'un point $(x_0, \xi_0) \in \Lambda_-^s \cap \Lambda_+^{\tilde{s}}$ tend vers s quand $t \rightarrow +\infty$ et vers \tilde{s} quand $t \rightarrow -\infty$. On note $s := \alpha^+$, $\tilde{s} = \alpha^-$. La trajectoire est dite homocline si $s = \tilde{s}$. Elle est dite hétérocline quand $s \neq \tilde{s}$.

Notons \mathbf{A} l'ensemble des trajectoires homoclines et hétéroclines associés à \mathbf{S} .

Nous supposons que l'ensemble capté $K(E_0)$ est donné par :

(A.II.7) $K(E_0) = \mathbf{S} \cup \mathbf{A}$

De plus, pour tout $\alpha \in \mathbf{A}$, $\Lambda_+^{\alpha^-}$ et $\Lambda_-^{\alpha^+}$ s'intersectent transversalement le long de α , c-à-d.

(A.II.8) $T_\rho \Lambda_+^{\alpha^-} \pitchfork T_\rho \Lambda_-^{\alpha^+} = T_\rho \alpha$ en tout point ρ de α .

La dernière hypothèse dans ce cadre concerne les directions asymptotiques des trajectoires homoclines et hétéroclines aux points fixes.

(A.II.9) Pour tout $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbf{A}$ t.q. $\alpha^- = \tilde{\alpha}^+ = s$ les directions asymptotiques ω_+^α et $\omega_-^{\tilde{\alpha}}$ vérifient $\langle \omega_+^\alpha | \omega_-^{\tilde{\alpha}} \rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$.

Vocabulaire adéquat : Ce cadre géométrique peut être transcrit par le formalisme de graphe. Voici les identifications ainsi qu'un très bref rappel.

- La paire d'ensembles (\mathbf{S}, \mathbf{A}) est un graphe si \mathbf{S} est considéré comme un ensemble de sommets et \mathbf{A} l'ensemble des arêtes correspondantes.

- ▶ Les arêtes sont orientées par le champs hamiltonien.
- ▶ Les hypothèses (A.II.6) et (A.II.8) impliquent que (\mathbf{S}, \mathbf{A}) est un graphe fini.
- ▶ Une séquence finie $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ est un chemin si $\alpha_\ell^+ = \alpha_{\ell+1}^-$, $\ell = 1, \dots, k-1$.
- ▶ C'est un cycle si de plus $\alpha_k^+ = \alpha_1^-$. Dans ce cas nous identifions les cycles $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ et $(\alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_1)$.
- ▶ Un cycle est dit primitif s'il ne contient pas un sous-cycle non-trivial.

Coefficient d'amortissement : Supposons que le graphe (\mathbf{S}, \mathbf{A}) possède au moins un cycle. Pour tout sommet s et tout cycle γ , nous introduisons

$$\alpha_s = \frac{1}{2\lambda_1^s} \sum_{j=2}^d \lambda_j^s, \quad \beta_s = \frac{1}{\lambda_1^s}, \quad \alpha(\gamma) = \sum_{s \in \mathbf{S}(\gamma)} \alpha_s, \quad \beta(\gamma) = \sum_{s \in \mathbf{S}(\gamma)} \beta_s,$$

où $\mathbf{S}(\gamma)$ est l'ensemble des sommets appartenant au cycle γ . Alors,

Définition II.8. Le coefficient d'« amortissement » est donné par :

$$D_0 := \min_{\gamma \text{ cycle}} D(\gamma), \quad \text{où } D(\gamma) = \frac{\alpha(\gamma)}{\beta(\gamma)}. \quad (\text{II.10})$$

Remarque II.9.

- a) Le coefficient D_0 est bien défini car il y a un nombre fini de cycle primitifs.
- b) Dans le cas d'un seul point fixe hyperbolique avec au moins une trajectoire homocline nous retrouvons le D_0 définie dans la section précédente.
- c) Le coefficient D_0 donnera le terme principal de la partie imaginaire des résonances les plus proche du réel.

Définition II.10. Soit γ un cycle du graphe (\mathbf{S}, \mathbf{A}) . Nous disons que le cycle γ est minimal si $D(\gamma) = D_0$.

II.3.2 Condition de quantification et asymptotique des résonances

La condition de quantification des résonances est donnée par la matrice $\mathcal{Q}(E, h)$ dont l'ordre est donné par le nombre d'arêtes, $\#\mathbf{A}$, du graphe.

Pour $e, \tilde{e} \in \mathbf{A}$, nous définissons la (e, \tilde{e}) -composante de la matrice par :

$$Q_{e, \tilde{e}}(E, h) = \begin{cases} h^{\alpha_s - i\beta_s \frac{E - E_0}{h}} Q_{e, \tilde{e}}(\alpha_s - i\beta_s \frac{E - E_0}{h}) & \text{si } e^- = \tilde{e}^+ =: s, \\ 0 & \text{si } e^- \neq \tilde{e}^+, \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

avec

$$Q_{e, \tilde{e}}(\zeta) = C_{e, \tilde{e}} e^{iA_e/h} \Gamma\left(\zeta + \frac{1}{2}\right) (i\lambda_1^s \omega_+^e \cdot \omega_-^{\tilde{e}})^{-(\zeta + \frac{1}{2})},$$

où $A_e := \int_e \xi \cdot dx$ est l'action le long de l'arête e et $C_{e, \tilde{e}}$ est une constante indépendante de h et de E , qui s'exprime en terme de quantités géométriques associées à e et \tilde{e} .

Définition II.11 (Règle de quantification). *Nous disons que E est une pseudo-résonance de P si*

$$\det(\text{Id}_{\#\mathbf{A}} - Q(E, h)) = 0. \quad (\text{II.12})$$

Notons l'ensemble des pseudo-résonances de P par $\mathbf{Res}_0(P)$.

En tenant compte du théorème I.5 pour les résonances générées par un sommet dans le cas non-globalement analytique, nous avons :

Lemme II.12. *Soit $s \in \mathbf{S}$. L'ensemble des résonances générées par le sommet s (modulo $o(h)$) est $E_0 - ih\Gamma^s$, où*

$$\Gamma^s = \left\{ \sum_{j=1}^d \lambda_j^s \left(\alpha_j + \frac{1}{2} \right); \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \right\}$$

est l'ensemble des valeurs propres de l'oscillateur harmonique d -dimensionnel,

$$-\Delta + \sum_{j=1}^d \frac{(\lambda_j^s)^2}{4} x_j^2,$$

avec $0 < \lambda_1^s \leq \lambda_2^s \leq \dots \leq \lambda_d^s$ et $\left(-\frac{(\lambda_j^s)^2}{2} \right)_{j=1, \dots, d}$ sont les valeurs propres de la hessienne de V au point s .

Notation II.13. *Soient $C, \varepsilon > 0$. Le domaine $B(C, \varepsilon)$ est le rectangle dans le plan complexe près de E_0 ; $[E_0 - Ch, E_0 + Ch] + i[-D_0h - C \frac{h}{|\ln h|}, 0]$ privé d'un εh -voisinage de $E_0 - ih\Gamma_{\mathbf{S}}$ avec $\Gamma_{\mathbf{S}} := \bigcup_{s \in \mathbf{S}} \Gamma^s$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème concernant l'asymptotique des résonances dans ce cadre, voir [xii, section 6, Theorem 6.5].

Théorème II.14 (Asymptotique des résonances). *Nous supposons que les hypothèses (A.II.1), (A.II.6) — (A.II.9) sont vérifiées. Fixons $C > 0$ arbitrairement grand et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Dans la boîte $B(C, \varepsilon)$, nous avons, quand $h \rightarrow 0$,*

$$\text{dist} \left(\mathbf{Res}(P), \mathbf{Res}_0(P) \right) = o\left(\frac{h}{|\ln h|} \right).$$

De plus, pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, il existe $M > 0$ telle que

$$\left\| \chi(P - z)^{-1} \chi \right\| \lesssim h^{-M},$$

uniformément par rapport à h suffisamment petit et $z \in B(C, \varepsilon)$ avec $\text{dist}(z, \mathbf{Res}_0(P)) \geq \delta_1 \frac{h}{|\ln h|}$.

Afin d'étudier la distribution des (pseudo-)résonances -à l'échelle microscopique- définies par la condition (II.12), fixons $\tau \in [-C, C]$ et nous posons

$$E = E_0 + \tau h - iD_0 h + Z \frac{h}{|\ln h|},$$

en considérant Z comme le nouveau paramètre spectral au lieu de E . Alors la puissance de h de chaque élément de la matrice $\mathcal{Q}(E, h)$ s'écrit

$$h^{\alpha_s - i\beta_s \frac{E - E_0}{h}} = h^{\alpha_s - D_0 \beta_s} e^{i\beta_s Z} h^{-i\beta_s \tau}.$$

Calcul du déterminant de la matrice $\mathcal{Q}(E, h)$: Rappelons que le déterminant d'une matrice est une somme sur le groupe symétrique de produits d'éléments correspondant à chaque permutation, et qu'une permutation est un produit de permutations cycliques disjointes. Par conséquent, chaque permutation donnant un terme non nul à $\det(\text{Id}_{\#\varepsilon} - \mathcal{Q}(E, h))$ correspond à une union finie de cycles du graphe (\mathbf{S}, \mathbf{A}) . Ainsi, $\det(\text{Id}_{\#\varepsilon} - \mathcal{Q}(E, h))$ est une somme finie de la forme :

$$\det(\text{Id}_{\#\varepsilon} - \mathcal{Q}(E, h)) = \sum_{a,b} F_{a,b}(\rho, \kappa, \frac{Z}{|\ln h|}) h^a e^{ibZ}, \quad (\text{II.13})$$

où a, b sont des constantes appartenant à $\{\alpha(\gamma) - D_0 \beta(\gamma)\}_{\gamma:\text{cycle}}$, $\{\beta(\gamma)\}_{\gamma:\text{cycle}}$ respectivement. De plus $F_{a,b}$ est une fonction holomorphe de $\rho := \{e^{\frac{i}{h} A_e}\}_e$, $\kappa := \{h^{-i\beta_s \tau}\}_s$ et Z .

Le terme principal de la fonction $F_{a,b}$: La puissance en h , donnée par $\alpha(\gamma) - D_0 \beta(\gamma)$, est positive ou nulle. Elle est nulle si et seulement si γ est un cycle minimal. Donc, les cycles minimaux déterminent la partie principale de l'asymptotique du $\det(\text{Id}_{\#\mathbf{A}} - \mathcal{Q}(E, h))$.

Fonction de codage des (pseudo-)résonances : Suite à la remarque précédente, nous considérons la fonction obtenue à partir de la formule (II.13) en prenant que le terme principal correspondant à $a = 0$ et nous figeons $\frac{Z}{|\ln h|}$ à 0 car Z est dans un compact,

$$f_\tau(Z, h) := \sum_b F_{0,b}(\rho, \kappa, 0) e^{ibZ}. \quad (\text{II.14})$$

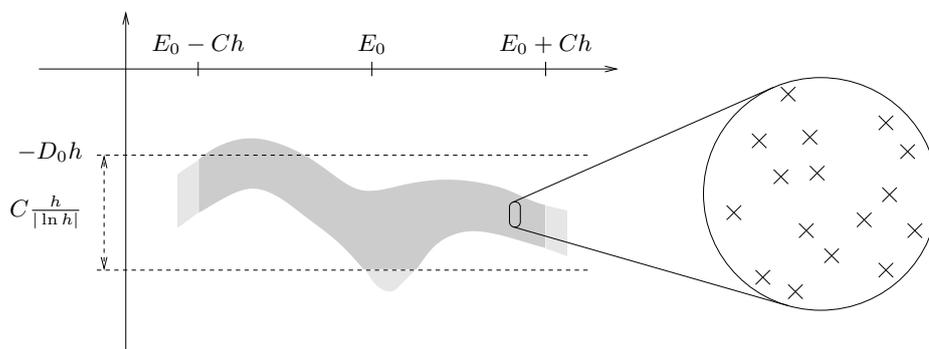


Figure II.5 – Nuage de résonances dans le cadre du théorème II.15.

Pour τ et h fixé, la fonction $f_\tau(Z, h)$ est une somme finie d'exponentielles par rapport à Z , qui n'est pas identiquement nulle. La distribution des zéros de ces fonctions a été étudiée pendant longtemps (voir par exemple R-E. Langer [Lan31] ou le livre de R. Bellman et K-L. Cooke [BC63]). En particulier, le nombre de zéros est uniformément borné dans tout compact. De plus, [BC63, Theorem 12.7] prouve l'existence de zéros de $f_\tau(\cdot, h)$ et donne l'asymptotique de leur nombre pour τ, h fixé sous certaines hypothèses naturelles.

Nous énonçons le résultat concernant l'asymptotique des pseudo-résonances dans ce cadre -à l'échelle microscopique-, voir [xii, section 6, Proposition 6.4].

Proposition II.15 (Asymptotique des pseudo-résonances). *Nous supposons que les hypothèses (A.II.1), (A.II.6)–(A.II.9) sont vérifiées. Nous fixons $C, \epsilon > 0$. Alors, uniformément par rapport à $\tau \in [-C, C]$, les pseudo-résonances de P dans le rectangle $[E_0 + \tau h - C \frac{h}{|\ln h|}, E_0 + \tau h + C \frac{h}{|\ln h|}] + i[-D_0 h - C \frac{h}{|\ln h|}, 0]$ privé d'un ϵh -voisinage d'un sous-ensemble finie de $E_0 - ih\Gamma_{\mathbf{S}}$ vérifient :*

$$E = E_0 + \tau h - iD_0 h + Z \frac{h}{|\ln h|} + o\left(\frac{h}{|\ln h|}\right), \quad (\text{II.15})$$

où Z est un zéro de la « fonction de codage » $f_\tau(\cdot, h)$ donnée par (II.14).

Inversement, pour tout $\tau \in [-C, C]$ et $Z \in [-C, C] + i[-C, +\infty[$, tel que $f_\tau(Z, h) = 0$ alors il existe une pseudo-résonance E vérifiant (II.15) uniformément par rapport à τ et Z .

Les propriétés générales sur la fonction $f_\tau(\cdot, h)$ nous permettent de conclure que dans le cas général nous obtenons un nuage de (pseudo-)résonances (sans aucune structure évidente). Voir la figure II.5.

II.3.3 Potentiel à trois bosses

Maintenant, nous étudions l'asymptotique des résonances dans le cas où l'ensemble capté est constitué de trois points fixes hyperboliques $\mathbf{S} = \{a, b, c\}$ et six trajectoires hétéroclines

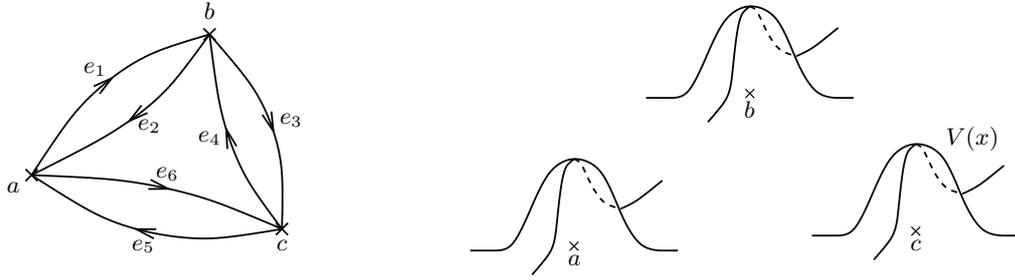


Figure II.6 – Potentiel à trois bosses et le graphe de l'ensemble capté.

$\mathbf{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ joignant ces points fixes. Alors, il y a cinq cycles primitives : (e_1, e_2) , (e_3, e_4) , (e_5, e_6) , (e_1, e_3, e_5) , (e_2, e_6, e_4) . Voir figure II.6.

La matrice \mathcal{Q} est d'ordre 6 donnée par

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{e_1, e_2} & 0 & 0 & Q_{e_1, e_5} & 0 \\ Q_{e_2, e_1} & 0 & 0 & Q_{e_2, e_4} & 0 & 0 \\ Q_{e_3, e_1} & 0 & 0 & Q_{e_3, e_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{e_4, e_3} & 0 & 0 & Q_{e_4, e_6} \\ 0 & 0 & Q_{e_5, e_3} & 0 & 0 & Q_{e_5, e_6} \\ 0 & Q_{e_6, e_2} & 0 & 0 & Q_{e_6, e_5} & 0 \end{pmatrix}.$$

À partir de maintenant, nous supposons que la dimension $d = 2$ et les trois points fixes hyperboliques sont isotropes, c.-à-d. $\lambda_1^\bullet = \lambda_2^\bullet =: \lambda^\bullet$, pour $\bullet \in \{a, b, c\}$. Nous avons trois cas :

Cas n° 1 . $\lambda^a = \lambda^b = \lambda^c =: \lambda$. Le coefficient d'amortissement D_0 est égale à $\frac{\lambda}{2}$ et tous les coefficients de la matrice \mathcal{Q} ont le même facteur $h^{\frac{1}{2} - i \frac{(E - E_0)}{\lambda h}}$. Alors les résonances dans $B(C, 0)$ sont proches de l'ensemble

$$E_{m,k}(\tau) = E_0 + 2k\pi\lambda \frac{h}{|\ln h|} - i \frac{\lambda}{2} h + i \ln(\mu_m(\tau, h)) \lambda \frac{h}{|\ln h|},$$

avec $1 \leq m \leq 6$ et $k \in \mathbb{Z}$. Ici $\mu_m(\tau, h)$, ($m = 1, \dots, 6$) les valeurs propres de la matrice \mathcal{Q} d'ordre 6 prise au point $E_0 + \tau h - iD_0 h$, c.-à-d. ces coefficients $Q_{e, \bar{e}}(E, h)$ sont remplacés par $\widehat{Q}_{e, \bar{e}}(\tau, h) := Q_{e, \bar{e}}(E_0 + \tau h - iD_0 h, h)$.

