Test n° 2
Fonctions de deux variables

Le 20 novembre, je choisirai 4 des affirmations ci-dessous. Pour chacune d'entre elles, vous devrez dire si elle est vraie ou fausse, et justifier soigneusement cette réponse. Vous disposerez d'une dizaine de minutes pour cela.

1.— L'ensemble de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ est le plan privé de deux droites.

2.— L'ensemble de définition de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{\sin(x)}$ est le plan privé d'une droite.

3.— La fonction $f(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)}$ est définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé d'un cercle.

4.— La fonction $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$ est définie sur l'espace $\mathbb{R}^3$ en entier.

5.— La fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ a pour fonctions partielles au point de coordonnées $(1,2)$ les fonctions $f_1(x) = x^2 + 1$ et $f_2(y) = 4 + y^2$.

6.— Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = \exp(x)\sin(y)$. Alors les fonctions partielles f au point $(0,\pi)$ sont bornées.

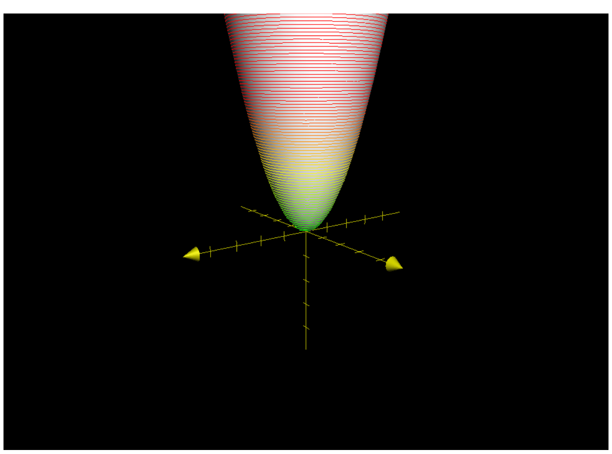
7.— Soit la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = (1+x)\ln(1+e^y)$. Alors les fonctions partielles de f au point $(1,2)$ sont croissantes.

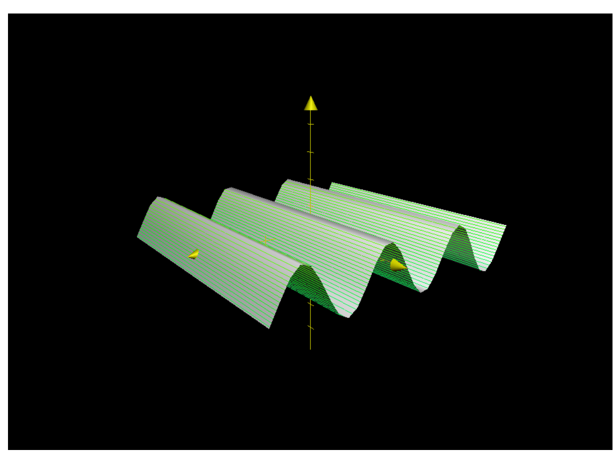
8.— Les lignes de niveau de la fonction $f(x,y) = \exp(x+2y)$ sont des droites.

9.— Les lignes de niveaux de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ sont des cercles.

10.— Le dessin ci-dessous, à gauche, représente le graphe de la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3$.

11.— Le dessin ci-dessous, à droite, représente le graphe de la fonction $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.



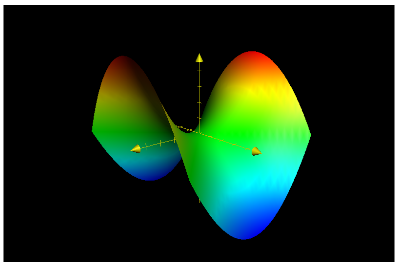
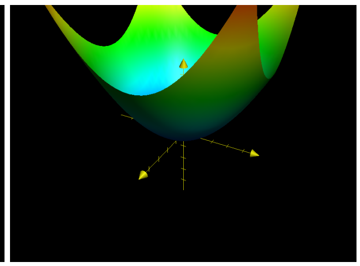
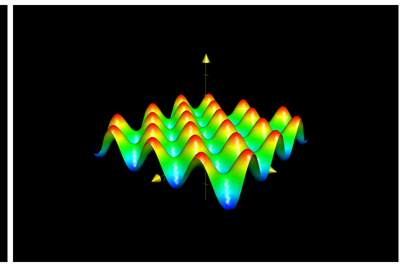


12.— Le plan d'équation $z = 2x - y + 3$ est orthogonal au vecteur $(2, -1, -1)$ et passe par le point $(0, 0, 3)$.

13.— La figure ci-dessous à gauche représente le graphe de la fonction $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2) - 1$.

14.— La figure ci-dessous au milieu représente le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$.

15.— La figure ci-dessous à droite représente le graphe de la fonction $f(x, y) = \exp\big(1 - \big(x^2 + y^2\big)\big)$.

16.— Soit $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Alors on a, pour tous $x, y > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

17.— Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^3$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(1, 0, 1)$ a pour équation $z = 1 + 2x + 3y$.

18.— Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + x + 2y + 2\exp y^2$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(0, 0, 2)$ a pour équation $z = x + 2y$.

19.— Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + x + 2y + 2\exp y^2$. Le développement limité à l'ordre 1 de la fonction f au point de coordonnées $(1, 0)$ est $f(1 + h, k) = 3h + 2k + \|(h, k)\|\epsilon(h, k)$ où $\epsilon(h, k) \to 0$ quand $(h, k) \to (0, 0)$