Université Paris 13 Nord - Institut Galilée

Licence mention Physique-Chimie

Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques

François Béguin

Année universitaire 2014-2015

Le texte qui suit fait de larges emprunts au support d'un cours de l'Université Paris-Sud écrit par Frédéric Le Roux et Thierry Ramond. Je remercie ces derniers d'avoir autorisé (et encouragé) ce plagiat.

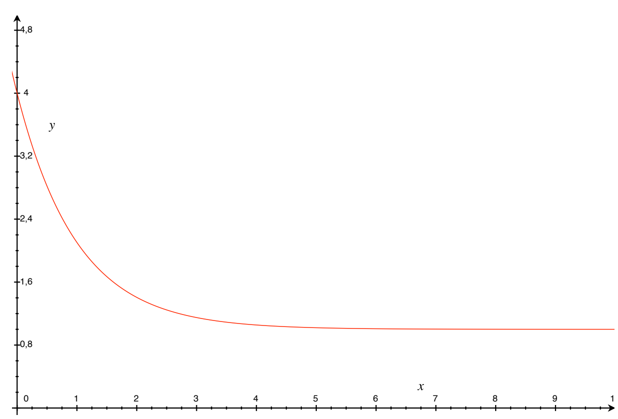
Introduction

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Jusqu'à maintenant, vous avez essentiellement appris à étudier des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce sont des fonctions d'une variable réelle dont les valeurs sont également des nombres réels. Une telle fonction modélise une situation où l'on a une quantité numérique (*i.e.* un nombre réel) qui dépend que d'une autre quantité numérique (*i.e.* d'un autre nombre réel). Imaginez, par exemple, que vous étudiez la température d'une pièce de métal que l'on a préalablement chauffée à une température A, et que l'on met à refroidir dans une enceinte à température constante B (avec $B < A$ bien sûr). La température T de la barre est une quantité numérique (un nombre réel positif) qui ne dépend alors que d'une autre qunatité numérique : le temps t. Autrement dit, la situation est modélisée par une fonction $t \mapsto T(t)$ de $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. Ici on aura

$$T(t) = B + (B - A)\exp(-rt),$$

où r est une constante qui dépend du métal constituant la barre et des dimensions de celle-ci. Le graphe de $t \mapsto T(t)$ représenté ci-dessous permettra de visualisé l'évolution de la température de la barre.



Il existe d'autres types de fonctions.

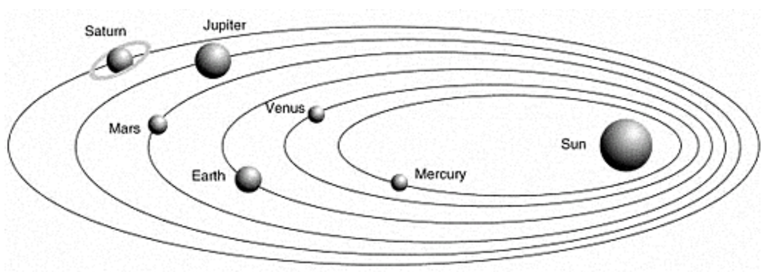
De nombreuses situations ne peuvent être modélisées par des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Considérons par exemple une planète qui, soumise à l'attraction du Soleil, se déplace dans le plan de l'écliptique. La position de la planète à l'instant t est donc un point $P(t)$ dans le plan de l'écliptique, que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^2$ (après avoir choisi un repère). D'après les lois de Képler, les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $P(t)$ dans un repère bien choisi sont du type

$x(t) = A\frac{\cos(t)}{1+e\cos(t)}$ et $y(t) = A\frac{\sin(t)}{1+e\cos(t)}$, où A et e sont des constantes (appelées respectivement excentricité et demi-grand axe). Pour modéliser cette situation on a donc besoin d'une fonction

$$t \mapsto P(t) = \left(A\frac{\cos(t)}{1+e\cos(t)} \, , \, A\frac{\sin(t)}{1+e\cos(t)} \right)$$

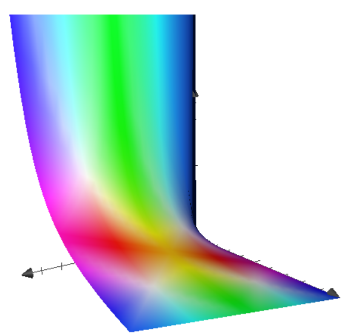
qui va de $\mathbb{R}$ (puisque t est un nombre) dans $\mathbb{R}^2$. C'est une fonction d'une variable, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Une telle fonction s'appelle une *courbe paramétrée plane.*



Considérons maintenant une mole d'un gaz parfait. Le volume V de ce gaz, sa pression p et sa température T sont alors reliés par la loi bien connue $pV = RT$ (où R est une constante dépendant du gaz). Le volume V est donc un nombre réel qui dépend qui dépend de deux autres nombres réels p et T. Pour modéliser cette situation, on a donc besoin d'une fonction

$$(p, T) \mapsto V(p, T) = \frac{RT}{p}$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. C'est une fonction de deux variables, à valeurs réelles. On a représentée ci-dessous le graphe de cette fonction : c'est une surface dans $\mathbb{R}^3$.



But et contenu du cours.

Le but du cours est d'apprendre à utiliser, à étudier et à représenter graphiquement les fonctions comme celles que nous avons entrevues ci-dessus. Le cours est divisé en quatre parties :

1. la première partie — très courte — concerne les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on y rappelle essentiellement l'allure des graphes des fonctions classiques ;

2. dans la deuxième partie, on apprendra à étudier les *courbes paramétrées planes*, c'est-à-dire les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$;
3. dans la troisième partie, on s'intéresse aux *fonctions de plusieurs variables* (le plus souvent de deux variables), c'est-à-dire les fonctions de $\mathbb{R}^n$ (presque toujours $\mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{R}$,
4. enfin, la quatrième partie est une introduction aux intégrales de fonctions de plusieurs variables. Ce type d'intégrale apparait en permanence en physique, par exemple dès qu'on veut calculer un champ ou un courant électrique, ou faire de la mécanique des fluides.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Chapitre 1

Allure des graphes de fonctions simples

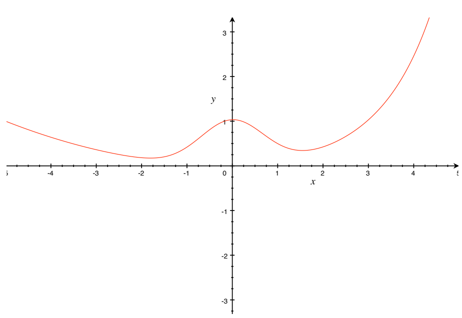
Pour tracer le graphe d'une fonction donnée par une formule, vous pouvez rentrer cette formule dans une calculatrice ou un ordinateur ; en quelques secondes, vous obtenez le graphe souhaité (ou plutôt la partie du graphe correspondant aux "plages" en x et en y que vous aurez choisies, et qui ne sont peut-être pas adaptées...). Vous savez aussi (mais c'est plus long) étudier cette fonction, déterminer son tableau de variation, ses extrema, ses limites, ses asymptotes, et, à l'issu de cette étude, donner une représentation satisfaisante de son graphe.

