Brève correction de l'examen du 2 septembre 2008

Convolution et régularisation.

1. Faux. Voir cours.

2. Vrai. Supposons g polynomiale. Il existe alors un entier $n \geq 0$ tel que $g^{(n)} = 0$. Par ailleurs, on sait que $(f * g)^{(n)} = f * g^{(n)}$ (on retrouve facilement ce résultat en explicitant $f * g$, et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale). Par conséquent, la dérivée n^{eme} de $f * g$ est identiquement nulle, ce qui prouve que $f * g$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

3. Faux. On calcule. Pour $x \geq 0$,

$$(f_\alpha * f_\beta)(x) = \int_{t=0}^{x} e^{\alpha(x-t)} e^{\beta t} dt = e^{\alpha x} \int_{t=0}^{x} e^{(\beta-\alpha)t} dt = e^{\alpha x} . \frac{e^{(\beta-\alpha)x} - 1}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{\beta - \alpha}.$$

Pour $x \leq 0$, le même calcul donne $(f_\alpha * f_\beta)(x) = 0$. On a donc

$$f_\alpha * f_\beta = \frac{f_\alpha - f_\beta}{\alpha - \beta}.$$

Autour de la densité des fonctions polynomiales.

4. Faux. Une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ est soit constante, soit non-bornée. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales, on a donc l'alternative suivante :

- soit, pour n assez grand, la fonction polynomiale f_n est constante, et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut alors converger que vers une fonction constante ;
- soit, pour une infinité d'entiers n, la fonction polynomiale f_n n'est pas bornée, et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas converger vers une fonction bornée.

Ainsi, si f est bornée mais non-constante, il n'existe aucune suite de fonction polynomiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

5. Vrai. D'après le théorème de Weierstarss, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - g_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit alors, pour tout n, la primitive f_n de g_n qui vaut $f(0)$ en 0. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f'(t) - g_n(t)| dt \leq \sup_{t\in[0,1]} |f'(t) - g_n(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

et bien sûr

$$\sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - f_n'(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - g_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. Faux. Si I est borné, alors pour n'importe quelle fonction continue $f : \bar{I} \to \mathbb{R}$, il existe, d'après le théorème de Weierstrass, une suite de fonctions polynomiales (donc, en particulier, analytiques) qui converge uniformément vers f.

Séries de Fourier.

7. Faux. Si f est une fonction 2π-périodique de classe C^2, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (voir cours).

8. Vrai. Si $S_n(f)(x) \leq S_n(g)(x)$ pour tout n et tout x, alors $\Sigma_N(f)(x) \leq \Sigma_N(g)(x)$ pour tout N et tout x, où

$$\Sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n-1} S_n(f)(x) \quad \text{et} \quad \Sigma_N(g)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n-1} S_n(g)(x)$$

sont les N^{emes} somme de Fejer des fonctions f et g. Mais, puisque f et g sont continues, elles sont limites uniformes de leurs sommes de Fejer. Donc $f(x) \leq g(x)$ pour tout x.

9. Vrai. Puisque f est C^1, on a $c_n(f) = \dfrac{1}{in}c_n(f')$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier,

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f')|$$

pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Par ailleurs, d'après l'égalité de Bessel-Parseval, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2.$$

Pour conclure, il reste à mettre ensemble ces égalités/inégalités, et à remarquer que $c_0(f) = 0$ (puisque $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$).

10. Faux. S'il existait une telle fonction f, alors on aurait, pour toute fonction $g \in C^\infty_{2\pi}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f)c_n(g) = c_n(f * g) = c_n(g).$$

Par suite, on aurait $c_n(f) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui est bien sûr impossible.

Séries entières, fonctions analytiques et fonctions holomorphes.

11. Vrai. Poser $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

12. Faux. Si un tel F existait, alors la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n+1}$ convergerait normalement sur tout disque de $\mathbb{C}$ (voir cours).

13. Vrai. Supposons f analytique et fixons $x \in \mathbb{R}$. Il existe un disque D centré en x tel que, pour tout $y \in D$,

$$f(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n$$

En particulier, si f n'est pas constante sur D, il existe n tel que $f^{(n)}(x) \neq 0$.

14. Faux. Toute fonction polynomiale est un contre-exemple à l'affirmation.

15. Faux. Si une telle fonction f existait, alors elle aurait au moins un zéro dans l'intervalle $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ pour tout n. Ceci contredirait le théorème des zéros isolés.

16. Vrai. Par exemple, $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2}$ pour tout x.