Si de plus, nous supposons que le triangle abc est équilatéral. Alors l'action associée à l'orbite hétérocline est la même pour tout e_j , ($j = 1, \dots, 6$). Donc ce cas les valeurs propres sont explicitement calculés, voir [xxii, section 6, identités (6.38)–(6.41)], en particulier, il y a deux valeurs propres doubles, et les résonances s'accroissent sur les courbes illustrées dans la figure II.7.

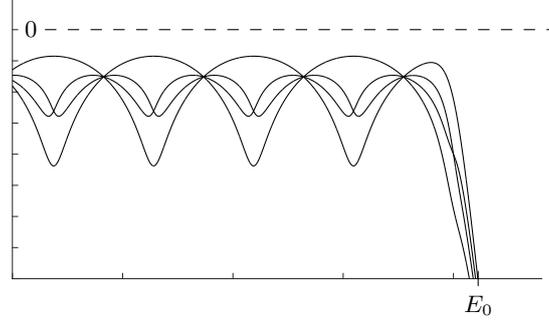


Figure II.7 – Courbes d’accumulation des résonances près du sommet de la barrière de trois bosses dans le cas équilatéral.

Cas n° 2 . $\lambda^a = \lambda^c > \lambda^b$. Les cycles minimaux sont (e_1, e_2) et (e_3, e_4) . Le coefficient d’amortissement D_0 est donné par :

$$D_0 = \frac{2^{-1} + 2^{-1}}{(\lambda^a)^{-1} + (\lambda^b)^{-1}} = \frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^a + \lambda^b}. \tag{II.16}$$

Dans ce cas, la matrice donnant la partie principale des résonances est réduite à

$$\begin{pmatrix} \widehat{Q}_{e_1, e_2} \widehat{Q}_{e_2, e_1} & \widehat{Q}_{e_1, e_2} \widehat{Q}_{e_2, e_4} \\ \widehat{Q}_{e_4, e_3} \widehat{Q}_{e_3, e_1} & \widehat{Q}_{e_4, e_3} \widehat{Q}_{e_3, e_4} \end{pmatrix},$$

où $\widehat{Q}_{e, \tilde{e}}(\tau, h) := Q_{e, \tilde{e}}(\alpha_s - i\beta_s(\tau - iD_0))$ pour $s := e^- = \tilde{e}^+$, et les résonances sont près des points

$$E_{m, k}(\tau) = E_0 + 2k\pi \frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^a + \lambda^b} \frac{h}{|\ln h|} - i \frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^a + \lambda^b} h + i \ln(\mu_m(\tau, h)) \frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^a + \lambda^b} \frac{h}{|\ln h|},$$

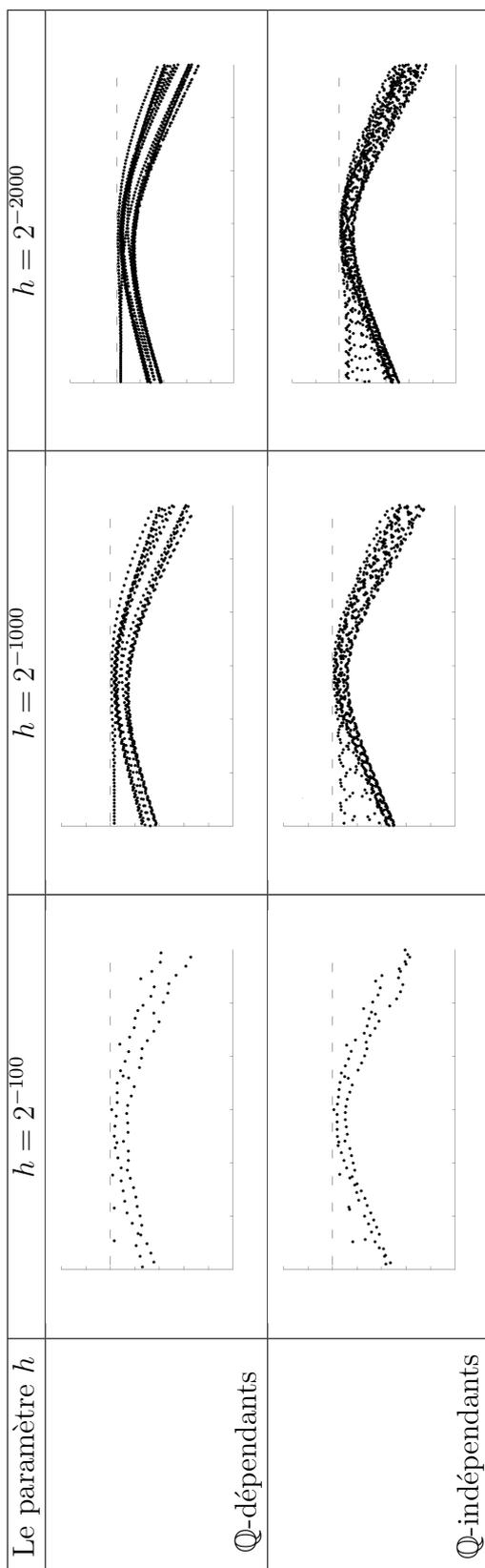
avec $m = 1, 2, \dots$, où $\mu_1(\tau, h), \mu_2(\tau, h)$ sont les valeurs propres de cette matrice.

Cas n° 3 . $\lambda^c > \lambda^a, \lambda^b$. Le cycle minimal est (e_1, e_2) et (II.16) reste vraie. Dans ce cas, la matrice donnant la partie principale des résonances est réduite à un scalaire $\mu(\tau, h) = \widehat{Q}_{e_1, e_2} \widehat{Q}_{e_2, e_1}$ et les résonances sont proche de

$$E_k(\tau) = E_0 + 2k\pi \frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^a + \lambda^b} \frac{h}{|\ln h|} - i \frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^a + \lambda^b} h + i \ln(\mu(\tau, h)) \frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^a + \lambda^b} \frac{h}{|\ln h|}.$$

Nous terminons cette sous-section par quelques illustrations numériques dans le cas de la dimension $d = 2$ et les trois points fixes hyperboliques sont isotropes, $\lambda_1^\bullet = \lambda_2^\bullet =: \lambda^\bullet$, pour $\bullet \in \{a, b, c\}$.

Les λ^a, λ^b et λ^c sont :



- ▶ Dans le cas où les λ^a, λ^b et λ^c sont Q-dépendants les résonances s'accumulent sur des lignes de plus en plus visibles avec $h \searrow 0$.
- ▶ Dans le cas où les λ^a, λ^b et λ^c sont Q-indépendants nous avons un nuage de résonances.
- ▶ à droite de E_0 , il y a une zone sans résonances de plus en plus nette, qui correspond à la propriété de non-capture pour $E > E_0$.
- ▶ à gauche de E_0 , il y a beaucoup plus de résonances correspondant à la propriété de capture en dessous de l'énergie E_0 .

II.4 États résonants

Dans cette section, nous donnons une caractérisation des états résonants dans le cadre d'un point fixe hyperbolique avec des orbites homoclines et surtout les décrire dans une situation « standard ».

Soit P l'opérateur de Schrödinger donné par (II.1) avec le potentiel V non-globalement analytique, vérifiant (A.II.1).

Définition II.16. Soient $z \in \mathcal{C}_\theta \cap \mathbf{Res}(P)$ et $0 \neq u \in H^2(\mathbb{R}^d)$. Nous disons que u est un état résonant de P associé à la résonance z si et seulement si $(P_\theta - z)u = 0$.

Soient $\theta = h|\ln h|$ et $R > 0$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d; [0, 1])$ telle que $\chi = 1$ dans un voisinage de 0 suffisamment grand. Nous supposons que $P_\theta = P$ près de support de χ . Alors, il existe $C > 0$, pour tout état résonant u associé à la résonance $z \in D(E_0, Rh)$, nous avons

$$\|\chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq h^{-C} \|\chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

pour h suffisamment petit. Voir [xxii, Proposition D.1]. Ici le point fixe hyperbolique est $(0, 0)$ et \mathcal{C}_θ est le secteur donné par la figure 1.2.

Rappel du cadre géométrique : Nous rappelons très brièvement le cadre géométrique, qui est celui de la section II.2 et nous introduisons certaines quantités.

- ▶ L'ensemble homocline \mathcal{H} est un nombre fini d'orbites homoclines sur lesquelles Λ_+ et Λ_- se croisent transversalement.
- ▶ Les orbites homoclines sont notées γ_k , $k = 1, \dots, K$.
- ▶ Pour chaque courbe γ_k , nous lui associons son action $A_k = \int_{\gamma_k} \xi \, dx$ et le déterminant de Maslov

$$\mathcal{M}_k^- = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\left| \det \frac{\partial x_k(t, y)}{\partial(t, y)} \Big|_{t=s, y=0} \right|} \exp \left(-s \left(\sum_{j=1}^d \frac{\lambda_j}{2} - \lambda_1 \right) \right).$$

Soit $\rho_-^k = (x_-^k, \xi_-^k) = \gamma_k(t_-^k)$ fixé près du point $(0, 0)$. Nous désignons par Λ_+^1 l'évolué de Λ_+^{loc} par le flot hamiltonien après un tour le long de \mathcal{H} . Si t_-^k est choisi suffisamment grand, alors ρ_-^k appartient à Λ_+^1 et cette variété se projette proprement sur l'espace des x , au voisinage de ρ_-^k . Alors, il existe une unique fonction génératrice, notée $\varphi_+^1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, de Λ_+^1 c.-à-d. $\Lambda_+^1 = \{(x, \nabla \varphi_+^1(x))\}$ définie près de x_-^k avec la normalisation

$$\varphi_+^1(x_-^k) = \int_{\gamma_k([-\infty, t_-^k])} \xi \cdot dx.$$

Enfin, nous définissons le déterminant de Maslov en t par

$$\mathcal{D}_k(t) = \sqrt{\left| \det \frac{\partial x_k(s, y)}{\partial(s, y)} \Big|_{s=t, y=0} \right|},$$

II.4.1 Description des états résonants

Nous énonçons le résultat qui décrit les états résonants dans ce cadre, voir [xxii, Theorem 7.3]

Théorème II.17 (Description des états résonants). *Nous supposons que les hypothèses (A.II.1)–(A.II.5) sont vérifiées. Fixons $C > 0$. Soit $v = v(h)$ une famille d'états résonants normalisés associés aux résonances $z = z(h) \in \text{Box}^- := E_0 + [-Ch, Ch] + i[-D_0h - C\frac{h}{|\ln h|}, h]$.*

Alors, nous pouvons trouver $h^M \leq c(h) \leq h^{-M}$ pour un certain $M > 0$, tel que $u = cv$ possède les propriétés suivantes :

- ▶ *Le microsupport de u est inclus dans $\{(0, 0)\} \cup \Lambda_+ = \Lambda_+$.*
- ▶ *La fonction u est dans $\mathcal{J}(\Lambda_+, 1)$ microlocalement près de tout point de \mathcal{H} . Alors*

$$u(x, h) = e^{-\frac{i}{h} A_k} e^{i\frac{z-E_0}{h} t_-^k} \frac{\mathcal{M}_k^-}{\mathcal{D}_k(t_-^k)} a_-^k(x, h) e^{i\varphi_+^1(x)/h},$$

microlocalement près de ρ_-^k , pour un certain $a_-^k \in S(1)$.

- ▶ *Soit $\mathcal{A}_0(h) = (\mathcal{A}_0^1(h), \dots, \mathcal{A}_0^K(h)) \in \mathbb{C}^K$ définie par $\mathcal{A}_0^k(h) = a_-^k(x_-^k, h)$. Ce K -vecteur satisfait l'équation suivante :*

$$\left(h^{\frac{S(z, h)}{\lambda_1} - \frac{1}{2}} \mathcal{Q}(z, h) - 1 \right) \mathcal{A}_0(h) = o(1),$$

quand h tend vers 0, avec la normalisation $\|\mathcal{A}_0(h)\|_{\ell^2} = 1$.

Dans le théorème précédent, $\|\cdot\|_{\ell^2}$ est la norme euclidienne sur \mathbb{C}^K et $\mathcal{J}(\Lambda_+, 1)$ est l'ensemble des distributions lagrangiennes associées à la variété Λ_+ dont le symbole est dans $S(1)$.

Revenons à l'exemple introduit dans la sous-sous-section II.2.2.2 pour expliquer le phénomène de vibration.

Exemple : Deux courbes homoclines en dimension $d = 2$, et $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$. Le potentiel est illustré dans la partie de dessus de la figure II.3. Les deux courbes d'accumulation sont décrites par :

$$\text{Im } \sigma = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{|\ln h|} \begin{cases} C_k + \mathcal{O}(|\text{Re } \sigma|^{-1}) & \text{quand } \text{Re } \sigma \rightarrow -\infty, \\ C_{\widehat{12}} + \mathcal{O}(|\text{Re } \sigma|^{-1}) & \text{quand } \text{Re } \sigma \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

avec

$$C_k = \lambda \ln \left(\frac{\mathcal{M}_k^+}{\mathcal{M}_k^-} \sqrt{\frac{|g_-^k|}{|g_+^k|}} \right) \quad \text{et} \quad C_{\widehat{12}} = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{\lambda}{2} \left| \ln |\cos(x_1, x_2)| \right|.$$

Rappelons que $\sigma = \frac{E-E_0}{h}$. Nous supposons en plus que $C_1 \neq C_2$.

Quand $\tau \rightarrow -\infty$: les valeurs propres μ_1, μ_2 de $\widehat{Q}(\tau, h)$ sont simples, dont le module vérifie :

$$|\mu_k| = e^{C_k/\lambda} + o_{\tau \rightarrow -\infty}(1).$$

De plus, il existe une base de vecteurs propres normés f_1, f_2 de $\widehat{Q}(\tau, h)$ de la forme

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o_{\tau \rightarrow -\infty}(1) \quad \text{et} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o_{\tau \rightarrow -\infty}(1),$$

uniformément par rapport à h .

Donc les états résonants associés aux résonances proche de $z_{q,k}(\tau)$ sont principalement localisés sur la courbe caractéristique $\pi_x(\gamma_k)$, c.-à-d. leur symbole est elliptique près de cette trajectoire et « très petit » au voisinage de la deuxième dont le comportement est $o_{\tau \rightarrow -\infty}(1) + o_{h \rightarrow 0}^{\tau}(1)$ ² la deuxième trajectoire. Ce phénomène peut s'interpréter comme suit, pour les énergies inférieures à E_0 (mais assez proches), les deux trajectoires homoclines sont déconnectées et donc les résonances et les états résonants associés sont donnés par chaque trajectoire séparément.

Quand $\tau \rightarrow +\infty$: les deux valeurs propres μ_1, μ_2 vérifient

$$\mu_1 = -\mu_2 + o_{\tau \rightarrow +\infty}(1) \quad \text{et} \quad |\mu_k| = e^{C_{\widehat{12}}/\lambda} + o_{\tau \rightarrow +\infty}(1).$$

De plus il existe une base de vecteurs propres normés g_1, g_2 de $\widehat{Q}(\tau, h)$ de la forme

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + o_{\tau \rightarrow -\infty}(1) \quad \text{et} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} + o_{\tau \rightarrow -\infty}(1),$$

avec $\alpha = \alpha(\tau, h)$, de module non nul, donné par

$$\begin{aligned} \alpha(\tau, h) &= -\sqrt{\frac{e^{iA_2/h} \tilde{\mu}_2(\tau)}{e^{iA_1/h} \tilde{\mu}_1(\tau)}} \\ &= -e^{i\frac{A_2-A_1}{2h}} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2^+ \mathcal{M}_1^-}{\mathcal{M}_2^- \mathcal{M}_1^+}} e^{-\frac{\pi}{4}(\nu_2-\nu_1)i} \sqrt{\frac{|g_-^1|}{|g_-^2|} \left(\frac{|g_+^2 \cdot g_-^1|}{|g_+^1 \cdot g_-^2|} \right)^{-\frac{1}{4} + i\frac{\tau}{2\lambda}}}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

2. $o_{h \rightarrow 0}^{\tau}(1)$ est une fonction qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ pour τ fixé.

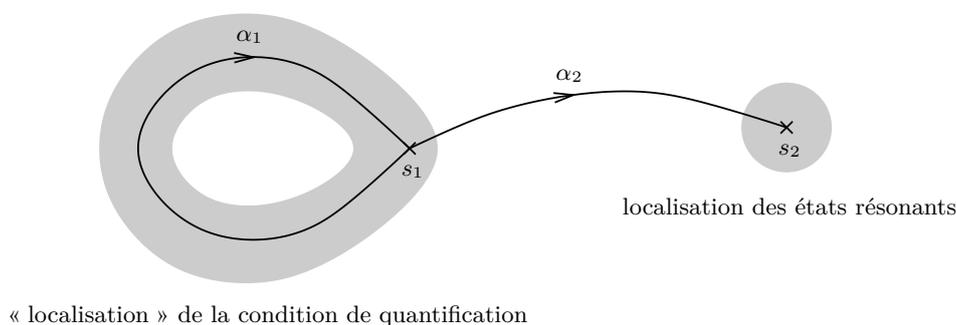


Figure II.8 – Une configuration d'ensemble capté.

Donc tout état résonant est « suffisamment » bien réparti sur les deux trajectoires homoclines γ_1, γ_2 . Ceci est en accord avec l'intuition que ces deux trajectoires se recombinent en une seule pour des énergies supérieures à E_0 (mais assez proches).

II.5 Commentaires et suite

Nous commençons par quelques illustrations de micro-localisation d'états résonants dans le cas des graphes mettant l'accent sur la nouveauté par rapport au comportement de ces derniers, en espérant que le lecteur aura envie de consulter la section 7 de notre travail [xxii]. Dans la section II.3 nous avons vu que les géométries près des sommets jouent un rôle crucial dans l'établissement de l'asymptotique des résonances. Plus précisément, les cycles minimaux ont un rôle primordial dans cette détermination.