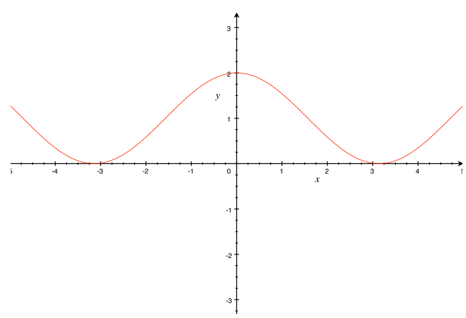
Quand on manipule des fonctions (en particulier quand le but n'est pas de faire des mathématiques, mais d'utiliser ces fonctions pour analyser un problème physique, chimique, etc.), il est cependant indispensable de savoir tracer et reconnaitre les graphes de certaines fonctions simples *immédiatement*, et *sans avoir à utiliser de calculatrice, ni faire d'étude de fonction.*

Imaginez que vous vous intéressez à un système chimique, et plus précisément à l'évolution de la concentration c d'un composant en fonction du temps t.

— Supposez qu'en utilisant des lois physiques et un certain nombre d'hypothèses, vous avez trouvé que l'évolution de la concentration c est donnée par la fonction $c(t) = \exp(t)$. Vous faites une expérience. Supposée que le résultat de cette expérience (la concentration c en fonction du temps t) est donnée par la figureci-dessous à gauche. Il est important que vous réalisiez immédiatement qu'il y a un problème : ceci ne ressemble nullement au graphe de la fonction $t \mapsto \exp(t)$!

— Inversement, supposez que la figure ci-dessous à droite représente le résultat de votre expérience. Ces données expérimentales doivent immédiatement vous faire penser au graphe de la fonction $x \mapsto cos(x) + 1$, et vous devez essayer de voir si vous pouvez justifier l'apparition de cette fonction cela par un modèle physique de votre expérience.



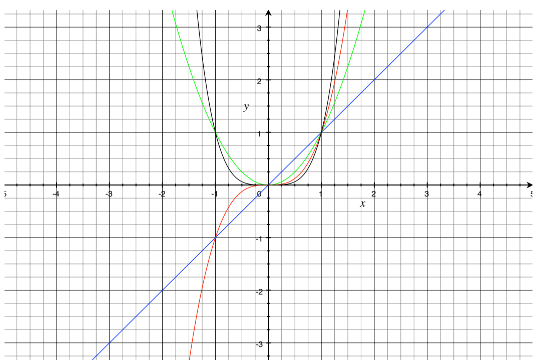
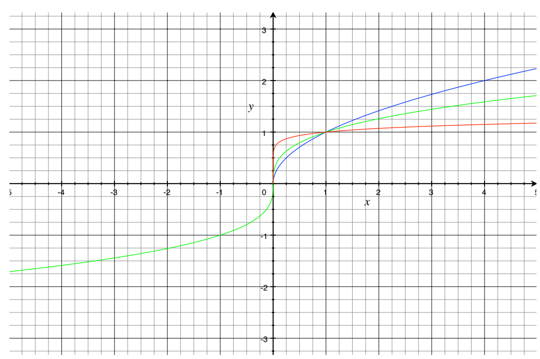


1.0.1 Graphes des fonctions usuelles

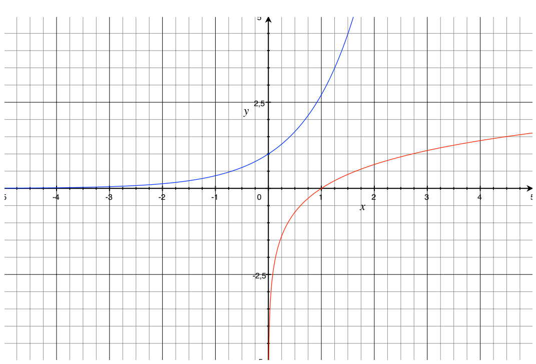
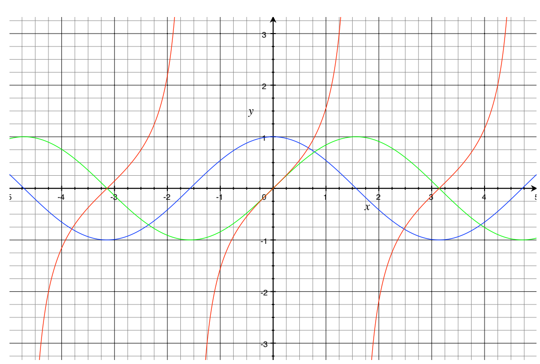
Voici une liste de fonctions usuelles dont vous devez connaitre les graphes (Cf TD).

$$x \mapsto x \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x^3 \qquad x \mapsto x^4 \qquad \ldots$$
$$x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \mapsto x^{1/3} \qquad x \mapsto x^{1/10} \qquad \ldots.$$
$$x \mapsto \ln(x) \qquad x \mapsto \exp(x),$$
$$x \mapsto \cos(x) \qquad x \mapsto \sin(x) \qquad x \mapsto \tan(x),$$
$$x \mapsto \cosh(x) \qquad x \mapsto \sinh(x) \qquad x \mapsto \tanh(x).$$

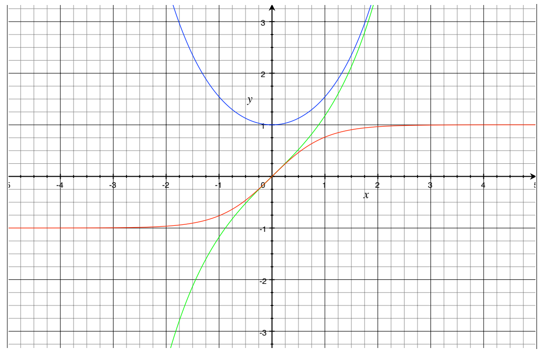
Connaitre signifie : d'une part être capable d'esquisser rapidement le graphe de chacune de ces fonctions, et d'autre part, être capable de reconnaitre rapidement ces graphes (distinguer immédiatement le graphe de $x \mapsto x^5$ de celui de $x \mapsto x^6$, par exemple).

