Test n° 3

Fonctions de plusieurs variables - Intégrales multiples

Le 18 décembre, je choisirai 4 des affirmations ci-dessous. Pour chacune d'entre elles, vous devrez dire si elle est vraie ou fausse, et justifier soigneusement cette réponse. Vous disposerez d'une dizaine de minutes pour cela.

1.— Le domaine de définition de la fonction de deux variables $f(x,y) = \ln(4-x^2)\ln(4-y^2)$ est un carré.

2.— Une fonction de deux variables admet toujours au moins un point critique.

3.— La fonction $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ possède une infinité de points critiques.

4.— La fonction définie par $f(x,y) = (y+y^2)e^{-x^3}$ ne possède aucun point critique.

5.— La fonction définie par $f(x,y) = (x-2)(y-3)(x+y-15)$ admet exactement trois points critiques.

6.— Soit $f(x,y,z) = \cos(x)\cos(y)$. Le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0,0)$ s'écrit

$$f(h,k) = 1 + \frac{1}{2}h^2 + hk + \frac{1}{2}k^2 + \|\|(h,k)\|\|^2\epsilon(h,k)$$

avec $\epsilon(h,k) \to 0$ quand $\|\|(h,k)\|\| \to 0$.

7.— Le point $(0,0)$ est un minimum local de la fonction $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.

8.— Le point $(0,0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local de la fonction f définie par $f(x,y) = \exp(x^2-y^2)$.

9.— La fonction définie par $f(x,y) = \exp(x^2+2y^2)$ atteint son minimum global au point $(0,0)$.

10.— Le point $(0,0)$ est un minimium local de la fonction $f(x,y) = x^4+y^4+1$.

11.— La valeur de l'intégrale $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$ ne dépend pas de l'entier n.

12.— Notons $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx$. Pour $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

13.— Si D est une région bornée du plan, bordée par une courbe fermée continue, alors on a

$$\text{Aire}(D) = \iint_D xydxdy.$$

14.— Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ dans le plan. On a

$$\int_T y \;\; dxdy = \frac{1}{2}.$$

15.— Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ dans le plan. L'intégrale sur T de la fonction $f(x,y) = x^2y^3$ est supérieure ou égale à 1.

16.— L'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^3 \leq y \leq 2x^3\}$. est égale à 1.

17.— Soit $D(0,R)$ le disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$, centré à l'origine, de rayon R. On a

$$\int_{D(0,R)} \exp(x^2+y^2) \;\; dxdy = \pi(1-\exp(-R^2)).$$

18.— Soit $D(0,R)$ le disque dans $\mathbb{R}^2$, centré à l'origine, de rayon R. On a

$$\int_{D(0,R)} \cos(x^2+y^2)dxdy = 2\pi\cos(R).$$