Le premier exemple est de prendre un graphe avec deux sommets s_1, s_2 et une trajectoire homocline, noté α_1 , associée au sommet s_1 et une seconde hétérocline, notée α_2 , qui part de s_1 vers s_2 . Cette situation géométrique ne peut pas être obtenue dans le cadre de l'opérateur de Schrödinger parce qu'elle n'est pas symétrique. Mais à partir d'un certain opérateur de Schrödinger nous pouvons construire une telle géométrie en utilisant un potentiel absorbant complexe pour éliminer la deuxième orbite hétérocline. Les résonances « proche » du réel sont déterminées par le cycle $\gamma = \{\alpha_1\}$ indépendamment de ce qui se passe au sommet s_2 car dans cette configuration, il y a qu'un seul cycle (minimal) donné par $\{\alpha_1\}$. Maintenant, en utilisant la propriété qu'un sommet peut amplifier les fonctions dans le noyau de $P - E$ par une puissance négative de h , nous réalisons la situation suivante : Les résonances sont déterminées par le cycle $\{\alpha_1\}$ alors que les états résonants correspondants sont micro-localisés « en » s_2 . Voir figure II.8.

Dans la figure II.9, nous donnons d'autres géométries où les (pseudo-)résonances « proche » du réel sont toujours données par le cycle minimal $\{\alpha_1\}$ -situé à gauche dans chaque représentation- et dont la micro-localisation des états résonants est différente suivant la situation.

Il y a beaucoup d'autres situations très intéressantes à étudier et à exposer mais nous nous

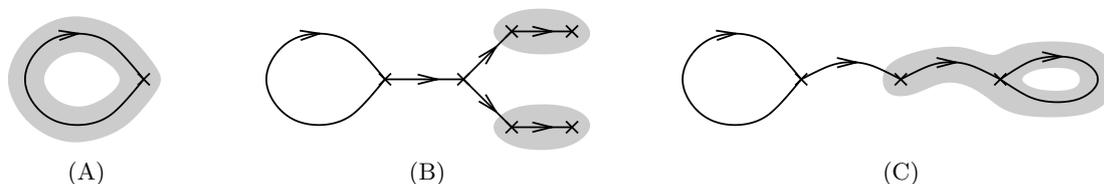


Figure II.9 – D’autres géométries avec les mêmes (pseudo)-résonances que la figure II.8 mais avec différentes régions de micro-localisation des états résonants correspondants (en gris).

arrêtons ici. Cette panoplie de constatations et d’arguments nous permettra de regarder des situations nouvelles de plus en plus « inhabituelles » (que nous devons rédiger!).

Nous terminons par ce que nous avons déjà dit dans l’introduction générale, avec la stratégie développée surtout dans [xxi] et [xix] et exposée dans ce chapitre et le précédent, nous pouvons traiter d’autres situations géométriques bien sûr dans le cas où le potentiel est non-globalement analytique, par exemple le cas où l’ensemble capté est une trajectoire fermée hyperbolique et comparer avec le résultat de C. Gérard et J. Sjöstrand établi dans le cas où le potentiel est analytique. Ainsi que le cas où l’ensemble capté est un point critique non-dégénéré (non-nécessairement un maximum). Mais à chaque fois, la notion de distribution lagrangienne associée à la variété sortante Λ_+ doit être remplacé par une classe de fonctions appropriée.

Références bibliographiques

- [BC63] R. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-difference equations*. Academic Press, New York-London, 1963.
- [CdVP94] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique. II. Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 61(3) :347–367, 1994.
- [FR98] S. Fujiié and T. Ramond. Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 69(1) :31–82, 1998.
- [Lan31] R. E. Langer. On the zeros of exponential sums and integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37(4) :213–239, 1931.

Chapitre III

Opérateurs de Schrödinger périodiques perturbés et résonances.

Articles présentés dans le chapitre III

- [xii] M. Dimassi and M. Zerzeri, *A time-independent approach for the study of spectral shift function*. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 350 (2012), n^{os} 7-8, p. 375–378.
- [xi] M. Dimassi and M. Zerzeri, *Spectral shift function for slowly varying perturbation of periodic Schrödinger operators*. Cubo, A Mathematical Journal, vol. 14 (2012), n^o 1, p. 29–47.
- [viii] M. Dimassi and M. Zerzeri, *Spectral shift function for perturbed periodic Schrödinger operators. The large-coupling constant limit case*. Asymptotic Analysis, vol. 75 (2011), n^{os} 3-4, p. 233–250.
- [ii] M. Dimassi and M. Zerzeri, *A local trace formula for resonances of perturbed periodic Schrödinger operators*. J. Funct. Anal. 198 (2003), n^o 1, p. 142–159.

Mots-clés et phrases : opérateur de Schrödinger périodique, fonction de décalage spectral, développement asymptotique, résonance, une formule de trace locale, théorème d'absorption limite.

Classification mathématique par matières (2010) : 81Q10, 35P20, 35P99, 47A40, 47A55, 47A60, 47N50, 81Q15.

III.1 Introduction et préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons des résultats spectraux concernant des perturbations particulières d'opérateurs de Schrödinger périodiques. En fait dans les travaux [ii, viii, xi, xii] nous considérons deux sortes de perturbations : celles à variations lentes et à grandes constantes de couplages. Nous nous intéressons à la fonction de décalage spectral (en anglais, Spectral Shift Function=SSF) dans ce cadre, voir la définition ci-dessous dans le cas général (III.2). C'est un objet très important dans la théorie spectrale des perturbations. Il permet de décrire « le comportement » du spectre de l'opérateur perturbé par rapport à celui du modèle de départ correspondant (pour nous, c'est l'opérateur de Schrödinger périodique), au voisinage à la fois du spectre discret et continu de ce dernier. Ainsi la fonction de décalage spectral peut être considéré comme une généralisation de la fonction de comptage des valeurs propres, voir (III.3). Nous donnons un développement asymptotique complet de la dérivée de la fonction de décalage spectral en puissances du paramètre semi-classique correspondant, au sens faible c.-à-d. « *au sens des distributions* » ; et au sens fort c.-à-d. « *ponctuel* » sous une condition de **non-capture**. Dans ce dernier cas, un théorème d'absorption limite est établi. Voir [xi, viii].

Nous présentons une formule de trace locale pour les résonances sous une hypothèse d'analyticité de la perturbation dans ce cadre et comme application nous détaillons un résultat sur la minoration du nombre de résonances sous certaines hypothèses. Ici nous nous restreignons au cas des perturbations lentes sachant que le deuxième cas est microlocalement comparable au premier près d'une énergie donnée modulo une construction très explicite d'un potentiel correspondant rentrant dans le premier cadre.

Dans la suite de cette section, nous introduisons les objets que nous allons étudier, nous rappelons les propriétés spectrales bien-connues sur les opérateurs de Schrödinger périodiques et nous précisons les outils utilisés.

Commençons par un tout petit rappel très important pour la suite : Soit H un opérateur borné, autoadjoint défini sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Pour tout $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, l'opérateur $g(H)$ est bien défini par le théorème spectral et nous pouvons exprimer $g(H)$ par :

$$g(H) = -\frac{1}{\pi} \int \bar{\partial} \tilde{g}(z) (z - H)^{-1} L(dz), \quad (\text{III.1})$$

où $L(dz) = d\text{Re}(z)d\text{Im}(z) = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$,¹ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} et $\tilde{g} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$ une extension presque analytique² de g . L'intégrale dans (III.1) converge comme une intégrale de Riemann pour des fonctions à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, le nombre complexe \bar{z} est le conjugué de z .

2. Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Nous disons que $\tilde{g} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$ est une extension presque analytique de g si

(a) $\tilde{g}|_{\mathbb{R}} = g$, et

(b) pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que $|\bar{\partial} \tilde{g}(z)| \leq C_N |\text{Im}(z)|^N$,
où $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \text{Re}(z)} + i \frac{\partial}{\partial \text{Im}(z)} \right)$. Ici $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $i\text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$.

Cette formule (nommée la formule de B. Helffer et J. Sjöstrand) se généralise au cas d'opérateurs non-bornés et elle est très utile pour développer un calcul fonctionnel dans le cadre des opérateurs h -pseudodifférentiels (voir [HS90] et aussi [DS99, chapitre 8]). Elle repose essentiellement sur l'utilisation des extensions presque analytiques introduites par L. Hörmander [Hör69] - !je tiens à remarquer que ce polycopié est introuvable!³ - et par L. Nirenberg [Nir71], pour plus de détails voir [MS74]. La formule de B. Helffer et J. Sjöstrand exprime un lien direct entre la configuration du spectre de l'opérateur considéré et le comportement de sa résolvante près de cette dernière.

La fonction de décalage spectral :

Cadre général : Soient H_0, H_1 deux opérateurs autoadjoints (peuvent-êre non-bornés avec même domaine) définies sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On suppose que :

(A.III.1)_g il existe $E_0 \in \mathbb{R} \setminus (\sigma(H_0) \cup \sigma(H_1))$ et il existe un entier $N \geq 1$ tel que $[(E_0 - H_1)^{-N} - (E_0 - H_0)^{-N}]$ est de classe trace.

Sous cette hypothèse la fonction de décalage spectral est bien définie, modulo une constante près, comme une distribution sur \mathbb{R} , par la relation suivante :

$$\mathrm{tr} [f(H_1) - f(H_0)] = \int_{\mathbb{R}} \zeta(\mu) f'(\mu) d\mu =: -\langle \zeta'(\cdot), f(\cdot) \rangle, \quad (\text{III.2})$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Nous disons que $\zeta(\cdot) := \zeta(\cdot; H_0, H_1)$ est la fonction de décalage spectral associée au couple (H_0, H_1) . Sous l'hypothèse (A.III.1)_g, la fonction de décalage spectral, $\zeta(\cdot)$ est localement intégrable.

Si de plus, les deux opérateurs H_0, H_1 sont bornés inférieurement alors ζ est définie de manière unique en posant $\zeta(-\mu) = 0$ pour $\mu \gg 1$. Dans ce cas, fixons $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_0 < \inf \sigma(H_0)$ ⁴. Le spectre de H_1 dans $] -\infty, \mu_0[$ est discret⁵ (prenons par exemple $N = 1$ dans l'hypothèse (A.III.1)_g).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b \leq \mu_0$ bien choisis. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(] -\infty, \mu_0[)$, égale à 1 sur

3. La réponse de Johannes n'a pas tardé : Depuis cet été il se trouve sur le web, [http://portal.research.lu.se/portal/en/publications/fourier-integral-operators\(7730e675-f8df-4464-9cfe-2faeb4619441\).html](http://portal.research.lu.se/portal/en/publications/fourier-integral-operators(7730e675-f8df-4464-9cfe-2faeb4619441).html)

4. La borne inférieure du spectre de H_0 , notée $\inf \sigma(H_0)$, existe car l'opérateur H_0 est borné inférieurement.

5. Le spectre discret d'un opérateur A , noté $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres isolées de A de multiplicité *finie*. Ici A est un opérateur fermé sur un espace de Hilbert.

$[a, b]$ et $\text{supp}(f) \cap \sigma(H_1) \subset [a, b]$. Alors,

$$\begin{aligned}
 -\langle \zeta'(\cdot), f(\cdot) \rangle &= \text{tr}[f(H_1) - f(H_0)] \\
 &= \text{tr}[f(H_1)] \quad (\text{par le théorème spectral } f(H_0) = 0) \\
 &= \sum_{\lambda_j \in \sigma(H_1) \cap \text{supp}(f)} f(\lambda_j) \\
 &= \sum_{\lambda_j \text{ v.p de } H_1 \cap [a-\varepsilon, b+\varepsilon]} 1 \quad (\text{pour un certain } \varepsilon) \\
 &= \#\{\text{v.p de } H_1 \text{ dans } [a, b]\}.
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

Donc $-\zeta(\cdot; H_0, H_1)$ coïncide avec fonction de comptage des valeurs propres de l'opérateur H_1 dans l'intervalle $] -\infty, \mu_0[$.

Modèle de départ : Opérateur de Schrödinger périodique

Dans ce paragraphe, nous décrivons quelques propriétés classiques de la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger périodique, voir [RS78, Šub79, Skr85b, Skr85a, Sjö91].

Soit (e_1, \dots, e_d) une base de \mathbb{R}^d . Nous considérons $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}e_i$ le réseau de \mathbb{R}^d associé à la base (e_1, \dots, e_d) . Le réseau dual Γ^* de Γ est donné par :

$$\Gamma^* := \{\gamma^* \in \mathbb{R}^d; \langle \gamma | \gamma^* \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}, \forall \gamma \in \Gamma\}. \tag{III.4}$$

Le domaine fondamental de Γ (respectivement de Γ^*) est donné par E (respectivement par E^*). En physique du solide le domaine E^* est connu sous le nom de la première zone de Brillouin. En identifiant les côtés opposés de E (resp. de E^*), nous obtenons le tore plat $\mathbb{T} = \mathbb{R}^d / \Gamma$ (resp. $\mathbb{T}^* = \mathbb{R}^d / \Gamma^*$).

Soit V_{per} un potentiel \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d , à valeurs réelles et Γ -périodique.

Pour tout $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^d$, nous définissons l'opérateur $P[k]$ sur $L^2(\mathbb{T})$ par :

$$P[k] := (D_y + k)^2 + V_{\text{per}}(y) = \sum_{j=1}^d \left(-i \frac{\partial}{\partial y_j} + k_j \right)^2 + V_{\text{per}}(y).$$

L'opérateur $P[k]$ est non-borné de domaine $H^2(\mathbb{T})$, autoadjoint et semi-borné inférieurement. L'opérateur $P[k]$ est à résolvante compacte d'où l'existence d'une base orthonormée de fonctions propres $\Phi_n(\cdot, k) \in H^2(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, dites « fonctions de Bloch ». Soient $-\infty < \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \dots \leq \lambda_p(k) \leq \dots \rightarrow +\infty$, les valeurs propres correspondantes répétées selon leur ordre de multiplicité et qui s'accroissent à l'infini. L'opérateur $P[k]$ vérifie l'identité suivante :

$$e^{-iy \cdot \gamma^*} P[k] e^{iy \cdot \gamma^*} = P[k + \gamma^*], \quad \forall \gamma^* \in \Gamma^*.$$

Alors pour tout $p \geq 1$, la fonction $k \mapsto \lambda_p(k)$ est Γ^* -périodique.

Pour tout $p \geq 1$ fixé, par la théorie ordinaire des perturbations, la $p^{\text{ième}}$ fonction bande

$k \mapsto \lambda_p(k)$ est continue. De plus, elle est analytique au voisinage de tout point $k_0 \in \mathbb{T}^*$ tel que $\lambda_p(k_0)$ est une valeur propre simple de $P(k_0)$. L'intervalle fermé, borné $\Lambda_p := \lambda_p(\mathbb{T}^*)$ est appelé $p^{\text{ième}}$ bande de Bloch. Voir [RS78], [Sjö91] et [Skr85b, Skr85a].

Soit l'opérateur autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, non-borné de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$ suivant :

$$P_0 = -\Delta_x + V_{\text{per}}(x), \quad \text{où } \Delta_x = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \quad (\text{III.5})$$

Le spectre de P_0 est absolument continu (voir [Tho73]) et il est constitué de bandes Λ_p , $p = 1, 2, \dots$. En effet, $\sigma(P_0) = \sigma_{\text{ac}}(P_0) = \bigcup_{p \geq 1} \Lambda_p$, voir aussi [Šub79].

Définition III.1. Soient $e \in \mathbb{R}$ et $F(e) = \{k \in \mathbb{T}^*; e \in \sigma(P[k])\}$ la surface de Fermi correspondante.

- a) Nous disons que $e \in \sigma(P_0)$ est une énergie simple si et seulement si e est une valeur propre simple de $P[k]$, pour tout $k \in F(e)$.
- b) Nous supposons que e est une énergie simple de P_0 et soit $\lambda(k)$ l'unique valeur propre définie dans un voisinage de $F(e)$ tel que $\lambda(k) = e$, pour tout $k \in F(e)$. Nous disons que e est une énergie non-critique de P_0 si $d_k \lambda(k) \neq 0$ pour tout $k \in F(e)$.

En dimension 1, la surface de Fermi $F(e)$ est la réunion d'un nombre fini de points.

Nous terminons ce paragraphe en rappelant quelques propriétés bien-connues de la densité d'états intégrée associée à P_0 , voir [Šub79]. La densité d'états intégrée ρ est définie comme suit :

$$\rho(e) := \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{p \geq 1} \int_{\{k \in E^*; \lambda_p(k) \leq e\}} dk. \quad (\text{III.6})$$

Le spectre de P_0 est absolument continu donc la mesure ρ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ et la densité états correspondante, $\frac{d\rho}{de}(e)$, de P_0 est localement intégrable.

III.2 Résultats et quelques idées de preuves

Nous introduisons maintenant l'opérateur de Schrödinger périodique perturbé par un potentiel à variation lente :

$$P(h) = P_0 + \varphi(hx) = -\Delta_x + V_{\text{per}}(x) + \varphi(hx), \quad h > 0, \quad (\text{III.7})$$

où $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ qui vérifie les estimations suivantes :

(A.III.1) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\left| \partial_x^\alpha \varphi(x) \right| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-\delta - |\alpha|} \text{ uniformément par rapport à } x \in \mathbb{R}^d,$$

où C_α est une constante strictement positive dépendant uniquement de α .