Ci-dessus, à gauche, les graphes des fonctions $x \mapsto x$ (en bleu), $x \mapsto x^2$ (en vert) $x \mapsto x^3$ (en rouge), $x \mapsto x^4$ (en noir). À droite, les graphes des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ (en bleu), $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ (en vert) $x \mapsto x^{\frac{1}{10}}$ (en rouge).

Ci-dessus, à gauche, les graphes des fonctions $x \mapsto \exp(x)$ (en bleu), $x \mapsto \ln(x)$ (en vert). À droite, les graphes des fonctions $x \mapsto \cos x$ (en bleu), $x \mapsto \sin(x)$ (en vert) $x \mapsto \tan(x)$ (en rouge).



Ci-dessus, les graphes des fonctions $x \mapsto \cosh(x)$ (en bleu), $x \mapsto \sinh(x)$ (en vert), $x \mapsto \tanh(x)$ (en bleu).

1.0.2 Transformations géométriques

Par ailleurs, vous devez connaitre (et surtout savoir utiliser) le théorème ci-dessous. Ce théorème qui vous permet de tracer les graphes de certaines fonctions simples en utilisant les graphes que vous connaissez auparavant (par exemple, les graphes des fonctions usuelles ci-dessus) et des transformations géométriques simples.

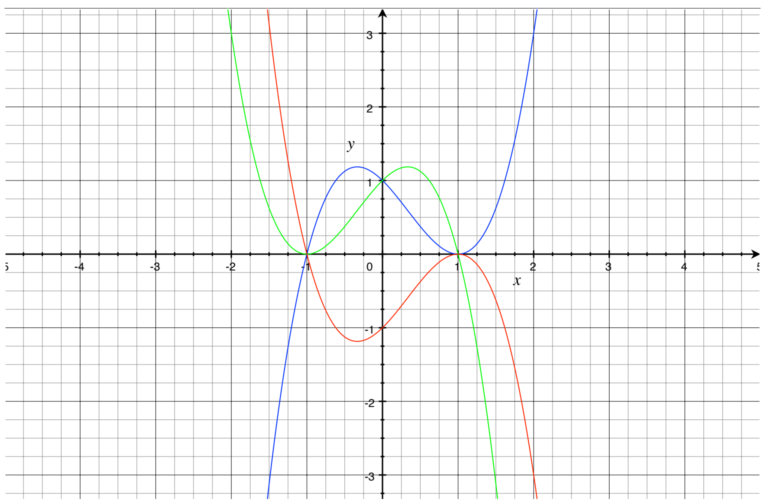
Théoreme 1.0.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable.*

1. *Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.*
2. *Le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*
3. *Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + b$ est l'image du graphe de f par la translation (verticale) de vecteur $(0, b)$.*
4. *Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ est l'image du graphe de f par la translation (horizontale) de vecteur $(-a, 0)$ (attention, c'est bien $(-a, 0)$, et pas $(a, 0)$).*
5. *Le graphe de la fonction $x \mapsto k.f(x)$ est l'image du graphe de f par la transformation $(x, y) \mapsto (x, k.y)$, qui étire (si $|k| > 1$) ou compresse (si $|k| < 1$) le plan d'un facteur k dans la direction verticale.*
6. *Le graphe de la fonction $x \mapsto f(k.x)$ est l'image du graphe de f par la transformation $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{k}.x, y\right)$, qui compresse (si $|k| > 1$ et donc $1/k < 1$) ou étire (si $|k| < 1$ et donc $1/k > 1$) le plan d'un facteur $1/k$ dans la direction horizontale (attention, c'est bien $1/k$ et non pas k).*
7. *Le graphe de la fonction $x \mapsto f^{-1}(x)$ (la fonction réciproque de f, si elle existe) est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la diagonale $(y = x)$.*

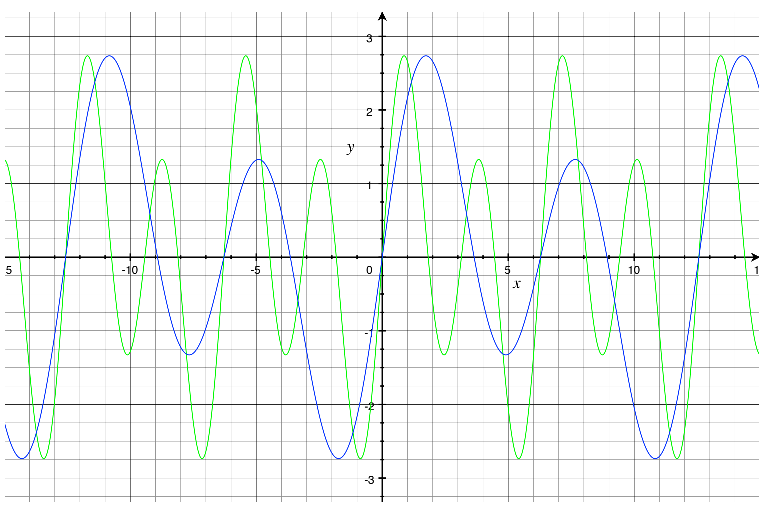
Ce théorème vous permet par exemple de tracer en un clin d'oeil, sans calculatrice, ni étude de fonction, le graphe de la fonction $x \mapsto \cos(2x) + 1$: vous partez du graphe de $\cos x$ (que vous *devez* connaitre), vous contractez d'un facteur $\frac{1}{2}$ dans la direction horizontale, et vous translatez de 1 verticalement : vous avez obtenu le graphe $x \mapsto \cos(2x) + 1$.

Éléments de preuve. Expliquons par exemple le point 4 : pourquoi est-ce la translation de vecteur $(-a, 0)$ qui apparait ? (plutôt que la translation de vecteur $(a, 0)$ comme on s'y attend

naïvement). Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x + a)$.
Le point $(x, f(x)$ appartient au graphe de f. Son image par la translation de vecteur $(-a, 0)$, c'est le point $(x - a, f(x))$. Ce point appartient au graphe de g : en effet, $f(x) = f(x - a + a) = g(x - a)$. Ainsi, l'image du graphe de f par la translation de vecteur $(-a, 0)$ est bien le graphe de g. $\square$



Ci-dessus, le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$ (en bleu), le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ (en vert), et le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ (en rouge).



