Cours de Systèmes Dynamiques

F. Béguin, S. Lelièvre

Approximation diophantienne

Les propriétés dynamique d'une rotation d'angle θ sur un cercle de longueur ℓ sont radicalement différentes selon que le paramètre $\alpha := \ell/\theta$ est un nombre rationnel ou irrationnel : dans le premier cas, toutes les orbites sont périodiques, dans le second, elles sont toutes denses. Les rotations appartiennent cependant à une catégorie de systèmes très particuliers : les systèmes linéaires. Pour un système non-linéaire qui dépend d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, le comportement changera en général radicalement, non pas selon que α sera rationnel ou irrationnel, mais plutôt selon que α sera "bien approché par les rationnels", ou "mal approché par les rationnels".

Remarque 1. Les physiciens savent bien cela. Un système non-linéaire qui présente des résonances a un comportement très différent d'un système non-résonant. Mais pour un physicien, une résonance ce n'est pas le fait que le rapport entre deux quantités appartient à $\mathbb{Q}$ (quel sens cela aurait-il pour des quantités que l'on ne connait qu'approximativement ?), mais plutôt le fait que ce rapport soit très proche d'un rationnel simple (*i.e.* d'un rationnel p/q avec q petit).

Nous allons donc être amenés à étudier l'approximation des nombre irrationnels par des rationnels. Considérons une approximation d'un irrationnel α par un rationnel p/q (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ premiers entre eux). On peut alors considérer la distance $|\alpha - p/q|$ comme une mesure de la "qualité" de cette approximation, et la taille de l'entier q comme une mesure du "prix" de cette approximation. Étant donné un irrationnel α, on cherche alors à trouver une suite de rationnels qui approchent α avec le meilleur "rapport qualité/prix" possible. Quel "rapport qualité-prix" peut-on espérer ? La distance est-elle $|\alpha - p/q|$ en général proportionnel à $-\log(q)$, à $1/q^2$, à $1/q^3$,... , à $\exp(-q)$? Cela dépend-t-il de α ?

Le théorème de Dirichlet fournit un "rapport qualité-prix" minimal, que l'on peut obtenir pour un irrationnel arbitraire :

Théorème 2 (Dirichlet)**.** *Pour tout irrationnel α, il existe une infinité de rationnels p/q tels que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Hurwitz a amélioré le théorème de Dirichlet, montrant que, dans cet énoncé, on peut remplacer $1/q^2$ par $1/(\sqrt{5}q^2)$. Le théorème d'Hurwitz est de plus optimal au sens suivant :

Théorème 3. *Pour toute constante $C < 1/\sqrt{5}$, on peut trouver un irrationnel α tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q vérifiant*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^2}.$$

Si le théorème de Dirichlet (ou d'Hurwitz) fournit un "rapport qualité-prix" minimal pour un irrationnel α arbitraire, il est cependant tr es facile de construire des irrationnel que l'on peut approcher par des rationnels avec un "rapport qualité-prix" bien meilleur que celui donné par le théorème de Dirichlet. Ainsi, si on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

alors, pour tout $r > 0$ il existe une infinité de rationnels p/q tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^r}.$$

Ceci incite à diviser les irrationnels en plusieurs catégories, selon qu'ils sont plus ou moins bien approchés par les rationnels. La division la plus pertinente en pratique est la suivante :

Définition 4. On dit qu'un irrationnel α est *diophantien* s'il existe des constantes $C > 0$ et $r > 2$ telle que, pour tout rationnel p/q, on a

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^r}.$$

Un nombre irrationnel qui n'est pas diophantien s'appelle un *nombre de Liouville.*

Les nombres diophantiens sont donc les irrationnels "mal approchés par les rationnels", et les nombres de Liouville sont les irrationnels "bien approchés par les rationnels".

Remarque 5. Bien sûr, il est parfois nécessaire d'affiner la division des irrationnels en nombres diophantiens et nombres de Liouville. Par exemple, on doit parfois considérer l'ensemble des irrationnels α tels qu'il existe une infinité de rationnels p/q vérifiant $|\alpha - p/q| \leq \epsilon(q)$ où $\epsilon : \mathbb{N} \to]0, +\infty[$ est une fonction qu'on ne connait pas explicitement (et telle que $\epsilon(q)$ tend très très vite vers 0 quand q tend vers l'infini).

Quels sont les nombres irrationnels les plus abondants ? Les nombres diophantiens ou les nombres de Liouville ? Tout dépend du point de vue qu'on adopte : du point de vue de la mesure de Lebesgue, presque tout nombre réel est diophantien ; mais, du point de vue de la topologie usuelle, presque tout nombre réel est un nombre de Liouville. Plus précisément, on a les résultats suivants :

Théorème 6. *L'ensemble des nombres de Liouville est de mesure de Lebesgue nulle.*

Théorème 7. *L'ensemble des nombres de Liouville contient une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$.*

Du point de vue de la théorie des corps, les nombres “les plus proches des nombres rationnels” sont les nombres algébriques. Sont-ils proches des nombres rationnels au sens de l'approximation diophantienne ? Non, bien au contraire, puisque Liouville a montré le théorème suivant :

Théorème 8 (Liouville)**.** *Tout nombre algébrique est diophantien.*

Exercices

1. Démontrer le théorème de Dirichlet (on pourra montrer qu'étant donné un réel α et un entier strictement positif Q, il existe au moins un entier $q \in \{1, \ldots, Q-1\}$ tel que la distance du réel $q\alpha$ à l'entier le plus proche soit inférieure à $1/Q$).

2. Montrer que le théorème d'Hurwitz est optimal : si $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$, et si $0 < C < 1/\sqrt{5}$, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q tels que $|\alpha - p/q| < C/q^2$.

3. Montrer que $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ est un nombre de Liouville.

4. Prouver que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure de Lebesgue nulle.

5. Prouver que, quelle que soit la fonction $\epsilon : \mathbb{N} \to]0, +\infty[$, l'ensemble $L(\epsilon)$ contient une intersection d'ouverts denses de $\mathbb{R}$. En déduire que l'ensemble des nombres de Liouville contient une intersection d'ouverts denses de $\mathbb{R}$.

6. Démontrer le théorème de Liouville (si α est un nombre algébrique, et p/q un nombre rationnel, on pourra minorer $|\alpha - p/q|$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis, entre le points α et p/q, au polynôme minimal de α).