L'opérateur $P(h)$ est autoadjoint, semi-borné inférieurement sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$. L'hypothèse (A.III.1) et la théorie des perturbations (Théorème de Weyl) donnent :

$$\sigma_{\text{ess}}(P(h)) = \sigma_{\text{ess}}(P_0) = \sigma(P_0) = \bigcup_{p \geq 1} \Lambda_p. \quad (\text{III.8})$$

Le premier résultat que nous présentons dans cette section est l'asymptotique faible (c.-à-d. « au sens des distributions ») de la dérivée de la fonction de décalage spectral $\zeta'_h(\mu) := \zeta'_h(\mu, P(h), P_0)$. Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné de \mathbb{R} .

Théorème III.2 (asymptotique faible). *Supposons que (A.III.1) est vérifiée avec $\boxed{\delta > d}$. Pour $f \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, l'opérateur $[f(P(h)) - f(P_0)]$ est de classe trace et nous avons :*

$$\text{tr} [f(P(h)) - f(P_0)] \sim h^{-d} \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(f) h^j, \quad \text{quand } h \searrow 0, \quad (\text{III.9})$$

avec

$$a_0(f) = (2\pi)^{-d} \sum_{p \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{E^*} [f(\lambda_p(k) + \varphi(x)) - f(\lambda_p(k))] dk dx. \quad (\text{III.10})$$

Les coefficients $f \rightarrow a_j(f)$ sont des distributions d'ordre finie $\leq j + 1$. Si de plus pour tout $\mu \in I$, μ est une énergie non-critique de P_0 alors $a_j(f) = -\langle \gamma_j(\cdot), f \rangle$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$. Ici les applications $\gamma_j(\mu)$ sont \mathcal{C}^∞ en $\mu \in I$. En particulier

$$\gamma_0(\mu) = \frac{d}{d\mu} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \rho(\mu) - \rho(\mu - \varphi(x)) \right\} dx \right], \quad (\text{III.11})$$

où ρ est la densité d'états intégrée donnée par (III.6).

Croquis de la démonstration du théorème III.2 : Par la méthode du hamiltonien effectif, l'étude du spectre de $P(h)$ peut être réduite à l'étude spectrale d'un système d'opérateurs h -pseudodifférentiels. En effet, pour z dans un petit voisinage complexe de I , l'inversibilité de $(z - P(h))$ est contrôlée par celle de $E_{-+}(z, h)$, qui est un système d'opérateurs h -pseudo-différentiels définies sur $L^2(\mathbb{R}^d/\Gamma^*)$ obtenu à partir de l'identité suivante :

$$(z - P(h))^{-1} = E(z) + E_+(z)E_{-+}(z, h)^{-1}E_-(z)$$

où $E(z)$, E_{-+} et $E_-(z)$ sont holomorphes pour z dans un petit voisinage complexe de I , voir [SZ07, identité (3.15)]. En utilisant, les résultats bien-connus du calcul h -pseudodifférentiel adapté à notre cas, nous obtenons l'asymptotique (III.9) avec les quantités explicites des coefficients a_j , $j \in \mathbb{N}$, voir [DS99, chapitres 7-9]. Notons que l'hypothèse (A.III.1) avec $\boxed{\delta > d}$ assure que l'opérateur $[f(P(h)) - f(P_0)]$ est de classe trace, voir [DS99, chapitre

9]. Pour la deuxième partie du théorème, l'hypothèse que μ est non-dégénérée pour tout $\mu \in I$ nous permet de faire un changement de variables. \square

Maintenant, nous exposons le résultat le plus pertinent concernant la dérivée de la fonction de décalage spectral $\zeta'_h(\mu) := \zeta'_h(\mu, P(h), P_0)$, c'est l'asymptotique ponctuel. Pour cela nous avons besoin d'ajouter d'autres hypothèses :

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Supposons que

(A.III.2) Pour tout $\mu \in [a, b]$, μ est une énergie non-critique de P_0 .

Supposons que **(A.III.2)** est vérifiée. Pour tout $\mu \in [a, b]$, nous considérons $\lambda(k)$ l'unique valeur propre définie sur un voisinage de $F(\mu)$ telle que $\lambda(k) = \mu$.

Nous supposons que pour tout $(k, r) \in \mathbb{T}^* \times \mathbb{R}^d$ vérifiant $\mu = \lambda(k) + \varphi(r) \in \sigma(P_0) \cap [a, b]$, μ est une énergie simple, et tel que :

(A.III.3) $|\nabla\lambda(k)|^2 - r\nabla\varphi(r)\Delta\lambda(k) > 0$, pour tout (k, r) tels que $\lambda(k) + \varphi(r) \in [a, b]$.

Notons que l'hypothèse **(A.III.2)** est vérifiée près de la borne inférieure du spectre de P_0 . De plus si nous supposons **(A.III.2)** alors la condition **(A.III.3)** est satisfaite si $\|\varphi\|_\infty + \|x\nabla\varphi\|_\infty \ll 1$, (voir [RS78], [Skr85b, Skr85a]). L'hypothèse **(A.III.3)** est la condition de non-capture. Cette hypothèse permet d'avoir un théorème d'absorption limite, voir [xi, Lemma 3.10].

Théorème III.3 (asymptotique ponctuel). *Supposons que **(A.III.2)**, **(A.III.3)** et **(A.III.1)** avec $\boxed{\delta > d}$ sont vérifiées. Alors la dérivée de la fonction de décalage spectral $\zeta'_h(\mu) := \zeta'_h(\mu, P(h), P_0)$ admet un développement asymptotique complet en puissance de h donné par :*

$$\zeta'_h(\mu) \sim h^{-d} \sum_{j \geq 0} \gamma_j(\mu) h^j \quad \text{as } h \searrow 0, \quad (\text{III.12})$$

uniformément pour $\mu \in [a, b]$.

Les coefficients $(\gamma_j(\mu))_{j \geq 0}$ sont donnés par le théorème III.2. De plus, ce développement asymptotique est dérivable à tout ordre par rapport à la variable μ .

Croquis de la démonstration du théorème III.3 : Le point de départ est le même que celui de la preuve du théorème III.2, c.-à-d. commencer par un problème de Grushin (méthode du hamiltonien effectif) en projetant sur les espaces propres associées aux valeurs propres de Floquet intervenant près des énergies considérées. Cependant, dans le cas d'une bande simple -garantie par l'hypothèse **(A.III.2)**-, nous montrons que

$$E_{-+}(z, h) = z - \left(\lambda(k) + \varphi(r) + hK_1(k, r) + h^2K_2(k, r; z, h) \right),$$

où K_1 et K_2 sont dans des espaces de symboles graduées dépendant de δ (la vitesse de décroissance de la perturbation) et K_2 est holomorphe par rapport à z dans un petit voisinage complexe Ω de l'intervalle $[a, b]$. Maintenant, nous considérons $s \in \Omega \cap \mathbb{R}$ comme un paramètre, avec l'hypothèse de non-capture **(A.III.3)**, nous pouvons appliquer l'approche de D. Robert et H. Tamura au hamiltonien $B_s(k, -hD_k; h) := \lambda(k) +$

$\varphi(-hD_k) + hK_1^w(k, -hD_k) + h^2G^w(k, -hD_k; s, h)$ où G possède les mêmes propriétés que K_2 , et nous obtenons théorème III.3. Ici, nous utilisons l'argument crucial suivant : L'hypothèse (A.III.3) implique que l'intervalle $[a, b]$ est disjoint de l'ensemble des énergies captives de l'hamiltonien classique associé à B_s pour tous s dans l'ensemble compact $\Omega \cap \mathbb{R}$. En fait, Les opérateurs correspondants aux symboles $r \cdot K_i(k, r)$, ($i = 1, 2$) sont bornés uniformément pour $s \in \Omega \cap \mathbb{R}$, de plus le symbole principal de B_s ne dépend pas de s . \square

Si nous voulons aller plus loin dans l'analyse spectrale de l'effet de la perturbation sur les bandes de Bloch de P_0 et surtout décortiquer ce qui se passe dans un voisinage complexe de ces bandes, le mieux est d'établir une formule de trace locale à la J. Sjöstrand [Sjö97a, Sjö01]. Pour cela, nous avons besoin de définir les résonances dans ce cadre précis et pour les mettre en évidence « techniquement » nous supposons que la perturbation lente φ admet une extension analytique dans un voisinage complexe de \mathbb{R}^d , c.-à-d.

(A.III.4) Il existe a et C tels que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ admet un prolongement analytique dans $D(a) := \{X \in \mathbb{C}^d; |\operatorname{Im}(X)| \leq a < \operatorname{Re}(X) >\}$ et

$$|\varphi(X)| \leq C \langle X \rangle^{-\delta}, \text{ uniformément par rapport à } X \in D(a), \quad (\text{III.13})$$

où $\delta > 0$ et $\langle X \rangle = (1 + |X|^2)^{\frac{1}{2}}$.

L'hypothèse (A.III.4) et la formule de Cauchy impliquent que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_\alpha > 0$ tel que

$$|\partial_X^\alpha \varphi(X)| \leq C_\alpha \langle X \rangle^{-\delta - |\alpha|}, \text{ uniformément par rapport à } X \in D(a).$$

Pour définir les résonances, nous utilisons la méthode de la déformation spectrale introduite par E. Balslev et J-M. Combes [BC71] (voir aussi [AC71]). En fait, nous identifions les résonances de $P(h)$ dans un voisinage d'un niveau d'énergie μ fixé (non-critique) avec les valeurs propres complexes d'un opérateur non-autoadjoint $P(t, h)$ obtenu à partir de $P(h)$ par une déformation spectrale. Ici $t \in \mathbb{C}$ est le paramètre de dilatation, appartenant à petit voisinage complexe de l'origine. Dans notre cas, la dilatation se fait en moment ξ à la H. Cycon [Cyc85], voir aussi [HS96]. La définition des résonances dans ce cadre a été introduite par Dimassi [Dim02] pour prouver l'existence des résonances de forme au voisinage des extrémités des bandes de Bloch. Donnons dans la suite un petit aperçu rapide pour définir les résonances dans cette situation. Considérons le champ de vecteurs $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ et Γ^* -périodique. Pour tout $t \in]-t_0, t_0[$ (t_0 à choisir), nous introduisons la déformation spectrale \mathcal{U}_t définie par : $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left[\mathcal{U}_t u \right](x) := \mathcal{F}_h^{-1} \left[J_t^{\frac{1}{2}}(\cdot) \mathcal{F}_h(u)(v_t(\cdot)) \right](x), \quad (\text{III.14})$$

où $v_t(x) = x - tv(x)$ et $J_t(x)$ son Jacobien. Ici \mathcal{F}_h est la transformation de Fourier semi-classique :

$$\left[\mathcal{F}_h u \right](\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{h}x\xi} u(x) dx, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

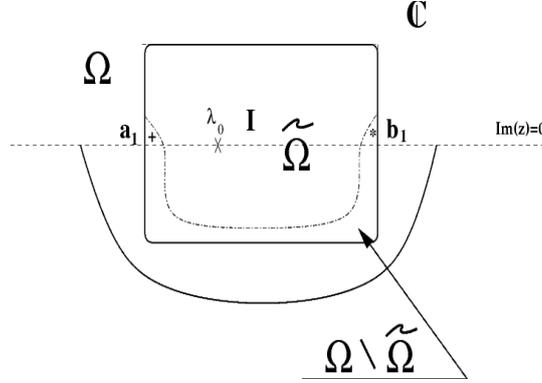


Figure III.1 – Dilatation analytique modifiée et cadre générale du théorème III.6.

Ici $+ := a + i\epsilon$, $* := b + i\epsilon$ et $J = [a_1, b_1]$.

où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace de Schwartz.

Soit $\hat{P}(h) := -h^2\Delta + V(\frac{y}{h}) + \varphi(y)$, obtenu à partir de $P(h)$ par le changement de variables $y = hx$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme III.4 ([Dim02, Proposition 2.8]). *Supposons que l'hypothèse (A.III.4) est vérifiée. Alors la famille d'opérateurs autoadjoints $P(t, h) := \mathcal{U}_t \hat{P}(h) \mathcal{U}_t^{-1}$ défini pour $t \in]-t_0, t_0[$ s'étend en une famille analytique d'opérateurs de type A^6 sur $D(t_0) := \{t \in \mathbb{C}; |t| < t_0\}$, avec le domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$.*

Soit $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Désormais, nous supposons que μ_0 satisfait l'hypothèse (A.III.2), c.-à-d. l'énergie μ_0 de P_0 est non-critique.

Proposition III.5 (définition des résonances). *Supposons que la perturbation φ vérifie (A.III.4). Alors il existe un voisinage complexe Ω de μ_0 tel que pour $t \in i]0, t_0[$, $t_0 > 0$ assez petit, le spectre de $P(t, h)$ dans Ω est discret, il est constitué de valeurs propres de multiplicité finie. De plus, ces valeurs propres sont indépendantes du paramètre de dilatation t . Par définition ce sont les résonances de $P(h)$ dans Ω .*

Soit $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ un ouvert relativement compact. Notons que $I = \tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}$ et $J = \Omega \cap \mathbb{R}$ sont des intervalles. Voir la figure III.1 :

La formule de trace locale est la suivante :

Théorème III.6. *Soient $\mu_0, \Omega, \tilde{\Omega}, I, J$ fixés comme ci-dessus. Supposons que la perturbation φ vérifie l'hypothèse (A.III.4) avec $[\delta > d]$. Alors pour h suffisamment petit, l'assertion suivante est vraie : Soit $g = g(z, h)$ une fonction holomorphe en $z \in \Omega$ et vérifiant $|g(z, h)| \leq 1$ pour $z \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(J)$, indépendante de h avec $\chi \equiv 1$ près de \bar{I} .*

6. Voir [Kat95, chapitre VII, section 2, page 375].

Alors, uniformément par rapport à g , on a :

$$\operatorname{tr}[(\chi g)(P(h)) - (\chi g)(P_0)] = \sum_{z \in \operatorname{Res}(P(h)) \cap \tilde{\Omega}_-} g(z) + \mathcal{O}(h^{-d}), \quad (\text{III.15})$$

où $\tilde{\Omega}_- = \tilde{\Omega} \cap \{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(w) \leq 0\}$. Ici $\operatorname{Res}(P(h))$ désigne l'ensemble des résonances de $P(h)$.

Croquis de la démonstration du théorème III.6 : Comme pour les preuves des résultats précédents, nous commençons par la méthode du hamiltonien effectif qui nous permet d'écrire la résolvante de $P(h)$ pour z dans un voisinage complexe de J comme suit :

$$(z - P(h))^{-1} = E(z) + E_+(z)E_{-+}(z, h)^{-1}E_-(z),$$

où $E(z)$, E_{-+} et $E_-(z)$ sont holomorphes pour z dans un petit voisinage complexe Ω de J , voir [SZ07, identité (3.15)]. De même pour P_0 ,

$$(z - P_0)^{-1} = E_0(z) + E_{0,+}(z)E_{0,-+}(z, h)^{-1}E_{0,-}(z),$$

où $E_0(z)$, $E_{0,-+}$ et $E_{0,-}(z)$ sont holomorphes pour z dans un petit voisinage complexe Ω de J . Soient g et χ fixés comme dans le théorème. Le choix du support de χ ainsi que l'estimation sur g en dehors de $\{\chi = 1\}$ avec la formule de Green nous donne (uniformément par rapport à g) :

$$\operatorname{tr}[(\chi g)(P(h)) - (\chi g)(P_0)] =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z=[a,b]+i\epsilon} g(z) \operatorname{tr}[E_{-+}(z, h)^{-1} \partial_z E_{-+}(z, h)^{-1} - E_{0,-+}(z, h)^{-1} \partial_z E_{0,-+}(z, h)^{-1}] dz + \mathcal{O}(h^{-d}),$$

où $\epsilon > 0$ petit fixé indépendamment de h tel que $a + i\epsilon$ et $b + i\epsilon$ sont dans $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$. Ici nous avons utilisé le fait que les applications $E(z)$, $E_0(z)$ sont holomorphes dans Ω . Pour $\operatorname{Im}(z) = \epsilon > 0$ les deux familles d'opérateurs dilatés $(E_{-+}^s(z, h))_{s \in \mathbb{C}, |s| \ll 1}$ et $(E_{-+}^s(z, h)^{-1})_{s \in \mathbb{C}, |s| \ll 1}$ sont analytiques de type \mathcal{A} . Ici $E_{-+}^s(z, h) = \mathcal{U}_s E_{-+}(z, h) \mathcal{U}_s^{-1}$ où \mathcal{U}_s est la déformation spectrale donnée par (III.14). Avec la cyclicité de la trace et le fait que \mathcal{U}_s est unitaire pour s réel, nous obtenons (uniformément par rapport à g) :

$$\operatorname{tr}[(\chi g)(P(h)) - (\chi g)(P_0)] =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z=[a,b]+i\epsilon} g(z) \operatorname{tr}[E_{-+}^s(z, h)^{-1} \partial_z E_{-+}^s(z, h)^{-1} - E_{0,-+}^s(z, h)^{-1} \partial_z E_{0,-+}^s(z, h)^{-1}] dz + \mathcal{O}(h^{-d}),$$

pour $s \in i]0, t_0[$. Le caractère compact de l'opérateur $(E_{-+}^s(z, h) - E_{0,-+}^s(z, h))E_{0,-+}^s(z, h)^{-1}$ nous permet de le décomposer en une somme de deux opérateurs, l'un de rang fini ($\mathcal{O}(h^{-d})$) et le deuxième de norme assez petite. Comme nous regardons près d'une énergie non-critique de P_0 alors P_0 n'a pas de résonances dans Ω et donc $E_{0,-+}^s(z, h)^{-1}$ est holomorphe dans Ω . En tenant compte de cette dernière remarque avec la cyclicité de la trace, nous

pouvons écrire la trace de $[(\chi g)(P(h)) - (\chi g)(P_0)]$ comme une intégrale de contour d'une fonction méromorphe dont les pôles sont donnés par les résonances de $P(h)$. Notons qu'au passage nous avons utilisé la caractérisation des résonances de $P(h)$ suivante :

$$z \text{ est une résonance de } P(h) \text{ dans } \Omega \iff 0 \in \sigma_{\text{disc}}(E_{-+}^s(z, h)).$$

et surtout que le nombre des résonances de $P(h)$ dans Ω sont $\mathcal{O}(h^{-d})$, ce qui nous permet de compléter le chemin de départ en un contour de Jordan. La dernière partie de la preuve repose essentiellement sur des arguments de la preuve classique de Lidskiĭ, voir [GK71, page 103, théorème 8.4]. \square

III.3 Minoration du nombre de résonances

Dans cette section nous présentons un résultat d'existence de résonance (et même plusieurs) sous une certaine condition sur la perturbation φ . Grosso modo, en partant d'une énergie μ_0 non-critique de P_0 , alors la densité d'états $\mu \mapsto \omega(\mu) := \frac{d\rho}{d\mu}(\mu)$ est analytique dans un petit voisinage \mathcal{U} de μ_0 (voir [Gér90, Theorem 4.4]) et nous choisissons une perturbation φ de telle sorte qu'elle pousse au moins un élément de ce voisinage vers une singularité de ω (produite par un croisement par exemple). C'est une « transcription » du résultat prouvé par J. Sjöstrand dans le cas d'opérateur de Schrödinger, voir [Sjö97b].