Ci-dessus, le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$ (en bleu), et le graphe de la fonction $x \mapsto f(2x)$ (en vert).

Courbes paramétrées planes

Nous allons maintenant apprendre à étudier et représenter graphiquement les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Une telle fonction s'appelle une *courbe paramétrée plane*. Il faut penser à un point $M(t)$ du plan $\mathbb{R}^2$ dont la position dépend du temps t (bien sûr, t varie $\mathbb{R}$ ou dans une partie de $\mathbb{R}$). Les courbes paramétrées apparaissent d'ailleurs souvent dans les problèmes mécaniques où un objet se déplace au cours du temps sous l'action d'un certain nombres de forces (penser par exemple aux mouvement d'une planète dans le plan de l'ecliptique sous l'action de l'attraction du Soleil).

Mode de représentation des courbes paramétrées. Il est important de noter que l'on ne représente pas graphiquement les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ de la même manière que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— Pour représenter graphiquement une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on trace *le graphe* de f, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ du type $(x, f(x))$. Ce graphe permet de visuliser la manière dont $f(x)$ dépend de x.

— Pour représenter graphiquement une fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on trace seulement *l'image* de la fonction M (autrement dit, l'ensemble des points du plan par lesquelles passe le point $M(t)$ quand le temps t parcourt $\mathbb{R}$). C'est une courbe dans le plan. Elle ne permet de visualiser de manière fine la dépendance de $M(t)$ par rapport à t : en voyant la courbe, on sait "par où est passé le point $M(t)$", mais on ne sait pas "à quel moment il est passé à un endroit donné".

Quelques remarques.

- La différence de mode de représentation entre fonctions d'une variable et courbes paramétrée plane est guidée par des raisons pratiques : en gros, on veut un dessin avec le maximum d'information, mais qui reste lisible ! On peut bien sûr tracer l'image d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais cette dernière trop peu d'information ; par exemple l'image de la fonction cos est l'intervalle $[-1, 1]$; c'est aussi l'image de la fonction sin. À l'opposé, on pourrait envisager de tracer le *graphe* d'une fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, mais c'est un objet (une courbe dans $\mathbb{R}^3$) très (trop) difficile à tracer et difficile à interpréter.
- Deux fonctions différentes ne peuvent pas avoir le même graphe. Par contre, deux courbes paramétrées différentes peuvent avoir la même image (cela correspond à des points mobiles qui passent par les mêmes endroits, mais pas au même moment).
- Un point M du plan $\mathbb{R}^2$ peut être repérer par ses coordonnées (x, y). Ainsi, une courbe paramétrée $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ équivaut à un couple de fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Étudier une courbe paramétrée va donc consister à étudier *simultanément* deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- On peut bien sûr considérer des courbes paramétrées *non-planes*, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $n > 2$. L'étude de telles courbe ne pose guère plus de problème que celle des courbes paramétrées planes. Néanmoins tracer l'image d'une courbe pa-

ramétrée à valeur dans $\mathbb{R}^n$ est très difficile si $n = 3$, et impossible si $n \geq 4$. C'est pourquoi on se limitera dans la suite aux courbes paramétrées planes, *i.e.* à valeurs dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Pour simplifier, toutes les fonctions considérées dans ce chapitre seront tacitement supposées continues et dérivables autant de fois que nécessaire sur leur ensemble de définition.

Chapitre 2

Étude des courbes paramétrées planes

2.1 Définitions

Définition (Courbe paramétrée plane)**.** *On appelle* ***courbe paramétrée plane*** *une fonction $M : I \to \mathbb{R}^2$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. L'****image*** *de cette courbe paramétrée est le sous-ensemble du plan*

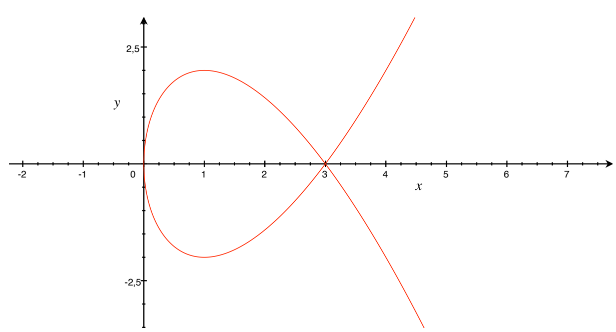
$$\mathcal{C} = \{M(t)\ ,\ t \in I\}$$

(c'est l'ensemble de tous les points du plan par lesquels passe $M(t)$ quand le temps t parcourt l'intervalle I). On dit aussi parfois que $\mathcal{C}$ est la ***courbe géométrique associée*** *à la courbe paramétrée $M : I \to \mathbb{R}^2$.*

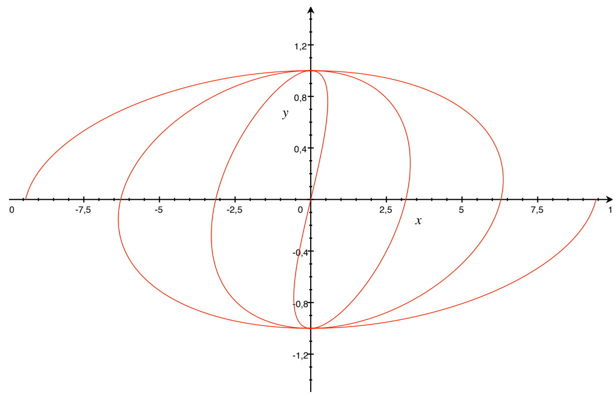
L'image d'une courbe paramétrée est une "courbe" au sens usuel du terme, c'est-à-dire un objet géométrique de dimension 1.

Le but de la suite du chapitre est d'apprendre à étudier les courbes paramétrées planes, afin de pouvoir représenter leurs images.

