Suites

Dans tout le texte, les suites considérées sont toutes à valeurs réelles.

I. Testez votre intuition

Question 1. Dessins

Dessiner les suites $(1/n)$, $(1/2^n)$, $(-1)^n$.

Question 2. Exemples

Donner...

1. ...un exemple de suite à valeurs strictement positives qui tend vers 0 ;
2. ...un exemple de suite à valeurs strictement négatives qui tend vers 0 ;
3. ...un exemple de suite qui tend vers 0 et qui prend une infinité de valeurs négatives ET une infinité de valeurs positives.

Question 3. Quizz

Répondre par VRAI ou FAUX :

a. Si une suite est bornée, alors elle admet une limite.

b. Si (u_n) est une suite strictement positive et convergente, alors $\lim(u_n) > 0$.

c. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante.

d. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante à partir d'un certain rang.

e. Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives et qui tend vers 0. Alors cette suite est décroissante à partir d'un certain rang.

f. Toute suite positive non bornée tend vers $+\infty$.

g. Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

h. Toute suite positive croissante non bornée tend vers $+\infty$.

i. Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

II. À propos des définitions "en εpsilon"

Pendant longtemps (jusqu'au XIXème siècle), les mathématiciens ont manipulé des suites et des fonctions en se contentant de la définition intuitive de la limite, sans rencontrer de problème particulier. Puis, ils sont tombés sur des propriétés plus subtiles, où l'intuition les a conduits à des contradictions. Ils ont alors commencé à critiquer le manque de rigueur en Analyse (en comparant par exemple à d'autres domaines des mathématiques comme l'arithmétique), et ils ont ressenti le besoin de se donner des **définitions précises**.

Ceci n'a pas été sans mal. En 1821, Cauchy propose la définition suivante : "*Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres*" ; en 1835, De Morgan écrit : "*Laissez-moi rendre x aussi petit que je veux, et je pourrai rendre $7 + x$ aussi proche de 7 que* vous *voulez*" ; enfin, Weierstrass écrit la définition moderne de la limite, avec les ϵs et les δs, entre 1840 et 1860. Une des difficultés était que les notions de variables et de fonctions n'étaient pas non plus clairement définies.

Ces définitions ont représenté **un progrès énorme**, puisqu'elles permettent de savoir exactement de quoi on parle, et de distinguer avec certitude les propriétés vraies des propriétés fausses.

Mais il ne faut pas cacher que ces définitions ont aussi **un gros désavantage** : elles sont difficiles à comprendre, et surtout très difficiles à manipuler. Atteindre la certitude a un prix : il faut pour cela accepter de passer un certain temps à se familiariser, progressivement, avec ces notions.

En particulier, les premiers exercices peuvent être un peu frustrants, puisqu'on a l'impression de se fatiguer beaucoup pour démontrer des évidences. Il ne faut pas oublier que ce ne sont que "des gammes", et qu'il faut commencer par faire des gammes avant de pouvoir jouer de la vraie musique...

Dans tous les exercices qui suivent, la règle du jeu est d'obtenir une rédaction la plus convainquante possible, en utilisant chaque fois qu'il le faut la définition "en ϵ" de la limite.

III. Exercices simples avec le formalisme en "ϵ"

Question 1. Préliminaires

Donner la définition...

a. d'une suite ;

b. de sa limite éventuelle[1] ;

[1] Si le cours n'a pas encore eu lieu, inspirez-vous de la définition de la limite pour une fonction.

c. d'une suite bornée ; d'une suite non bornée ;

d. d'une suite croissante ;

e. d'une suite croissante à partir d'un certain rang.

Question 2. Applications directes de la définition

Montrer les propriétés suivantes :

a. La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

b. Soit (u_n) une suite qui tend vers 1 ; alors cette suite est strictement positive à partir d'un certain rang (traduire d'abord cette phrase avec des quantificateurs).

c. Si une suite admet une limite finie, alors elle est bornée.

d. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Alors la suite (u_{n+100}) tend aussi vers 0. Même chose pour la suite (u_{2n}). **Aide** pour comprendre ce qu'est la suite (u_{n+100}) : prenez $u_n = 1/n$, écrivez les premiers termes des suites (u_{n+100}), (u_{2n}), (u_{n^2}).

IV. Exercices plus difficiles

Question 1. Suites de rang pair et impair

Soit (u_n) une suite telle que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers 0. Montrer que la suite (u_n) tend aussi vers 0.

Question 2. Critère séquentiel de la continuité

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si elle vérifie le *critère séquentiel de la continuité : pour toute suite (u_n) convergeant vers 0, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(0)$.*

Question 3.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet une limite finie l en $+\infty$. Quel est le comportement (en $+\infty$) de la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \int_n^{n+5} f(t)dt \qquad ?$$

Indication : essayer de deviner la valeur de cette intégrale quand n est très grand (à l'aide d'un dessin), puis rédiger une preuve.

Question 4. Suites d'entiers

Donner la définition d'une suite stationnaire. Montrer qu'une suite d'entiers qui tend vers une limite finie est stationnaire.

Question 5. Extraction

On appelle *suite extraite de la suite* (u_n) (ou *sous-suite de* (u_n)) "n'importe quelle suite obtenue à partir de (u_n) en oubliant certains termes".

a. Transformez cette définition vague en une vraie définition.

b. Choisissez une suite (u_n) bornée non convergente (voir le quizz, question I.3.a). Trouvez une suite extraite de (u_n) qui est convergente. Trouvez une autre suite extraite de (u_n) qui converge vers une autre limite.

c. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui est croissante. (**Indication :** commencez par relire le quizz, question I.3.d ; faites un dessin d'un contre-exemple à cette affirmation du quizz ; sur le dessin, comment extraire une suite croissante ? Puis construire la suite extraite, par récurrence, dans le cas général.)

Question 6. Vers l'idée de "valeurs d'adhérence"...

a. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 ?

b. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 et 3 ?

c. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois la valeur 1, ET une infinité de fois la valeur 2, ... ET ainsi de suite pour CHAQUE entier positif k ?

d. Existe-t-il une suite (u_n) à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que : pour tout réel x entre 0 et 1, la suite (u_n) s'approche arbitrairement près de x, et à un rang arbitrairement grand ? (Commencer par traduire cette propriété avec des "ϵ").

Question 7.

A-t-on $0,999... = 1$?