Nous rappelons que le terme principal de l'asymptotique de la fonction de décalage spectral au voisinage d'une énergie non-critique est donné par (III.11), c.-à-d.

$$\gamma_0(\mu) = \frac{d}{d\mu} \left[\int_{\mathbb{R}_x^d} \left\{ \rho(\mu) - \rho(\mu - \varphi(x)) \right\} dx \right] = \int_{\mathbb{R}_x^d} \left\{ \omega(\mu) - \omega(\mu - \varphi(x)) \right\} dx,$$

où $\omega(\mu) := \frac{d\rho}{d\mu}(\mu)$ est la densité d'états.

Fixons μ_0 une énergie non-critique de P_0 . D'après [Gér90, Theorem 4.4], il existe un voisinage \mathcal{U} de μ_0 tel que $\mu \mapsto \omega(\mu) := \frac{d\rho}{d\mu}(\mu)$ est analytique. Comme la perturbation φ décroît à l'infini (l'hypothèse (A.III.4)) alors, il existe un R_0 assez grand tel que pour tout $R > R_0$, la fonction $\int_{|x|>R} \left\{ \omega(\mu) - \omega(\mu - \varphi(x)) \right\} dx$ est analytique près de μ_0 . Donc pour $E \in \mathbb{R}$ et R suffisamment grand on a l'équivalence suivante :

$$E \in \text{suppsing}_a(\gamma_0) \iff E \in \text{suppsing}_a \left(\int_{|x|<R} w(s - \varphi(x)) dx \right).$$

Ici $\text{suppsing}_a(\gamma_0)$ est le support singulier analytique de la distribution γ_0 , voir [Sjö82].

Soient $\mu_0, \Omega, \tilde{\Omega}, I, J$ fixés comme dans le théorème III.6 et la perturbation φ vérifie l'hypothèse (A.III.4) avec $\boxed{\delta > d}$. Dans le théorème suivant, nous donnons une minoration du nombre de résonances de $P(h)$ près de n'importe quel point du support singulier analytique de $\gamma_0(\cdot)$.

Théorème III.7. *Soit $E_0 \in \Omega \cap \text{suppsing}_a(\gamma_0)$. Alors pour tout voisinage complexe indépendant de h , $\tilde{\Omega}$ de E_0 , il existe $h_0 = h(\tilde{\Omega}) > 0$ suffisamment petit et $C = C(\tilde{\Omega}) > 0$ assez grand tels que pour tout $h \in]0, h_0[$,*

$$\#\left[\text{Res}(P(h)) \cap \tilde{\Omega}\right] \geq \frac{1}{C(\tilde{\Omega})} \cdot h^{-d}.$$

Croquis de la démonstration du théorème III.7 : la preuve du théorème est une conséquence directe des théorèmes III.2 et III.6 ainsi qu'une construction très fine de fonctions localisantes (plutôt micro-localisantes) près du point « singulier » (plutôt le long des directions au dessus du point singulier). Pour la beauté de la construction ainsi que l'utilisation d'outils d'analyse microlocale, nous détaillons les éléments de la preuve. Soit $E_0 \in \Omega \cap \text{suppsing}_a(\gamma_0)$. Alors $(E_0, 1)$ et $(E_0, -1)$ appartiennent au front d'onde analytique de γ_0 , noté $\text{WF}_a(\gamma_0)$ ⁷, car γ_0 est réelle. En utilisant la définition du front d'onde analytique par la transformation F.B.I (Fourier-Bros-Iagolnitzer), voir [Sjö82, chapitre 6, page 39], il existe des suites $(\alpha_j, \beta_j) \rightarrow (E_0, 1)$, $\lambda_j \rightarrow +\infty$ et $\epsilon_j \rightarrow 0$ tels que

$$\left| \int (f_j \chi_0)(E) \gamma_0(E) dE \right| \geq e^{-\epsilon_j \lambda_j}, \quad (\text{III.16})$$

où $f_j(E) = e^{i\lambda_j(\alpha_j - E)\beta_j} e^{-\frac{\lambda_j}{2}(\alpha_j - E)^2}$ et χ_0 est une fonction troncature définie dans un petit voisinage réel de E_0 , $\equiv 1$ près de E_0 .

Soit a une petite constante positive. Nous posons $\Omega_0 :=]E_0 - 2a, E_0 + 2a[+ i] - 2a^2, a^2]$ et $\tilde{\Omega} :=]E_0 - a, E_0 + a[+ i] - a^2, a^2]$. Par construction, il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\left| f_j(E) \right| \leq e^{-\frac{1}{C_0} \lambda_j} \quad \text{uniformément par rapport à } E \in \Omega_0 \setminus \tilde{\Omega}.$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(]E_0 - 2a, E_0 + 2a[; [0, 1])$, $\equiv 1$ sur $]E_0 - a, E_0 + a[$. Alors l'inégalité (III.16) reste vraie quand on remplace χ_0 par χ .

Nous considérons le théorème III.2 avec les fonctions f_j , nous avons

$$\text{tr}[f_j(P(h)) - f_j(P_0)] = h^{-d} \int (f_j \chi)(E) \gamma_0(E) dE + \mathcal{O}_j(h^{1-d}). \quad (\text{III.17})$$

D'autre part, nous appliquons le théorème III.6 avec $g = f_j$ et Ω remplacé par Ω_0 , nous obtenons

$$\text{tr}[f_j(P(h)) - f_j(P_0)] = \sum_{z \in \text{Res}(P(h)) \cap \tilde{\Omega}_-} f_j(z) + \mathcal{O}(1) h^{-d} e^{-\frac{1}{C_0} \lambda_j}, \quad (\text{III.18})$$

où $\tilde{\Omega}_- = \{w \in \tilde{\Omega}; \Im(w) \leq 0\}$. En combinant les deux identités (III.17) et (III.18), nous

7. Pour la définition, voir [Hör71, Definition 3.1 page 676].

obtenons

$$\sum_{z \in \text{Res}(P(h)) \cap \tilde{\Omega}_-} f_j(z) = h^{-d} \int (f_j \chi)(E) \gamma_0(E) dE + \mathcal{O}(h^{-d}) e^{-\frac{1}{c_0} \lambda_j} + \mathcal{O}_j(h^{1-d}), \quad (\text{III.19})$$

avec la minoration (III.16)

$$\left| \sum_{z \in \text{Res}(P(h)) \cap \tilde{\Omega}_-} f_j(z) \right| \geq h^{-d} \left[e^{-\epsilon_j \lambda_j} - \mathcal{O}(1) e^{-\frac{1}{c_0} \lambda_j} \right] + \mathcal{O}_j(h^{1-d}).$$

Fixons j assez grand et soit h suffisamment petit, nous concluons

$$\left| \sum_{z \in \text{Res}(P(h)) \cap \tilde{\Omega}_-} f(z) \right| \geq \frac{1}{C} h^{-d},$$

où $f = f_j$ (avec j fixé) indépendamment de h . L'inégalité précédente donne la minoration du nombre de résonances dans $\tilde{\Omega}_-$ et comme nous pouvons choisir $\tilde{\Omega}$ aussi petit que nous voulons, nous obtenons le théorème III.7. \square

III.4 Commentaires et suite

Dans [xii], nous avons donné une nouvelle preuve du résultat de D. Robert et H. Tamura concernant l'asymptotique forte en puissances de h de la dérivée de la fonction de décalage spectral $\zeta(\lambda; -h^2 \Delta + U(x), -h^2 \Delta)$ près d'une énergie non-captive, dans le cas de l'opérateur de Schrödinger. Notre preuve est indépendante du temps, basée sur le théorème d'absorption limite, des estimations à la Paley-Wiener et le calcul fonctionnel introduit par B. Helffer et J. Sjöstrand, voir [DS99, chapitre 8]. Cette approche nous permettra d'étudier la fonction de décalage spectral dans le cas de croisement de valeurs propres de Floquet de l'opérateur de Schrödinger périodique.

Références bibliographiques

- [AC71] J. Aguilar and J. M. Combes. A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians. *Comm. Math. Phys.*, 22 :269–279, 1971.
- [BC71] E. Balslev and J. M. Combes. Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions. *Comm. Math. Phys.*, 22 :280–294, 1971.
- [Cyc85] H. L. Cycon. Resonances defined by modified dilations. *Helv. Phys. Acta*, 58(6) :969–981, 1985.
- [Dim02] M. Dimassi. Resonances for slowly varying perturbations of a periodic Schrödinger operator. *Canad. J. Math.*, 54(5) :998–1037, 2002.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Gér90] C. Gérard. Resonance theory for periodic Schrödinger operators. *Bull. Soc. Math. France*, 118(1) :27–54, 1990.
- [GK71] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn. *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien*. Dunod, Paris, 1971. Traduit du russe par Guy Roos, Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 39.
- [Hör69] L. Hörmander. Cours polycopié de l'école d'été nordique de mathématiques. 1969.
- [Hör71] L. Hörmander. Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24 :671–704, 1971.
- [HS90] B. Helffer and J. Sjöstrand. On diamagnetism and de Haas-van Alphen effect. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 52(4) :303–375, 1990.
- [HS96] P. D. Hislop and I. M. Sigal. *Introduction to spectral theory*, volume 113 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. With applications to Schrödinger operators.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [MS74] A. Melin and J. Sjöstrand. Fourier intégraux à phases complexes. page 10, 1974.
- [Nir71] L. Nirenberg. A proof of the Malgrange preparation theorem. pages 97–105. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 192, 1971.

- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.
- [Sjö82] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. In *Astérisque*, 95, volume 95 of *Astérisque*, pages 1–166. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [Sjö91] J. Sjöstrand. Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions. In *Microlocal analysis and applications (Montecatini Terme, 1989)*, volume 1495 of *Lecture Notes in Math.*, pages 237–332. Springer, Berlin, 1991.
- [Sjö97a] J. Sjöstrand. A trace formula and review of some estimates for resonances. In *Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996)*, volume 490 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 377–437. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [Sjö97b] J. Sjöstrand. A trace formula for resonances and application to semi-classical Schrödinger operators. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1996–1997*, pages Exp. No. II, 17. École Polytech., Palaiseau, 1997.
- [Sjö01] J. Sjöstrand. Resonances for bottles and trace formulae. *Math. Nachr.*, 221 :95–149, 2001.
- [Skr85a] M. M. Skriganov. Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 171 :122, 1985.
- [Skr85b] M. M. Skriganov. The spectrum band structure of the three-dimensional Schrödinger operator with periodic potential. *Invent. Math.*, 80(1) :107–121, 1985.
- [Šub79] M. A. Šubin. Spectral theory and the index of elliptic operators with almost-periodic coefficients. *Uspekhi Mat. Nauk*, 34(2(206)) :95–135, 1979.
- [SZ07] J. Sjöstrand and M. Zworski. Elementary linear algebra for advanced spectral problems. *Ann. Inst. Fourier*, 57(7) :2095–2141, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.
- [Tho73] L. E. Thomas. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal. *Comm. Math. Phys.*, 33 :335–343, 1973.

Deuxième partie

Encore du semi-classique

Chapitre IV

Propagation d'états cohérents en théorie quantique des champs

Articles présentés dans le chapitre IV

- [xvii] Z. Ammari and M. Zerzeri, *On the classical limit of self-interacting quantum field Hamiltonians with cutoffs*. Hokkaido Mathematical Journal 43 (2014), n° 3, p. 385–425.

Mots-clés : Limite classique, états cohérents, quantification de Wick , Le modèle $P(\varphi)_2$.

Classification mathématique par matières (2010) : 81R30, 81T10, 81Q20, 81V80

IV.1 Introduction et préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons un résultat de propagation des états cohérents pour une large classe d'interactions dans le cadre de la théorie quantique des champs bosoniques avec un tronçage dans les variables spatiales. Plus précisément, nous étendons le résultat de Hepp [Hep74] établi en dimension finie à la dimension infinie pour des hamiltoniens avec des interactions non-polynomiales et éventuellement non bornées. Le résultat obtenu s'applique aux modèles $(\varphi^4)_1$, $(\varphi^{2n})_1$ et plus généralement aux modèles du type $P(\varphi)_2$ tronqué dans les variables spatiales ainsi que certains hamiltoniens dits « modèles de Höegh-Krohn » (voir [HK69a, HK69b]). La construction de tels hamiltoniens est l'un des beaux résultats de la physique mathématique établie à la fin des années soixante (voir par exemple [GJ72, SHK72, Ros71, Seg70, Sim74]).

Les hamiltoniens des modèles de la théorie quantique des champs peuvent être décrits soit dans la représentation de Fock¹ ou dans une représentation équivalente dite représentation d'ondes². En effet, les hamiltoniens bosoniques libres ont une expression très explicite et simple dans l'espace de Fock symétrique alors que l'interaction est une multiplication par une fonction mesurable sur un espace $L^2(M, \mu)$ relatif à la représentation de processus gaussiens aléatoires indexés par des espaces de Hilbert réels, voir théorème IV.3. Par conséquent, il est commode de passer d'une représentation à l'autre lorsque cela est avantageux tout au long de l'établissement du résultat de propagation des états cohérents.

Commençons par décrire très brièvement et de point de vue assez formel le résultat de propagation des états cohérents en dimension finie ce qui nous donne une idée sur le vocabulaire et surtout les objets à manipuler dans le cas d'un système infini.

Un nombre fini de degrés de liberté : Sur $L^2(\mathbb{R}^d; dx)$, nous introduisons les opérateurs positions et moments,

$$P_j = -ih\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad Q_j = h\frac{1}{2}x_j, \quad j = 1, \dots, d,$$

où h est un paramètre semi-classique.

Nous avons les relations de commutation suivantes :

$$[Q_j, P_k] = ih\delta_{jk}\mathbb{1}, \quad [P_j, P_k] = 0 \quad \text{et} \quad [Q_j, Q_k] = 0 \quad \forall 1 \leq j, k \leq d,$$

1. D'un point de vue conceptuel, le théorème de Von-Neumann explique pourquoi, pour les systèmes avec un nombre fini de degrés de liberté, la distinction entre la structure algébrique des variables canoniques et les états définissant l'algèbre des observables n'est pas si pertinent, puisqu'il n'y a qu'un seul espace d'états (de Hilbert) pour un système quantique donné. Dans le langage de la mécanique quantique, nous pourrions dire qu'il n'y a qu'un seul espace des phases. Par contre, pour les systèmes infinis l'apparition de représentations non-équivalentes, c.-à-d. des espaces de phases (de Hilbert) différents, est la situation générique, voir le livre de Haag [Haa96].

2. « wave representation » en anglais.

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker. Les opérateurs de création-annihilation sont donnés :

$$a_j^* = h^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \right) = -iP_j + Q_j \quad \text{et} \quad a_j = h^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \right) = iP_j + Q_j \quad \forall 1 \leq j \leq d. \quad (\text{IV.1})$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^d \cong T^*\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d$, nous posons

$$a(\alpha) := \sum_{j=1}^d \bar{\alpha}_j a_j \quad \text{et} \quad a^*(\alpha) := \sum_{j=1}^d \alpha_j a_j^*. \quad (\text{IV.2})$$

L'opérateur a est semi-linéaire par rapport à α , l'opérateur a^* est linéaire par rapport à α et ils vérifient les relations de commutation canoniques :

$$[a(\alpha), a^*(\beta)] = h\bar{\alpha}\beta, \quad \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{C}^d,$$

où $\bar{\alpha}\beta = \sum_{j=1}^d \bar{\alpha}_j \beta_j$. Les opérateurs de champ $\Phi(\alpha)$ sont donnés par

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^*(\alpha) + a(\alpha) \right), \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{C}^d,$$

ils sont « formellement » autoadjoints.

Par le théorème de Stone, nous définissons les opérateurs de Weyl, $W(\alpha) = e^{i\Phi(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^d$. Nous avons les relations suivantes : Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^d$,

- (i) $[\Phi(\alpha), \Phi(\beta)] = ih \text{Im}(\bar{\alpha}\beta) \mathbb{1}$
- (ii) $W(\alpha)W(\beta) = e^{i\frac{h}{2} \text{Im}(\bar{\alpha}\beta)} W(\alpha + \beta)$

Dans ce cadre, nous introduisons le vide $\Omega_0 := \frac{1}{\pi^{\frac{d}{4}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ avec $\|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Définition IV.1. (*États cohérents*) $\mathbb{E} := \{E(\alpha) := W\left(-i\frac{\sqrt{2}}{h}\alpha\right)\Omega_0, \quad \alpha \in \mathbb{C}^d\}$.