Exemple. La fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui à t associe le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ données par $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3 - 3t$ est une courbe paramétrée plane. Son image est la courbe tracée ci-dessous :



Exemple. La fonction $M :]-3\pi, 3\pi[\to \mathbb{R}^2$ qui à $\theta \in]-3\pi, 3\pi[$ associe le point $M(\theta)$ de coordonnées $(\theta.\cos(\theta), \sin(\theta))$ est une courbe paramétrée plane. Son image est la courbe tracée ci-dessous :



Exemple. Le graphe de n'importe quelle fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être vu comme l'image d'une courbe paramétrée.
En effet, soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons la courbe paramétrée $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui à $t \in \mathbb{R}$ associe le point $M(t)$ de coordonnées $(t, f(t))$. L'image de la courbe paramétrée cette courbe $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points du plan de la forme $(t, f(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$: c'est le graphe de la fonction f.

Remarque. La réciproque est fausse : il existe beaucoup de courbes paramétrées dont les images ne sont pas des graphes de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir les exemples précédents).

2.2 Ensemble de définition

Définition (Ensemble de définition)**.** *L'**ensemble de définition** d'une courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est l'intersection des ensembles de définitions des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.*

Autrement dit, pour qu'un réel t_0 appartienne à l'ensemble de définition d'une courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, il faut que la fonction $t \mapsto x(t)$ *et* la fonction $t \mapsto y(t)$ soient *toutes les deux* définies en t_0.

Exemple. Considérons la courbe $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ définie par

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t}{1 - t^2} , \frac{1}{t} \right)$$

La fonction x est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. La fonction y est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'ensemble de définition de la courbe $t \mapsto M(t)$ est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

2.3 Symétries et réduction de l'intervalle d'étude

Il est très fréquent qu'une courbe paramétrée présente des symétries. Grâce à ces symétries, on ne sera pas obligé d'étudier la courbe sur son ensemble de définition tout entier, mais seulement sur une partie de celui-ci.

Exemple. Considérons par exemple la courbe paramétrée $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $M(t) = (x(t)\,,\, y(t)) = (\sin(2t)\,,\, \cos(t))$. L'ensemble de définition de cette courbe est bien sûr $\mathbb{R}$ tout entier. Pour autant, on n'a pas besoin d'étudier la courbe sur $\mathbb{R}$ tout entier. Nous allons voir qu'il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

En effet, on remarque tout d'abord que :

$$(x(t+2\pi), y(t+2\pi)) = (\sin(2t+4\pi), \cos(t+2\pi)) = (\sin(t), \cos(t)) = (x(t), y(t)).$$

Ainsi, pour tout t, le point $M(t+2\pi)$ coïncide avec le point $M(t)$. Quand t parcourt $[0, 2\pi]$, $t+2\pi$ parcourt $[2\pi, 4\pi]$. Par conséquent, le morceaux de courbe $M([2\pi, 4\pi])$ coïncide avec le morceau de courbe $M([0, 2\pi])$. Et le morceau de courbe correspondant à $M([4\pi, 6\pi])$ coïncide avec le morceau de courbe $M([2\pi, 4\pi])$. Etc. Il suffit donc d'étudier la courbe pour $t \in [0, 2\pi]$.

Ce n'est pas fini. On remarque maintenant que

$$(x(t+\pi), y(t+\pi)) = (\sin(2t+2\pi), \cos(t+\pi)) = (\sin(2t), -\cos(t)) = (x(t), -y(t)).$$

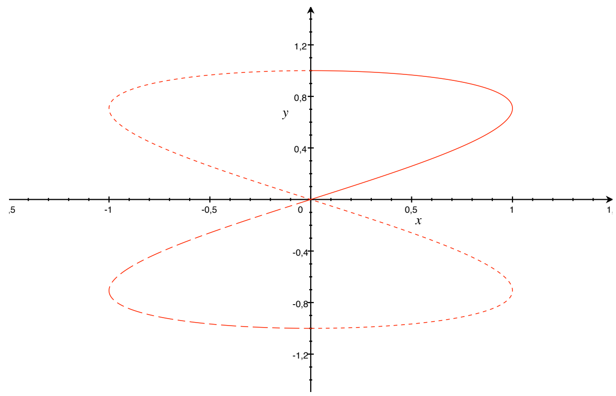
Ainsi, pour tout t, le point $M(t+\pi)$ est l'image du point $M(t)$ par la transformation du plan $(x, y) \mapsto (x, -y)$, c'est-à-dire par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Quand t parcourt $[0, \pi]$, $t+\pi$ parcourt $[\pi, 2\pi]$. Le morceaux de courbe $M([\pi, 2\pi])$ est l'image du morceau de courbe $M([0, \pi])$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Pour obtenir la partie de courbe correspondant à $t \in [0, 2\pi]$), il suffit donc d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi]$: on trace la partie de la courbe correspondant à $t \in [0, \pi]$, puis l'image de cette partie de courbe par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.. On pourra donc se restreindre à étudier la courbe sur $[0, \pi]$.

Ce n'est toujours pas fini. On remarque que

$$(x(\pi-t), y(\pi-t)) = (\sin(2\pi-2t), \cos(\pi-t)) = (-\sin(2t), -\cos(t)) = (-x(t), -y(t)).$$

Ainsi, pour tout t, le point $M(\pi-t)$ est l'image du point $M(t)$ par la transformation du plan $(x, y) \mapsto (-x, y)$, c'est-à-dire par la symétrie par rapport à l'origine. Quand t parcourt $[0, \pi/2]$, $\pi - t$ parcourt $[\pi/2, \pi]$. Par suite, les morceaux de courbe $M([\pi/2, \pi])$ est l'image du morceau de courbe correspondant à $M([0, \pi/2])$ par la symétrie par rapport à l'origine. Pour obtenir la partie de courbe correspondant à $t \in [0, \pi]$), il suffit donc d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi/2]$: on trace la partie de la courbe correspondant à $t \in [0, pi/2]$, puis l'image de cette partie de courbe par la symétrie par rapport à l'origine. On pourra donc se restreindre à étudier la courbe sur $[0, \pi/2]$.

Au final, dans notre exemple, pour obtenir la courbe entier (*i.e.* pour $t \in \mathbb{R}$), il suffit d'étudier la tracer la partie de courbe correspondant à $t \in [0, \pi/2]$. Sur la figure ci-dessous, on a en trait continu la partie de la courbe correspondant à $t \in [0, \pi/2]$, et en trait discontinu les parties de la courbe correspondant à $t \in [\pi/2, \pi]$ et à $t \in [\pi, \pi/2]$.