Nous avons les propriétés suivantes :

- a) \mathbb{E} n'est pas un espace vectoriel.
- b) \mathbb{E} est une famille totale de $L^2(\mathbb{R}^d)$.
- c) $\langle \Omega_0, W(\beta)\Omega_0 \rangle = e^{-\frac{h}{4}|\beta|^2}$ pour tout $\beta \in \mathbb{C}^d$.
- d) $\langle E(\alpha), E(\beta) \rangle = e^{\frac{i}{h} \text{Im}(\bar{\alpha}\beta)} e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2h}}$.

$$e) \langle E(\alpha), W(\beta)E(\alpha) \rangle = e^{i\sqrt{2}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta)} \langle \Omega_0, W(\beta)\Omega_0 \rangle.$$

Le résultat de propagation des états cohérents dans ce cadre : Soit $H := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$ avec certaines hypothèses sur le potentiel V . Nous avons la limite semi-classique suivante : Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^d$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle e^{-\frac{it}{\hbar}H} E(\alpha), W(\beta) e^{-\frac{it}{\hbar}H} E(\alpha) \rangle = e^{i\sqrt{2}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_t\beta)}, \quad (\text{IV.3})$$

où $\alpha_t = (x_t, \xi_t) \cong x_t + i\xi_t \in \mathbb{C}^d$ est la solution de l'équation hamiltonienne classique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\xi(t)}{m} \\ \dot{\xi}(t) = -\nabla V(x(t)) \\ (x(0), \xi(0)) = \alpha. \end{cases}$$

C'est entre autre ce résultat que nous voulons généraliser à la dimension infinie pour une large classe d'interactions.

IV.1.1 Un système infini de particules

Soit \mathcal{L} un espace de Hilbert séparable muni d'un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui est semi-linéaire à gauche et dont la norme associée est $|z| := \sqrt{\langle z, z \rangle}$. Supposons que \mathcal{L} est muni d'une conjugaison complexe $\mathbf{c} : z \mapsto \mathbf{c}(z)$ compatible avec la structure d'espace Hilbert c.-à-d. \mathbf{c} est anti-linéaire, $\mathbf{c} \circ \mathbf{c}(z) = z$ et $|\mathbf{c}(z)| = |z|$. Désormais, nous notons

$$\bar{z} := \mathbf{c}(z), \quad \forall z \in \mathcal{L},$$

et considérons \mathcal{L}_0 le sous espace réel de \mathcal{L} , c.-à-d.

$$\mathcal{L}_0 := \{z \in \mathcal{L}; \bar{z} = z\}. \quad (\text{IV.4})$$

L'espace de Fock symétrique sur \mathcal{L} est la somme hilbertienne suivante :

$$\Gamma_s(\mathcal{L}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{L}. \quad (\text{IV.5})$$

Un sous-espace dense de $\Gamma_s(\mathcal{L})$, particulièrement pratique, est l'ensemble des sommes finies d'états donné par la somme directe algébrique :

$$\mathcal{D}_f = \bigoplus_{n=0}^{alg} \otimes_s^n \mathcal{L}. \quad (\text{IV.6})$$

La représentation de Weyl de type Fock est comme suit : il existe une application $f \mapsto W(f)$ de \mathcal{L} dans l'ensemble des transformations unitaires sur $\Gamma_s(\mathcal{L})$ vérifiant :

$$W(f_1)W(f_2) = e^{-\frac{i\epsilon}{2}\operatorname{Im}\langle f_1, f_2 \rangle} W(f_1 + f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}. \quad (\text{IV.7})$$

Ici ε est un paramètre positif suffisamment petit (semi-classique) et $\text{Im}\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la partie imaginaire du produit hermitien sur \mathcal{Z} qui est en particulier une forme symplectique. Les opérateurs dits de Weyl, $W(f)$ sont donnés par $W(f) = e^{i\Phi_s(f)}$ pour tout $f \in \mathcal{Z}$ où $\Phi_s(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(f) + a(f))$ sont les opérateurs champ de Segal et $a^*(\cdot), a(\cdot)$ sont les opérateurs de création-d'annihilation dépendants du paramètre ε vérifiant :

$$[a(f), a^*(g)] = \varepsilon \langle f, g \rangle \mathbb{1}, \quad [a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)], \quad \forall f, g \in \mathcal{Z}.$$

Dans ce cadre, les états cohérents sont donnés par :

$$W\left(-i\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}z\right)\Omega = e^{-\frac{|z|^2}{2\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \frac{z^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, \quad \forall z \in \mathcal{Z}, \quad (\text{IV.8})$$

où Ω est le vide c.-à-d. $\Omega = (1, 0, \dots) \in \Gamma_s(\mathcal{Z})$. Ils forment une famille totale dans l'espace de Fock $\Gamma_s(\mathcal{Z})$.

Les hamiltoniens bosoniques libres : Dans la représentation de Fock, l'hamiltonien de champ bosonique libre est donné par la seconde quantification, $d\Gamma(A)$ défini pour tout opérateur autoadjoint A sur \mathcal{Z} comme suit :

$$d\Gamma(A)_{|\otimes_s^n \mathcal{Z}} := \varepsilon \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{A}_{i^{\text{ième position}}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}. \quad (\text{IV.9})$$

En particulier l'opérateur nombre dépendant du paramètre ε est défini par $N = d\Gamma(\mathbb{1})$.

Parfois, nous utilisons le relèvement de l'action d'un opérateur A sur \mathcal{Z} à $\Gamma_s(\mathcal{Z})$ donné par $\Gamma(A)_{|\otimes_s^n \mathcal{Z}} := A \otimes \cdots \otimes A$. Par exemple $\Gamma(\mathbf{c})$ définit une conjugaison sur l'espace de Fock $\Gamma_s(\mathcal{Z})$.

Opérateurs de Wick à symboles non-polynomiaux : Nous considérons l'ensemble des symboles :

$$\mathcal{K} := \left\{ F : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \exists V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{(n)} \in \Gamma_s(\mathcal{Z}); F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{(z + \bar{z})^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, V^{(n)} \right\rangle \right\}. \quad (\text{IV.10})$$

L'application

$$\begin{aligned} \Xi : \Gamma_s(\mathcal{Z}) &\longrightarrow \mathcal{K} \\ V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{(n)} &\longmapsto F_V(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{(z + \bar{z})^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, V^{(n)} \right\rangle, \end{aligned}$$

définit un isomorphisme, d'espaces de Hilbert, entre $\Gamma_s(\mathcal{L})$ et \mathcal{K} lorsque ce dernier est muni du produit hermitien suivant :

$$\langle F_{V_1}, F_{V_2} \rangle_{\mathcal{K}} := \langle V_1, V_2 \rangle_{\Gamma_s(\mathcal{L})}.$$

De plus, l'espace $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$ est un espace de Hilbert dont le noyau reproduisant est donné par $K(z, w) := e^{\langle z+\bar{z}, w+\bar{w} \rangle}$ et vérifiant la relation :

$$\langle K(w, \cdot), F_V(\cdot) \rangle_{\mathcal{K}} = F_V(w),$$

pour tout $F_V \in \mathcal{K}$ et $w \in \mathcal{L}$.

Nous donnons maintenant la définition des opérateurs de Wick associés aux symboles appartenant à la classe \mathcal{K} .

Définition IV.2. *L'opérateur de Wick avec symbole F_V dans \mathcal{K} est la fermeture de l'opérateur linéaire dépendant du paramètre ε défini par :*

$$F_V^{\text{Wick}}(W(\varphi)\Omega) = W(\varphi)\Gamma(\sqrt{\varepsilon})V, \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}_0. \quad (\text{IV.11})$$

Pour toute séquence finie $\varphi_i, i = 1, \dots, n$ d'éléments distincts de \mathcal{L}_0 , nous avons :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i W(\varphi_i)\Omega = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Par conséquent, l'opérateur F_V^{Wick} est bien défini sur \mathcal{D}_c , où l'ensemble

$$\mathcal{D}_c := \text{vect}\{W(\varphi)\Omega; \varphi \in \mathcal{L}_0\},$$

est un sous espace dense dans l'espace de Fock symétrique $\Gamma_s(\mathcal{L})$. Nous avons les propriétés suivantes :

- (i) L'opérateur $F_V^{\text{Wick}}, F_V \in \mathcal{K}$ est de domaine dense car \mathcal{D}_c l'est.
- (ii) L'identité $(\overline{F_V^{\text{Wick}}})_{\mathcal{D}_c}^{\text{Wick}} \subset (F_V^{\text{Wick}})^*$ implique que l'opérateur donné par (IV.11) est fermable.
- (iii) Si $F_V \in \mathcal{K}$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_0$,

$$W(\varphi)\mathcal{D}(F_V^{\text{Wick}}) = \mathcal{D}(F_V^{\text{Wick}}) \quad \text{et} \quad W(\varphi)^* F_V^{\text{Wick}} W(\varphi) = F_V^{\text{Wick}}.$$

Représentation d'ondes Soit (M, \mathfrak{T}, μ) un espace probabilisé. Une variable aléatoire $X : M \rightarrow \mathbb{R}$ avec une variance $\sigma^2 \geq 0$ finie est dite gaussienne centrée si et seulement si sa fonction caractéristique

$$\int_M e^{-itX} \mu = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit \mathfrak{H} un espace de Hilbert réel. Un processus aléatoire gaussien indexé par \mathfrak{H} est une

application $\mathfrak{H} \ni f \mapsto \Phi(f)$ en variables aléatoires gaussiennes centrées sur M avec variance $|f|^2$ vérifiant pour tout $f_1, f_2, f \in \mathfrak{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(f_1) + \Phi(f_2) = \Phi(f_1 + f_2) \quad \text{et} \quad \lambda\Phi(f) = \Phi(\lambda f) \quad \text{p.p.}$$

Le processus est dit complet si \mathfrak{T} est la plus petite σ -algèbre telle que $\Phi(f), f \in \mathfrak{H}$ sont mesurables.

Soit \mathfrak{M} l'algèbre de von Neumann abélienne engendrée par les opérateurs de Weyl $W(f)$, $f \in \mathcal{Z}_0$. Le théorème suivant donne la représentation d'ondes des relations de commutation canoniques (voir e.g. ³ [Sim74, Theorem I.1]).

Théorème IV.3. *Il existe un espace probabilisé (M, \mathfrak{T}, μ) et une transformation unitaire $\mathcal{R} : \Gamma_s(\mathcal{Z}) \rightarrow L^2(M, \mu)$ tels que*

$$\mathcal{R}\Omega = 1, \quad \mathcal{R}\mathfrak{M}\mathcal{R}^* = L^\infty(M, \mu) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}\Gamma(\mathbf{c})\psi = \overline{\mathcal{R}\psi}.$$

De plus, l'application :

$$\mathcal{Z}_0 \ni f \mapsto \Phi(f) = \mathcal{R}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\Phi_s(f)\mathcal{R}^*,$$

est un processus aléatoire gaussien complet indexé par \mathcal{Z}_0 .

Pour plus de détails sur la représentation d'ondes voir [DG00] et aussi [Sim74]. Ce théorème permet de voir les opérateurs de Wick avec des symboles dans \mathcal{K} comme des opérateurs de multiplication par des fonctions mesurables non-bornées lorsqu'ils sont représentés dans l'espace $L^2(M, \mu)$, voir le lemme suivant.

Lemme IV.4. *Pour tout $F_V \in \mathcal{K}$ il existe une fonction mesurable $\mathcal{V} \in L^2(M, \mu)$ telle que*

$$\mathcal{R}F_V^{\text{Wick}}\mathcal{R}^*\psi = \mathcal{V}\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{R}(\mathcal{D}_c) \subset L^2(M, \mu),$$

avec \mathcal{V} agissant comme un opérateur de multiplication sur $L^2(M, \mu)$.

Cette identification nous permet d'obtenir entre autre le résultat suivant (voir [xvii, sous-sections 3.2 et 3.3] pour d'autres propriétés) :

Lemme IV.5. *Pour tout $F_V \in \mathcal{K}$ à valeurs réelles, l'opérateur de Wick correspondant F_V^{Wick} est essentiellement autoadjoint sur \mathcal{D}_c .*

Preuve. Cela découle du fait que $\mathcal{R}F_V^{\text{Wick}}\mathcal{R}^*$ est un opérateur de multiplication sur $L^2(M, \mu)$ par une fonction à valeurs réelles μ -finie partout, de domaine dense. (voir [RS72, Section VIII.3]). \square

Nous terminons cette section par énoncer le résultat sur les estimations Hypercontractives.

3. e.g. (abréviation) Du latin exempli gratia « Par Exemple ».

Proposition IV.6 ([Sim74, Theorem I.17]). *Soit $1 < p \leq q < \infty$ et $0 < \alpha \leq \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$. Alors pour tout $\Psi \in \Gamma_s(\mathcal{Z})$,*

$$\|\mathcal{R}\Gamma(\alpha)\Psi\|_{L^q(M,\mu)} \leq \|\mathcal{R}\Psi\|_{L^p(M,\mu)}. \quad (\text{IV.12})$$

Ces estimations sont primordiales pour avoir des informations concrètes sur les domaines des opérateurs de Wick associés à des symboles non-polynomiaux et d'expliciter la condition suffisante pour que les translatés de ces symboles restent dans le même espace \mathcal{K} .

IV.2 Résultats et quelques idées de preuves

Nous considérons la classe générale des hamiltoniens donnée par la « somme »

$$H := d\Gamma(A) + F_V^{\text{Wick}}, \quad (\text{IV.13})$$

où A est un opérateur autoadjoint sur \mathcal{Z} vérifiant :

(A.IV.1) $cA = Ac$ et $A \geq m\mathbb{1}$ pour un certain $m > 0$.

L'opérateur de multiplication $\mathcal{M}_{R(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})V)}$ par la fonction $\mathcal{R}(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})V)$ dans la représentation d'onde, est unitairement équivalent à F_V^{Wick} dans la représentation de Fock et vérifie :

(A.IV.2) $\mathcal{R}(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})V)$ est une fonction à valeurs réelles dans $L^q(M, \mu)$ pour un certain $q > 2$ et $e^{-t\mathcal{R}(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})V)} \in L^1(M, \mu)$ pour tout $t > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$.

Ici \mathcal{R} est la transformation donnée par le théorème IV.3. L'opérateur H dépend du paramètre ε et nous avons le théorème suivant dû à I. Segal.

Proposition IV.7 ([Seg70, Theorem 2]). *Soit A un opérateur autoadjoint sur \mathcal{Z} satisfaisant (A.IV.1) et $F_V \in \mathcal{K}$ vérifie l'hypothèse (A.IV.2). Alors l'opérateur*

$$H = d\Gamma(A) + F_V^{\text{Wick}}, \quad (\text{IV.14})$$

défini sur $\mathcal{D}(d\Gamma(A)) \cap \mathcal{D}(F_V^{\text{Wick}})$ est essentiellement autoadjoint.

On note par la même lettre H son extension autoadjointe. Notre résultat pour la propagation des états cohérents est le suivant.

Théorème IV.8. *Nous supposons que (A.IV.1) et (A.IV.2) sont vérifiées et que $V \in \mathcal{D}(e^{\alpha\Gamma(\lambda)})$ pour un certain $\lambda > 1$ et $\alpha > 0$.⁴ Soit $\varphi_0 \in \mathcal{Z}$ et $\Psi \in \mathcal{D}_f$. Alors il existe $t_0 \in]0, +\infty[$ tel que pour tout $t \in]-t_0, t_0[$ il existe une constante finie indépendante de ε ,*

4. $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{(n)} \in \mathcal{D}(e^{\alpha\Gamma(\lambda)}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\alpha\lambda^n} \|V^{(n)}\|^2 < \infty$.

$c(t, \Psi) > 0$, telle que l'inégalité suivante

$$\left\| e^{-i\frac{t}{\varepsilon}H} W\left(-i\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_0\right)\Psi - e^{i\frac{\omega(t)}{\varepsilon}} W\left(-i\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\varphi_t\right)U_2(t, 0)\Psi \right\|_{\Gamma_s(\mathcal{Z})} \leq c(t, \Psi) \sqrt{\varepsilon},$$

est valide uniformément pour $\varepsilon \in (0, 1)$. Ici φ_t est la solution de l'équation hamiltonienne classique

$$i\partial_t\varphi_t = A\varphi_t + \partial_z F_V(\varphi_t) \quad (\text{IV.15})$$

avec condition initiale φ_0 , la fonction $\omega(t)$ est donnée par

$$\omega(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-2)}{2} \left\langle \frac{(\varphi_s + \bar{\varphi}_s)^{\otimes k}}{\sqrt{k!}}, V^{(k)} \right\rangle ds,$$

et $U_2(t, s)$ est le propagateur unitaire associé au hamiltonien quadratique correspondant dépendant du temps t mais surtout indépendant du paramètre classique ε .

Voici quelques commentaires concernant les hypothèses ainsi que les objets invoqués dans le théorème précédent :

- (i) Le propagateur $U_2(t, s)$ est solution du problème de Cauchy :

$$i\varepsilon\partial_t u = \left(d\Gamma(A) + F_{V_2(t)}^{\text{Wick}} \right) u$$

pour $t \in]-t_0, t_0[$, avec la condition initiale $u(t = s) = u_s$ appartenant à un certain espace fonctionnel à poids et le hamiltonien quadratique $F_{V_2(t)}$ est donné par $F_{V_2(t)} = \left\langle \frac{(z+\bar{z})^{\otimes 2}}{\sqrt{2}}, V_2(t) \right\rangle \in \mathcal{K}$ avec

$$V_2(t) = \sqrt{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{\sqrt{n!}} \mathcal{S}_2 \left\langle (\varphi_t + \bar{\varphi}_t)^{\otimes (n-2)} \middle| \otimes 1^{(2)} V^{(n)} \in \otimes_s^2 \mathbb{Z} \right\rangle.$$

La dynamique quadratique quantique $U_2(t, s)$ peut être interprétée comme une transformation de Bogoliubov dépendante du temps des relations de commutation de Weyl.