Symétries à connaitre. L'usage de symétries simplifie considérablement l'étude des courbes paramétrées. Vous devez savoir passer de l'expression analytique d'une symétrie à son interprétation géométrique. Sachez au moins que :

1. la transformation $(x, y) \mapsto (-x, y)$ est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
2. la transformation $(x, y) \mapsto (x, -y)$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
3. la transformation $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ est la symétrie par rapport à l'origine ;
4. la transformation $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ est la translation de vecteur (a, b) ;
5. la transformation $(x, y) \mapsto (-x + a, -y + b)$ est la symétrie par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

2.4 Tableau de variation

Pour étudier une courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, l'étape la plus importante consiste à dresser le *tableau de variation conjoint* des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$. En pratique, cela revient essentiellement à dresser les tableaux de variations de x et y, et à les “rassembler”. Il est important de placer dans ce tableau chaque valeur de t pour laquelle il “se passe quelque chose” (changement de sans de variation, limite infinie, etc.) pour la fonction $t \mapsto x(t)$ *ou* pour la fonction $t \mapsto y(t)$. Le mieux est de voir un exemple.

Exemple. Considérons la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ définie par

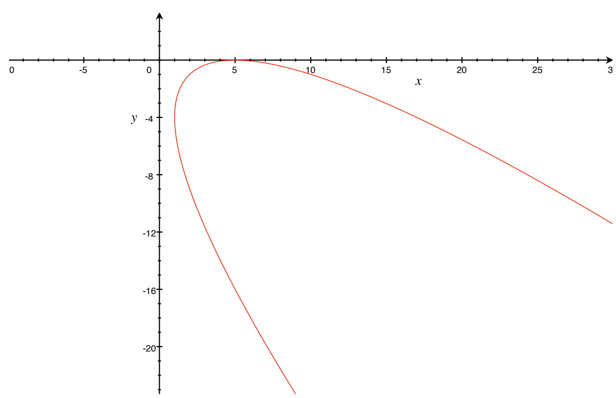
$$(x(t), y(t)) = (t^2 + 1\ ,\ -(t-2)^2)$$

La fonction $t \mapsto x(t)$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$, change de sens de variation en 0, et est croissante sur $[0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto y(t)$ est croissante sur $]-\infty, 2]$, change de sens de variation en 2, et est croissante sur $[2, +\infty[$. Dans le tableau de variation conjoint on va donc placer les valeurs de t suivantes : $-\infty$, 0, 2, $+\infty$. On calculera les valeurs de $x'(t)$, $x(t)$, $y'(t)$

et $y(t)$ en chacun de ces points. Voici ce tableau :

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	4	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	4	$+$	0	$-$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Voici l'image de la courbe image correspondante ; avec un peu d'entrainement, vous saurez tracer cette courbe à partir du tableau de variation conjoint ci-dessus.



2.5 Vitesse, accélération et tangente

2.5.1 Vitesse et accélaration d'une courbe paramétrée

On considère une courbe paramétrée plane $M : I \to \mathbb{R}^2$, et un réel $t_0 \in I$. On note $(x(t), y(t))$ les coordonnées du point $M(t)$. On note comme d'habitude $x'(t), x''(t), x'''(t), \ldots$ la dérivée, la dérivée seconde, la dérivée troisième,... de la fonction $t \mapsto x(t)$ (et de même pour y)

Définition (Vecteur vitesse, vitesse)**.** *Le* vecteur vitesse *de la courbe paramétrée $M : I \to \mathbb{R}^2$ à l'instant t_0 est le vecteur de coordonnées $(x'(t_0), y'(t_0))$. On le note*

$$\vec{v}(t_0) \quad \text{ou parfois} \quad \overrightarrow{OM}'(t_0) \quad \text{ou parfois} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM}(t_0).$$

La vitesse *de la courbe paramétrée $M : I \to \mathbb{R}^2$ au temps t_0 est la norme du vecteur $\vec{v}(t_0)$, c'est-à-dire le réel*

$$v(t_0) = \|\vec{v}(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

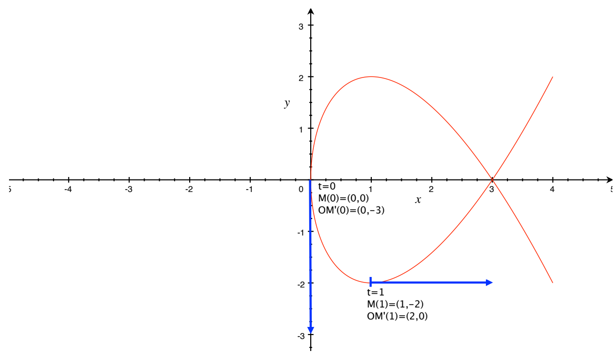
Exemple. On considère (à nouveau) la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ donnée par $(x(t), y(t)) = (t^2, t^3 - 3t)$. Pour cette courbe, le vecteur vitesse à l'instant t est

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (2t, 3t^2 - 3).$$

La vitesse à l'instant t est donc

$$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (t^3 - 3t)^2}.$$

On a représenté ci-dessous les vecteurs vitesse aux instants $t = 0$ et $t = 1$.



Définition (Vecteur accélération)**.** *Le* vecteur accélération *de la courbe paramétrée $M : I \to \mathbb{R}^2$ à l'instant t_0 est le vecteur de coordonnées $(x''(t_0), y''(t_0))$. On le note*

$$\vec{a}(t_0) \qquad \textit{ou parfois} \qquad \overrightarrow{OM}''(t_0) \qquad \textit{ou parfois} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{OM}(t_0).$$

*L'*accélération *de la courbe paramétrée $M : I \to \mathbb{R}^2$ au temps t_0 est la norme du vecteur $\vec{a}(t_0)$, c'est-à-dire le réel*

$$a(t_0) = \|\vec{a}(t_0)\| = \sqrt{(x''(t_0))^2 + (y''(t_0))^2}.$$

Bien entendu, ces définitions sont directement inspirées de la physique. Si on pense à t comme au temps, et à $M(t)$ comme à un point qui se déplace dans le plan au cours du temps, alors le vecteur vitesse (resp. accélaration) de la courbe $M : I \to \mathbb{R}^2$ à l'instant t_0 tel que que défini ci-dessus correspond au vecteur vitesse (resp. accélaration) du point $M(t)$ à l'instant t_0 au sens physique habituel.

2.5.2 Tangente à une courbe paramétrée

Comme précédemment, on considère une courbe paramétrée plane $M : I \to \mathbb{R}^2$, et un réel $t_0 \in I$. On note $(x(t), y(t))$ les coordonnées du point $M(t)$. On note $\mathcal{C}$ l'image de la courbe paramétrée plane $M : I \to \mathbb{R}^2$. On cherche la tangente à la courbe géométrique $\mathcal{C}$ au point $M(t_0)$.

Cas où le vecteur vitesse est non nul. Dans le cas où le vecteur vitesse $\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ n'est pas le vecteur nul, la situation est simple :

Théoreme 2.5.1. *On suppose que le vecteur vitesse $\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ n'est pas le vecteur nul. Alors la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t_0)$ n'est autre que la droite passant par le point $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(t_0)$.*

Autrement dit, le vecteur vitesse est tangent à la courbe.

Cas où le vecteur vitesse est nul. Dans le cas où le vecteur vitesse $\vec{v}(t_0)$ est nul (*i.e.* dans le cas où les deux nombres $x'(t_0), y'(t_0)$ sont nuls), la situation est plus compliquée.

Théoreme 2.5.2.

- *Si le vecteur vitesse $\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ est nul, mais que le vecteur accélération $\vec{a}(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0))$ n'est pas nul, alors la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t_0)$ est la droite passant par le point $M(t_0)$ de vecteur directeur $\vec{a}(t_0)$.*
- *Si les vecteurs vitesse $\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ et accélération $\vec{a}(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0))$ sont tous les deux nuls, mais que le vecteur $(x'''(t_0), y'''(t_0))$ n'est pas nul, alors la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t_0)$ est la droite passant par le point $M(t_0)$ de vecteur directeur $(x'''(t_0), y'''(t_0))$.*
- *Etc.*

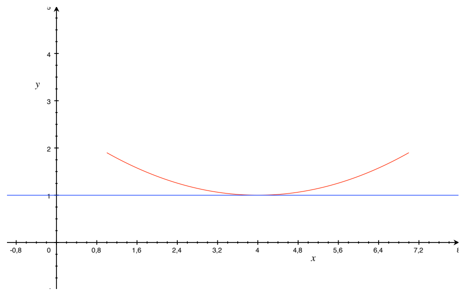
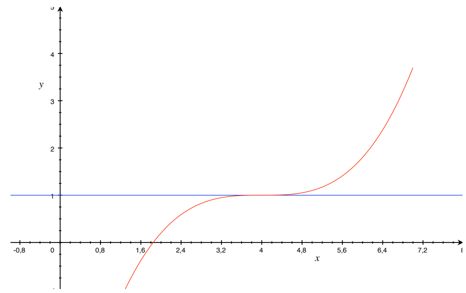
Autrement dit, on calcule le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$, puis le vecteur $(x''(t_0), y''(t_0))$, puis le vecteur $(x'''(t_0), y'''(t_0))$, etc. Le premier de ces vecteurs qui n'est pas nul, est le vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$.

Remarque. Les théorèmes ci-dessus indiquent en particulier que le vecteur accélération n'est pas tangent à la courbe en général, mais qu'il l'est dans le cas particulier où le vecteur vitesse s'annule. Nous avons l'expérience physique de ce phénomène :

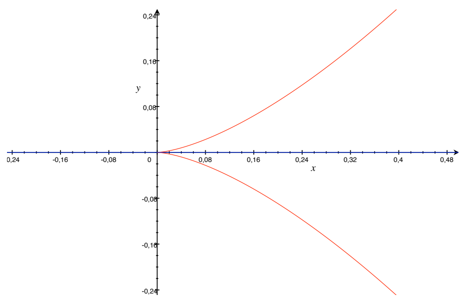
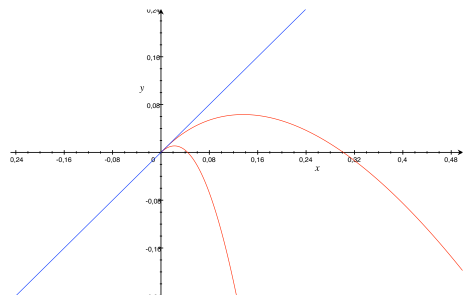
1. Les planètes du système solaire ont un vecteur accélération dirigé vers le Soleil (car elle ne sont pratiquement soumisequ'à la seule force d'attraction du Soleil, et que la loi fondamentale de la dynamique dit que leur vecteur accélération est proportionnelle à cette force). Pourtant, leur trajectoire n'est pas tangente à ce vecteur accélération (si c'était le cas, les planètes fonceraient tout droit sur le Soleil), car leur vecteur vitesse n'est pas nul.
2. Imaginons par contre un objet immobile à l'instant t_0 (son vecteur vitesse est donc nul à cet instant). Si cet objet subit une force (et donc une accélération), alors il va partir dans la direction de cette force : à l'instant t_0, la trajectoire de cet objet sera tangente à son vecteur accélération.

2.5.3 Allure des courbes et points de rebroussement

On garde les notations du paragraphe précédent.
Lorsque le vecteur vitesse $\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ n'est pas nul, l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point $M(t_0)$ est simple. La courbe ressemble à l'une des deux figures ci-dessous (la courbe $\mathcal{C}$ est en rouge, et sa tangente au point $M(t_0)$ en bleu) :

Par contre, lorsque le vecteur vitesse $\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ est nul, l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point $M(t_0)$ peut être assez étrange : on dit que $M(t_0)$ est un *point de rebroussement*. Les figures ci-dessous montrent deux exemples de tels points (la courbe $\mathcal{C}$ est en rouge, et sa tangente au point $M(t_0)$ en bleu).

Encore une fois, l'allure de ces courbes est parfaitement compatible avec l'intuition physique : si la vitesse du point $M(t)$ s'annule à l'instant t_0, autrement dit, si le point $M(t)$ s'arrête à l'instant t_0, alors rien n'empêche ce point de repartir de “faire demi-tour”. Pour tracer la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage d'un point de rebroussement, il convient (au minimum) de regarder attentivement les sens de variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

2.6 Asymptotes

Tout comme les graphes de fonctions, les courbes paramétrées peuvent admettre des asymptotes. On considère une courbe paramétrée $M : I \to \mathbb{R}^2$. Comme d'habitude, on note $(x(t), y(t))$ les coordonnées du point $M(t)$. On considère également une borne t_0 de l'ensemble de définition I de M (éventuellement t_0 peut valoir $\pm\infty$).