- (ii) L'hypothèse $V \in \mathcal{D}(e^{\alpha\Gamma(\lambda)})$ est due principalement au fait que la transformation $U_2(t, s)$ est très peu régulière.

- (iii) En utilisant les estimations hypercontractives (voir proposition IV.6), la condition $V \in \mathcal{D}(e^{\alpha\Gamma(\lambda)})$ implique $\mathcal{R}(V) \in \bigcap_{p \geq 2} L^p(M, \mu)$ et par conséquent $\mathcal{R}(\Gamma(\sqrt{\varepsilon})V) \in$

$$\bigcap_{p \geq 2} L^p(M, \mu).$$

(iv) Voici un exemple où toutes les hypothèses sont vérifiées.

Soit $V = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} \varepsilon^{-n} \Phi_s(\varphi)^{2n} \Omega$ avec $\varphi \in \mathcal{Z}$, $0 \leq b_{2n} \leq e^{-\beta \lambda^{2n}}$ pour un certain $\lambda > 1$ et $\beta > \alpha > 0$. Alors par le réarrangement (suivant l'ordre de Wick) implique que $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} a_{2n} \varphi^{\otimes 2n}$ tel que $a_m \geq 0$ et $\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 e^{2\alpha \lambda^m} |\varphi|^{2m} < \infty$. Donc $V \in \mathcal{D}(e^{\alpha \Gamma(\lambda)})$ et l'hypothèse (A.IV.2) est satisfaite puisque $\mathcal{R}(V) \geq 0$ et $\Gamma(\sqrt{\varepsilon})$ est un opérateur qui préserve la positivité. De plus $\mathcal{R}(V) \notin L^\infty(M, \mu)$ si $V \neq 0$.

(iv) Nous avons une formule explicite pour constante $c(t, \Psi)$ du théorème précédent.

Croquis de la démonstration du théorème IV.8 : Nous commençons par faire un développement de Taylor à l'ordre 2 du hamiltonien de H autour de l'orbite classique φ_t vérifiant l'équation d'évolution (IV.15). Puisque le hamiltonien H est le quantifié de Wick de la fonction

$$h(z) = \langle z, Az \rangle + F_V(z),$$

alors le symbole de l'opérateur translaté correspondant $h(z + \varphi_t)^{Wick}$ de H dans l'espace des phases peut se décomposer essentiellement en trois termes $h(\varphi_t)$, un terme d'ordre 1 (équation de transport!) et un hamiltonien quadratique dépendant du temps, plus des termes d'ordre supérieur d'opérateurs de création-annihilation. Les deux premiers termes fournissent une approximation pour l'évolution des états cohérents. Plus précisément pour prouver le Théorème IV.8, nous dérivons la quantité

$$\mathcal{Y}(t) = e^{i \frac{t}{\varepsilon} H} e^{i \frac{\omega(t)}{\varepsilon}} W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_t) U_2(t, 0).$$

alors,

$$-i \varepsilon \partial_t \mathcal{Y}(t) = e^{i \frac{t}{\varepsilon} H} e^{i \frac{\omega(t)}{\varepsilon}} W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_t) \left[h(z + \varphi_t)^{Wick} - A_0(t) - \sqrt{\varepsilon} A_1(t) - \varepsilon A_2(t) \right] U_2(t, 0).$$

Ici nous avons utilisé l'identité $W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_t)^* H W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_t) = h(z + \varphi_t)^{Wick}$. Les $(A_j(t))_{j=0,1,2}$ sont des opérateurs de Wick associés à des monômes et indépendants du paramètre ε . Le reste $F_{R(t)}^{Wick} := h(z + \varphi_t)^{Wick} - A_0(t) - \sqrt{\varepsilon} A_1(t) - \varepsilon A_2(t)$ est un opérateur de Wick d'ordre $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$. Cela conduit à l'estimation suivante pour $0 < t < t_0$,

$$\left\| \mathcal{Y}(t) \Psi - W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_0) \Psi \right\|_{\Gamma_s(\mathcal{Z})} \leq \varepsilon^{-1} \int_0^t \left\| F_{R(s)}^{Wick} U_2(s, 0) \Psi \right\|_{\Gamma_s(\mathcal{Z})} ds. \quad (\text{IV.16})$$

Par conséquent, nous obtenons l'estimation attendue. Cependant, il existe plusieurs points qui doivent être traités avec soin. En particulier, la régularité par rapport aux puissances de l'opérateur nombre pour le propagateur $U_2(t, s)$ est cruciale. \square

Voici la généralisation du résultat de Hepp à la dimension infinie.

Corollaire IV.9. *Supposons que (A.IV.1) et (A.IV.2) sont vérifiées et que $V \in \mathcal{D}(e^{\alpha\Gamma(\lambda)})$ pour un certain $\lambda > 1$ et $\alpha > 0$. Nous avons pour tout $\xi \in \mathcal{Z}$ et $\varphi_0 \in \mathcal{Z}$, il existe $t_0 = t_0(\varphi_0) > 0$ tel que pour tout $t \in]-t_0, t_0[$, la limite forte*

$$s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_0)^* e^{i \frac{t}{\varepsilon} H} W(\xi) e^{-i \frac{t}{\varepsilon} H} W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_0) = e^{i \sqrt{2} \operatorname{Re}(\xi, \varphi_t)} \mathbb{1},$$

avec φ_t solution de l'équation (IV.15) avec condition initiale φ_0 .

Preuve du corollaire : Il suffit de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle e^{-i \frac{t}{\varepsilon} H} W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_0) \Psi, W(\xi) e^{-i \frac{t}{\varepsilon} H} W(-i \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \varphi_0) \Phi \rangle = e^{i \sqrt{2} \operatorname{Re}(\xi, \varphi_t)} \langle \Psi, \Phi \rangle,$$

pour tout $\Psi, \Phi \in \mathcal{D}_f$. Le théorème IV.8 appliqué pour un t fixé donne

$$\langle e^{-i \frac{t}{\varepsilon} H} W(\frac{\sqrt{2}}{i\varepsilon} \varphi_0) \Psi, W(\xi) e^{-i \frac{t}{\varepsilon} H} W(\frac{\sqrt{2}}{i\varepsilon} \varphi_0) \Phi \rangle = \langle W(\frac{\sqrt{2}}{i\varepsilon} \varphi_t) U_2(t, 0) \Psi, W(\xi) W(\frac{\sqrt{2}}{i\varepsilon} \varphi_t) U_2(t, 0) \Phi \rangle + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

En utilisant les relations de commutation de Weyl (IV.7) nous obtenons

$$\langle W(\frac{\sqrt{2}}{i\varepsilon} \varphi_t) U_2(t, 0) \Psi, W(\xi) W(\frac{\sqrt{2}}{i\varepsilon} \varphi_t) U_2(t, 0) \Phi \rangle = \langle U_2(t, 0) \Psi, W(\xi) U_2(t, 0) \Phi \rangle e^{i \sqrt{2} \operatorname{Re}(\xi, \varphi_t)}.$$

Ainsi, nous obtenons la limite demandée puisque $s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W(\xi) = \mathbb{1}$ et $U_2(t, 0)$ est un opérateur unitaire indépendant de ε . \square

Nous terminons cette section par donner un exemple d'interaction non-polynomiale dans les variables de champ, dit modèle de R. Høegh-Krohn, voir [HK69a, HK69b].

Soit $\varphi(x)$ un champ scalaire sur \mathbb{R}^d de masse $m_0 > 0$, c.-à-d.

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ipx} [a^*(p) + a(-p)] \frac{dp}{\sqrt{\omega(p)}}, \quad \text{où } \omega(p) = \sqrt{m_0^2 + p^2}, \quad m_0 > 0. \quad (\text{IV.17})$$

Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $g \geq 0$, $g(x) = g(-x)$, $\|g\|_1 = 1$ dont le support est inclus dans la boule centrée à l'origine et de rayon 1. L'opérateur de champ tronqué est donné par

$$\varphi_\kappa(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\kappa(x - y) \varphi(y) dy, \quad \text{avec } g_\kappa(x) = \kappa^{-d} g(\kappa^{-1} x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ l'opérateur champ $\varphi_\kappa(x)$ est autoadjoint.

Soit V une fonction à valeurs réelles, continue et bornée. Nous définissons le hamiltonien de R. Høegh-Krohn comme suit :

$$H = d\Gamma(\omega) + \int_{|x| \leq r} V(\varphi_\kappa(x)) dx. \quad (\text{IV.18})$$

L'interaction est à valeurs réelles et bornée donc H est autoadjoint.

Maintenant, au lieu de prendre V bornée, nous considérons une fonction entière réelle $V(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ avec $a_n \in \mathbb{R}$. Nous obtenons l'interaction suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{|x| \leq r} (\varphi_\kappa(x))^n dx.$$

Pour éviter des problèmes de divergence à l'infini nous remplaçons $(\varphi_\kappa(x))^n$ par son ordre de Wick correspondant donné par

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle (z + \mathbf{c}(z))^{\otimes n}; a_n \int_{|x| \leq r} \left(e^{ipx} \frac{\hat{g}_\kappa(p)}{\sqrt{\omega(p)}} \right)^{\otimes n} dx \right\rangle \right)^{Wick}.$$

L'interaction est bien définie sous la condition $\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n^2 \|\frac{\hat{g}_\kappa}{\sqrt{\omega}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 < \infty$. Par conséquent, le hamiltonien de R. Høegh-Krohn modifié correspondant est de la forme :

$$H = d\Gamma(\omega) + F_W^{Wick},$$

avec

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} a_n \int_{|x| \leq r} \left(e^{ipx} \frac{\hat{g}_\kappa(p)}{\sqrt{\omega(p)}} \right)^{\otimes n} dx \in \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^d)).$$

IV.3 Commentaires et suite

À l'issue de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'existence et l'unicité de l'état fondamental du modèle $P(\varphi)_2$ ainsi qu'au comportement asymptotique de ce dernier par rapport à un paramètre semi-classique (plutôt classique dans ce cadre).⁵

5. C'est un travail en cours, l'auteur de ce tapuscrit doit terminer la rédaction !

Références bibliographiques

- [DG00] J. Dereziński and C. Gérard. Spectral scattering theory of spatially cut-off $P(\phi)_2$ Hamiltonians. *Comm. Math. Phys.*, 213(1) :39–125, 2000.
- [GJ72] J. Glimm and A. Jaffe. Boson quantum field models. pages 77–143, 1972.
- [Haa96] R. Haag. *Local quantum physics*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Fields, particles, algebras.
- [Hep74] K. Hepp. The classical limit for quantum mechanical correlation functions. *Comm. Math. Phys.*, 35 :265–277, 1974.
- [HK69a] R. Høegh-Krohn. Boson fields under a general class of cut-off interactions. *Comm. Math. Phys.*, 12 :216–225, 1969.
- [HK69b] R. Høegh-Krohn. Boson fields under a general class of local relativistic invariant interactions. *Comm. Math. Phys.*, 14 :171–184, 1969.
- [Ros71] L. Rosen. The $(\phi^{2n})_2$ quantum field theory : higher order estimates. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24 :417–457, 1971.
- [RS72] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1972.
- [Seg70] I. Segal. Construction of non-linear local quantum processes. I. *Ann. of Math. (2)*, 92 :462–481, 1970.
- [SHK72] B. Simon and R. Høegh-Krohn. Hypercontractive semigroups and two dimensional self-coupled Bose fields. *J. Functional Analysis*, 9 :121–180, 1972.
- [Sim74] B. Simon. *The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974. Princeton Series in Physics.
-

Chapitre V

Taux de décroissance d'énergie pour l'équation des poutres amorties

Articles présentés dans le chapitre V

- [xviii] K. Ammari, M. Dimassi and M. Zerzeri, *Rate of decay of some abstract Petrowsky-like dissipative semi-groups*. Semigroup Forum, Volume 93 (2016), n° 1, p. 1–16.
- [xvi] K. Ammari, M. Dimassi and M. Zerzeri, *The rate at which energy decays in a viscously damped hinged Euler-Bernoulli beam*. J. Differential Equations 257, (2014), n° 9, p. 3501–3520.

Mots-clés : Taux de décroissance, semi-groupe de type Petrowsky, abscisse spectrale, bases de Riesz, poutres d'Euler-Bernoulli

Classification mathématique par matières (2010) : 74K10, 35Q72, 35B40, 34L20

V.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons le résultat sur le taux de décroissance de l'énergie pour certains systèmes dissipatifs de type Petrowsky. Nous décrivons, dans un cadre abstrait, le taux de décroissance optimal pour ces systèmes en terme de quantité spectrale du générateur infinitésimal correspondant à la dynamique sous-jacente. L'idée principale est d'identifier le taux de décroissance de l'énergie avec le supremum de la partie réelle du spectre de l'opérateur dissipatif associé. Dans tout le chapitre, l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli amorties avec un coefficient d'amortissement dans L^∞ est l'exemple de base pour ce cadre.

Cadre abstrait : Soit H un espace de Hilbert. Notons $\|\cdot\|_H$ la norme associée. Soit A un opérateur non-borné sur H de domaine dense $\mathcal{D}(A)$, autoadjoint, positive et inversible d'inverse compact.

Soit B un opérateur borné de U dans H , où $(U, \|\cdot\|_U)$ est un autre espace de Hilbert qui sera identifié avec son dual.

Nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + Ax(t) + BB^*\dot{x}(t) = 0, \\ (x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, x_1) \in H_{\frac{1}{2}} \times H, \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

où $t \in [0, \infty)$ et $H_{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ est l'espace de Hilbert à poids muni de la norme $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ avec $\|z\|_{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}z\|_H, \forall z \in H_{\frac{1}{2}}$.

Désormais, nous fixons $\mathcal{H} := H_{\frac{1}{2}} \times H$. Nous munissons cet espace de Hilbert du produit hermitien suivant :

$$\left\langle [f, g], [u, v] \right\rangle_{\mathcal{H}} := \langle A^{\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}u \rangle_H + \langle g, v \rangle_H, \quad \text{pour tout } [f, g], [u, v] \text{ dans } \mathcal{H}.$$

Le système (V.1) peut être réécrit comme une équation différentielle du premier ordre, en posant $Y(t) = {}^T(x(t), \dot{x}(t))$:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) - \mathcal{A}_B Y(t) = 0, \\ Y(0) = {}^T(x_0, x_1) \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

où $\mathcal{A}_B := \mathcal{A}_0 - \mathcal{B} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, avec

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \times H_{\frac{1}{2}} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

$$\text{et } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & BB^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

L'opérateur \mathcal{A}_0 est anti-autoadjoint sur \mathcal{H} par conséquent il génère un groupe d'opérateurs unitaires fortement continue sur \mathcal{H} , noté par $(\mathbf{S}_0(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Puisque \mathcal{A}_B est dissipative et surjective, il génère un semi-groupe de contractions sur \mathcal{H} , noté par $(\mathbf{S}_B(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$. Le système (V.1) est bien posé. Plus précisément, nous avons le résultat :

Proposition V.1. *Soit $(x_0, x_1) \in \mathcal{H}$. Alors le système (V.1) admet une unique solution $t \mapsto x(t)$ dans l'espace $C([0, +\infty); H_{\frac{1}{2}}) \cap C^1([0, +\infty); H)$. De plus la solution $t \mapsto x(t)$ vérifie l'identité d'énergie suivante :*

$$E(x(0)) - E(x(t)) = \int_0^t \|B^* \dot{x}(s)\|_U^2 ds, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (\text{V.3})$$

$$\text{où } E(x(t)) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

De l'identité (V.3) il en résulte que l'application $t \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2$ est décroissante. Dans de nombreuses applications, il est important de savoir si cette application décroît exponentiellement lorsque $t \rightarrow +\infty$, c.-à-d. si le système (V.1) est exponentiellement stable. Une des méthodes pour prouver la stabilité exponentielle est basée sur une inégalité d'observabilité pour le système conservatif associé :

$$\ddot{\phi}(t) + A\phi(t) = 0, \quad (\phi(0), \dot{\phi}(0)) = (x_0, x_1) \in \mathcal{H}. \quad (\text{V.4})$$

Le problème (V.4) est bien posé dans \mathcal{H} . Dans [Har89] A. Haraux montre que la stabilité exponentielle du système (V.1) est équivalente à l'inégalité d'observabilité pour (V.4).

Proposition V.2. *Le système (V.1) est exponentiellement stable dans \mathcal{H} si et seulement si il existe $T > 0$, et $C_T > 0$ tel que*

$$C_T \int_0^T \left\| \begin{pmatrix} 0 & B^* \end{pmatrix} \mathbf{S}_0(t) Y_0 \right\|_U^2 dt \geq \|Y_0\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{pour tout } Y_0 \in \mathcal{H}. \quad (\text{V.5})$$

Le spectre de l'opérateur A : Le spectre de A est donné par $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots \rightarrow +\infty$. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormée de H constituée de vecteurs propres de A . Maintenant, nous pouvons décrire le spectre de l'opérateur anti-autoadjoint \mathcal{A}_0 .

Lemme V.3. *Les valeurs propres de \mathcal{A}_0 et les vecteurs propres correspondants sont donnés par :*

$$\mathcal{A}_0 V_{\pm k} = (\pm i \sqrt{\mu_k}) V_{\pm k}, \quad \text{où } V_{\pm k} = \frac{v_k}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}, \pm i \right], \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{V.6})$$

De plus, la famille $(V_{\pm k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée de l'espace des énergies \mathcal{H} .

Exemple : Équation des poutres d'Euler-Bernoulli amorties. Nous considérons le système suivant :

$$\partial_t^2 u(x, t) + \partial_x^4 u(x, t) + 2a(x)\partial_t u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (\text{V.7})$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \partial_x^2 u(0, t) = \partial_x^2 u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (\text{V.8})$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u^1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (\text{V.9})$$

où $a \in L^\infty(0, 1)$ est positive vérifiant la condition suivante :

$$\exists c > 0 \text{ tel que } a(x) \geq c, \quad \text{dans un ouvert non vide } I \text{ de }]0, 1[. \quad (\text{V.10})$$

Nous définissons l'énergie de la solution u de (V.7)-(V.9), à l'instant t , comme

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(|\partial_t u(x, t)|^2 + |\partial_x^2 u(x, t)|^2 \right) dx. \quad (\text{V.11})$$

Dans ce cadre les espaces de Hilbert correspondants sont :

$$U = L^2(0, 1), \quad H = L^2(0, 1) \quad \text{et} \quad H_{\frac{1}{2}} = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1),$$

L'opérateur correspondant est : $A^{\text{ex}} = \frac{d^4}{dx^4}$, de domaine

$$\mathcal{D}(A^{\text{ex}}) = \left\{ u \in H^4(0, 1) \cap H_0^1(0, 1); \frac{d^2 u}{dx^2}(0) = \frac{d^2 u}{dx^2}(1) = 0 \right\},$$

et la perturbation B est donnée par :

$$B^{\text{ex}} \phi = (B^{\text{ex}})^* \phi = \sqrt{2a(x)} \phi, \quad \forall \phi \in L^2(0, 1).$$

Nous posons $\mathcal{H} = [H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)] \times L^2(0, 1)$ et les opérateurs correspondants sont :

$$\mathcal{A}_0^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\frac{d^4}{dx^4} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_B^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\frac{d^4}{dx^4} & -2a(x) \end{pmatrix}.$$

Nous avons les propriétés suivantes :

- (i) L'opérateur $\mathcal{A}_0^{\text{ex}}$ est anti-autoadjoint d'inverse compact et son spectre est donné par $\sigma(\mathcal{A}_0^{\text{ex}}) = \{\pm i k^2 \pi^2, k \in \mathbb{N}^*\}$.
- (ii) L'inégalité (V.5) est satisfaite selon [Har89], si a vérifie (V.10).

V.2 Résultat et quelques idées de preuves

Nous donnons le taux de décroissance de la solution de l'équation (V.1), en terme d'abscisse spectrale du générateur \mathcal{A}_B .

Soit $\mu(\mathcal{A}_B)$ l'abscisse spectrale de \mathcal{A}_B donnée par :

$$\mu(\mathcal{A}_B) = \sup \left\{ \operatorname{Re}(\lambda); \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_B) \right\}. \quad (\text{V.12})$$

où $\sigma(\mathcal{A}_B)$ est le spectre de \mathcal{A}_B . Afin d'énoncer le résultat nous définissons sur le taux de décroissance, dépendant de la perturbation B , comme suit :

$$\omega(B) = \inf \left\{ \omega; \text{il existe } C = C(\omega) > 0 \text{ tel que } E(x(t)) \leq C(\omega) e^{2\omega t} E(x(0)) \right. \\ \left. \text{pour toute solution de (V.1) avec condition initiale dans } \mathcal{H} \right\}. \quad (\text{V.13})$$

Selon (V.3), $\omega(B) \leq 0$ (voir [Har89] et aussi [AT00]). Il s'ensuit que

$$\mu(\mathcal{A}_B) \leq \omega(B). \quad (\text{V.14})$$

L'hypothèse suivante concerne le comportement de l'écart entre deux hautes fréquences consécutives de l'opérateur \mathcal{A}_0 . Pour $k \in \mathbb{N}^*$, we define $\delta_{\pm k} := |\pm i(\sqrt{\mu_{k+1}} - \sqrt{\mu_k})| = \sqrt{\mu_{k+1}} - \sqrt{\mu_k}$. Nous supposons que

$$\text{(A.V.1)} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = +\infty,$$

et

$$\text{(A.V.2)} \quad \left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k^2} \right)_{k \geq 1} \in l^2(\mathbb{N}^*), \text{ où } l^2(\mathbb{N}^*) \text{ est l'espace des suites de carrées intégrables.}$$

Remarque V.4.

(i) L'hypothèse (A.V.1) implique que les hautes fréquences de \mathcal{A}_0 sont simples.

(ii) L'hypothèse (A.V.2) donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k^2} = 0. \quad (\text{V.15})$$

(iii) L'hypothèse (A.V.2) n'implique pas (A.V.1) en général.

(iv) Le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}_0^{\text{ex}}$ correspondant à l'exemple de l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli amorties vérifient les hypothèses (A.V.1) et (A.V.2). De plus,

si l'amortissement a vérifie (V.10) alors $w(B) < 0$.

Maintenant, notre principal résultat sur le taux de décroissance optimal est :

Théorème V.5. *Nous supposons que (A.V.1) et (A.V.2) sont vérifiées. Alors,*

$$\omega(B) = \mu(\mathcal{A}_B). \quad (\text{V.16})$$

En d'autres termes, si toutes les solutions d'énergie finie de (V.1) sont exponentiellement stables alors le meilleur taux de décroissance de la solution de (V.1) vérifie (V.16).

D'après le point (iv) de la remarque V.4, nous pouvons appliquer le théorème V.5 et nous obtenons que le meilleur taux de décroissance de l'énergie pour l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli amorties est donné par l'abscisse spectrale du générateur infinitésimal $\mathcal{A}_B^{\text{ex}}$ du semi-groupe associé, dans le cas où le coefficient d'amortissement est dans L^∞ .

Croquis de la démonstration du théorème V.5 :

Pour $B = 0$, l'opérateur \mathcal{A}_0 est anti-autoadjoint, à résolvante compacte dans \mathcal{H} . Par conséquent toutes ces valeurs propres sont imaginaires pures et la multiplicité algébrique et géométrique pour chaque valeur propre sont les mêmes. De plus, il existe une base orthonormée de \mathcal{H} constituée de vecteurs propres de \mathcal{A}_0 . Voir lemme V.3.

Dans notre cadre c.-à-d. $B \in \mathcal{L}(U, H)$, nous utilisons le fait que \mathcal{A}_B est une perturbation bornée d'un opérateur anti-autoadjoint à résolvante compacte par conséquent, en appliquant [GK71, Chapter 5, Theorem 10.1], nous obtenons que l'ensemble des vecteurs propres généralisés de \mathcal{A}_B est total dans \mathcal{H} . Notons $(W_n)_{n \geq 1}$ cet ensemble. De plus nous avons quelques encadrements non affinis du spectre, $(\lambda_n(B))_{n \geq 1}$, de \mathcal{A}_B . Ces informations ne sont pas suffisantes pour prouver le théorème, nous devons étudier les hautes fréquences de \mathcal{A}_B , et en particulier leurs multiplicités algébriques. En utilisant le fait que la distance entre deux valeurs propres consécutives de \mathcal{A}_0 tend vers l'infini (à l'infini), ainsi que la dissipation est bornée, nous construisons un contour fermé autour de chaque haute fréquence de \mathcal{A}_0 ; $(\Gamma^{(k)})_{|k| > N_0}$ (pour un entier N_0 suffisamment grand) dans le plan complexe tel que : (voir figure V.1),

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma^{(\pm n)}$ est centré au point $(\pm i\sqrt{\mu_n})$.
- (ii) A l'intérieur de $\Gamma^{(n)}$ il existe une seule valeur propre de \mathcal{A}_B .
- (iii) L'opérateur \mathcal{A}_B possède exactement $2N_0$ valeurs propres comptées avec leur multiplicité dans $\mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{|k| > N_0} \Gamma^{(k)} \right)$.
- (iv) $\sum_{|k| > N_0} \|P_{\Gamma^{(k)}}^B - P_{\Gamma^{(k)}}^0\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 < \infty$, où $P_{\Gamma^{(k)}}^B$ (resp. $P_{\Gamma^{(k)}}^0$) désigne le projecteur de Riesz associé à \mathcal{A}_B (resp. \mathcal{A}_0) correspondant au contour $\Gamma^{(k)}$.

La preuve des points ci-dessus est basée sur des estimations de la résolvante associées aux opérateurs \mathcal{A}_B et \mathcal{A}_0 . Puisque l'ensemble des vecteurs propres généralisés de \mathcal{A}_B est total et les deux systèmes des vecteurs propres (généralisés) de \mathcal{A}_B et \mathcal{A}_0 sont quadratiquement

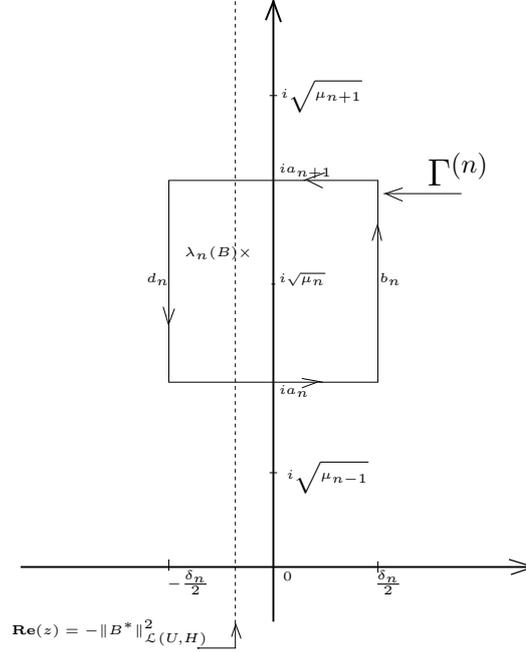


Figure V.1 – Le choix du contour $\Gamma^{(n)}$ et emplacement des hautes fréquences de \mathcal{A}_B . Ici $a_l = \sqrt{\mu_{l-1}} + \frac{1}{2}\delta_{l-1}$, $l \in \{n, n+1\}$, $b_n = \frac{1}{2}\delta_n + i\sqrt{\mu_n}$ et $d_n = -\frac{1}{2}\delta_n + i\sqrt{\mu_n}$.

proches dans \mathcal{H} (voir (iv) ci-dessus), il découle de [PT87, Appendix D, Theorem 3] que le système de vecteurs propres généralisés de \mathcal{A}_B constitue une base de Riesz de \mathcal{H} . Maintenant, nous pouvons développer la condition initiale sur cette base de Riesz,

$$[u^0, v^0] = \sum_{|k| \leq N_0} \sum_{p=0}^{m_k-1} c_{k,p} W_{k,p} + \sum_{|n| > N_0} c_n W_n.$$

Le premier terme de droite correspondant au block de Jordan pour les fréquences « bornées » et le deuxième terme exprime le fait que les hautes fréquences sont simples. Alors la solution de (V.2) est donnée par :

$$[u, \partial_t u] = \sum_{|k| \leq N_0} \exp(\lambda_k(B)t) \sum_{p=0}^{m_k-1} c_{k,p} \sum_{l=0}^p \frac{t^{p-l}}{(p-l)!} W_{k,l} + \sum_{|n| > N_0} c_n \exp(\lambda_n(B)t) W_n. \quad (\text{V.17})$$

Ici $(\lambda_k(B))_{k \in \mathbb{Z}^*}$ est l'ensemble des valeurs propres de \mathcal{A}_B . Notons qu'au maximum $2N_0$ valeurs propres peuvent avoir une multiplicité algébrique supérieure à un mais cette multiplicité est au plus $2N_0$, et la famille $(V_{\pm k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée de l'espace des énergies \mathcal{H} (voir lemme V.3). Alors, par un isomorphisme Φ , nous avons

$$E(u(t)) = \left\| [u, \partial_t u] \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\Phi\|^2 \|\Phi^{-1}\|^2 (1 + t^{2N_0}) \exp(2\mu(\mathcal{A}_B)t) E(u(0)).$$

D'où

$$E(u(t)) = \left\| [u, \partial_t u] \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\Phi\|^2 \|\Phi^{-1}\|^2 \exp((2\mu(\mathcal{A}_B) - \delta)t) E(u(0)),$$

pour tout $\delta > 0$. Par conséquent $\omega(B) \leq \mu(\mathcal{A}_B)$, et avec l'inégalité (V.14) nous obtenons le résultat. \square

Remarque V.6. *Nous parlons de sous (resp. sur) amortissement si $\frac{1}{2}\|B^*\|_{\mathcal{L}(H,U)}^2$ est plus petit (resp. grand) que $\sqrt{\mu_1}$, voir [CZ94]. Rappelons que $\mu_1 > 0$ est la première valeur propre de A .*

V.3 Commentaires et suite

Nous avons étendu ce résultat du théorème V.5 au cas de semi-groupe non-dissipative, voir [xviii, sous-section 3.2] dont le système est décrit par :

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) + Kx(t) = 0, \quad (x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, x_1) \in H_{\frac{1}{2}} \times H, \quad (\text{V.18})$$

où A est le même genre d'opérateur que les sections précédentes et $K \in \mathcal{L}(H_{\frac{1}{2}}, H)$.

Une généralisation possible est de considérer des perturbations non-bornés mais relativement bornés par rapport à l'opérateur initial (non-perturbé). Le point crucial est toujours de contrôler la multiplicité géométrique des hautes fréquences et la stratégie marchera dans le cas où cette multiplicité est bornée.

Références bibliographiques

- [AT00] K. Ammari and M. Tucsnak. Stabilization of Bernoulli-Euler beams by means of a pointwise feedback force. *SIAM J. Control Optim.*, 39(4) :1160–1181, 2000.
- [CZ94] S. Cox and E. Zuazua. The rate at which energy decays in a damped string. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(1-2) :213–243, 1994.
- [GK71] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn. *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien*. Dunod, Paris, 1971. Traduit du russe par Guy Roos, Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 39.
- [Har89] A. Haraux. Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps. *Portugal. Math.*, 46(3) :245–258, 1989.
- [PT87] J. Pöschel and E. Trubowitz. *Inverse spectral theory*, volume 130 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.
-

Table des figures

I.1	Domaine d'analyticité du potentiel V	39
I.2	Distorsion analytique et identification des résonances dans \mathcal{C}_θ	40
I.3	Les variétés lagrangiennes Λ_{\mp} et leur espace tangent Λ_{\mp}^0 près du point fixe hyperbolique.	42
I.4	Le cadre géométrique du théorème I.3.	48
I.5	Le cadre géométrique près du point fixe hyperbolique avec ces trois régions et la localisation de la fonction fuite.	49
I.6	Le cadre géométrique du théorème I.4.	52
I.7	Un potentiel vérifiant les hypothèses du théorème I.5 et les résonances correspondantes.	56
I.8	Les contours Γ_j , $j = 1, \dots, 5$	63
II.1	Une asymptotique des résonances à deux échelles du théorème II.3.	79
II.2	Courbe d'accumulation générée par une seule trajectoire homocline.	80
II.3	La géométrie du potentiel V en dimension $d = 2$ et $K = 2$. Le phénomène de vibration des courbes d'accumulation.	82
II.4	La dynamique des résonances à l'échelle microscopique (cas symétrique).	83
II.5	Nuage de résonances dans le cadre du théorème II.15.	88
II.6	Potentiel à trois bosses et le graphe de l'ensemble capté.	89
II.7	Courbes d'accumulation des résonances près du sommet de la barrière de trois bosses dans le cas équilatéral.	90
II.8	Une configuration d'ensemble capté.	95

Table des figures

II.9	D'autres géométries avec les mêmes (pseudo)-résonances que la figure II.8 mais avec différentes régions de micro-localisation des états résonants correspondants (en gris).	96
III.1	Dilatation analytique modifié et cadre générale du théorème III.6. Ici $+ := a + i\epsilon$, $* := b + i\epsilon$ et $J = [a_1, b_1]$	107
V.1	Le choix du contour $\Gamma^{(n)}$ et emplacement des hautes fréquences de \mathcal{A}_B . Ici $a_l = \sqrt{\mu_{l-1}} + \frac{1}{2}\delta_{l-1}$, $l \in \{n, n+1\}$, $b_n = \frac{1}{2}\delta_n + i\sqrt{\mu_n}$ et $d_n = -\frac{1}{2}\delta_n + i\sqrt{\mu_n}$	137

Titre : Contributions à l'analyse semi-classique de certains objets spectraux via l'approche microlocale.

Résumé : Mes travaux de recherches appartiennent aux domaines des équations aux dérivées partielles et de la physique mathématique. Le fil conducteur de ceux-ci est l'analyse semi-classique, l'outil de choix est l'analyse microlocale et l'objet spectral de prédilection est les résonances.

Une grande partie de mes recherches concerne l'asymptotique des résonances générées par un maximum du potentiel dans le cas de l'opérateur de Schrödinger, ainsi que l'étude des résonances dans le cas où l'ensemble capté est donné par des trajectoires homoclines et/ou hétéroclines.

La deuxième partie de mes travaux concerne la théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger périodique. Dans ce cadre, nous étudions certains objets spectraux générées par différentes perturbations (lentes ou à grande constante de couplage).

La troisième partie concerne la propagation des états cohérents en théorie quantique des champs.

Dans d'autres travaux nous nous intéressons à la caractérisation du taux de décroissance de l'énergie pour certains systèmes dissipatifs dits de Petrowsky.



Title : Contributions to the semi-classical analysis of certain spectral objects via the microlocal approach.

Abstract : My research works belong to the fields of partial differential equations and mathematical physics. The main thread of these works is the semi-classical analysis, the tool of choice is microlocal analysis and the favorite spectral object is the resonances.

Much of my research concerns the asymptotics of resonances generated by a maximum of the potential in the case of the Schrödinger operator, as well as the study of resonances in the case where the trapped set is given by homoclinic and/or heteroclinic trajectories. In the latter case we show that we have a cloud of resonances, in general.

The second part of my work concerns the scattering theory for the periodic Schrödinger operator. In this context, we study the behavior of some spectral objects generated by different perturbations (slowly varying potential or with large coupling constant).

The third part concerns the propagation of coherent states in quantum field theory.

In other works we are interested in the characterization of the decay rate of energy for some abstract Petrowsky-like dissipative systems.