Définition (Asymptote)**.** *Soit Δ une droite du plan. On dit que la courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ admet Δ comme* asymptote *au voisinage de $t = t_0$ si :*

- *d'une part, le point $M(t)$ “part à l'infini quand t tend vers t_0” (ceci signifie que $x(t)$ et/ou $y(t)$ tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers t_0).*
- *d'autre part, la distance entre le point $M(t)$ et la droite Δ tend vers 0 quand t tend vers t_0.*

En pratique, comment savoir si la courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ admet une asymptote au voisinage de $t = t_0$. Si seule l'une des deux coordonnées $x(t), y(t)$ tend vers $\pm\infty$, c'est facile :

Théoreme 2.6.1.

- *Si* $x(t) \longrightarrow \pm\infty$ *et* $y(t) \longrightarrow b$ *lorsque* $t \to t_0$ *(où* b *est un nombre fini), alors la courbe admet pour asymptote la droite (horizontale) d'équation* $y = b$ *au voisinage de* $t = t_0$*.*
- *Si* $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ *et* $x(t) \longrightarrow b$ *lorsque* $t \to t_0$ *(où* b *est un nombre fini), alors la courbe admet pour asymptote la droite (verticale) d'équation* $x = b$ *au voisinage de* $t = t_0$*.*

Lorsque les deux coordonnées $x(t), y(t)$ tendent vers $\pm\infty$, c'est plus délicat :

Théoreme 2.6.2. *Supposons que* $x(t) \longrightarrow \pm\infty$ *et* $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ *lorsque* $t \to t_0$*. Pour que la courbe admette une asymptote au voisinage de* $t = t_0$*, il faut alors que les deux conditions suivantes soient réunies :*

- *d'une part, le quotient* $y(t)/x(t)$ *tend vers un nombre fini* a *lorsque* $t \to t_0$ *;*
- *d'autre part, la quantité* $y(t) - ax(t)$ *tend vers un nombre fini* b *lorsque* $t \to t_0$*.*

Si ces deux conditions sont réunies, alors la courbe admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ *au voisinage de* $t = t_0$*.*

Exemple. Considérons la courbe paramétrée $M : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$M(t) = (x(t), y((t)) = \left(\frac{1}{t-1}, \exp(t-1) + 2 \right).$$

Cette courbe admet-elle une asymptote au voisinage de $t = -\infty$? au voisinage de $t = 1^-$? au voisinage de $t = 1^+$? au voisinage de $t = +\infty$? On a tout d'abord

$$x(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 2.$$

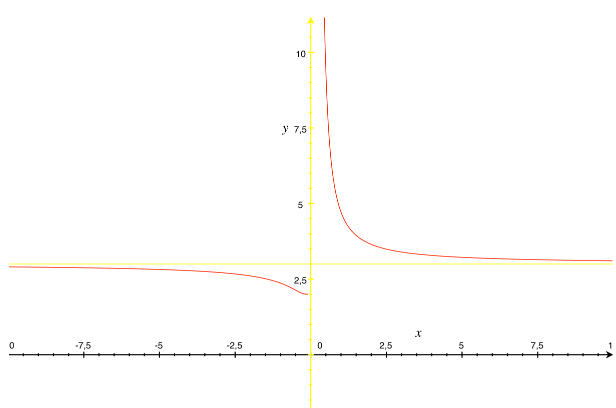
En particulier, le point $M(t)$ ne part pas à l'infini quand $t \to -\infty$; il n'y a donc pas d'asymptote au voisinage de $t = -\infty$. Par ailleurs,

$$x(t) \underset{t \to 1^\pm}{\longrightarrow} \pm\infty \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t \to 1^\pm}{\longrightarrow} 3.$$

Donc la courbe admet la droite horizontale d'équation $y = 3$ comme asymptote au voisinage de $t = 1^\pm$. Enfin,

$$x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc la courbe admet la droite verticale d'équation $y = 0$ (*i.e.* l'axe des ordonnées) comme asymptote au voisinage de $t = +\infty$. Voir figure ci-dessous (les asymptotes sont en jaune).



2.7 Plan d'étude dune courbe paramétrée

Voici le plan d'étude général d'une courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$.

1. On détermine le domaine de définition de la courbe. Voir section 2.2.
2. On essaie de réduire au maximum l'intervalle d'étude de la courbe en cherchant des symétries. Voir section 2.3.
3. On dérive les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, on détermine le sens de variation de ces fonctions, et on dresse le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$. Voir section 2.4.
4. On place quelques points remarquables, par exemple les points où le vecteur vitesse est horizontal ($y'(t)$ s'annule mais pas $x'(t)$), vertical ($x'(t)$ s'annule mais pas $y'(t)$), ou nul ($x'(t)$ et $y'(t)$ sont tous deux nuls). On trace la tangente à la courbe en ces points. Voir section 2.5.
5. On cherche les asymptotes éventuelles. Voir section 2.6.
6. On trace la courbe.

Chapitre 3

Paramétrage de courbes

L'image d'une courbe paramétrée est une courbe (au sens usuel : un objet de dimension 1) dans le plan. Il existe néanmoins d'autre manière de définir des courbes dans le plan :

1. via une description géométrique : le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3, ou bien le segment joignant le point $(0,1)$ au point $(1,2)$, ou bien l'unique ellipse passant par les quatre points de coordonnées $(-2,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, $(1,-1)$;
2. via une équation cartésienne : la courbe d'équation cartésienne $x^2+y^2=9$.

Dans certains problèmes, on a une courbe $\mathcal{C}$ qui nous est donnée par une propriété géométrique ou une équation cartésienne, et on a besoin de voir $\mathcal{C}$ comme la courbe image d'une courbe paramétrée. On dit que l'on a besoin de *paramétrer* $\mathcal{C}$ ou de trouver un *paramétrage* de $\mathcal{C}$.

Définition (Paramétrage)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe géométrique dans le plan. Un* paramétrage *de $\mathcal{C}$ est la donnée d'une courbe paramétrée $M : I \to \mathbb{R}^2$ dont la courbe image est $\mathcal{C}$.*

Définition (Paramétrage injectif)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe géométrique dans le plan. Un paramétrage $M : I \to \mathbb{R}^2$ de la courbe $\mathcal{C}$ est dit* injectif *si "la courbe $t \mapsto M(t)$ ne repasse jamais deux fois par le même point de $\mathcal{C}$" (plus formellement : si, quels que soient t_0 et t_1 dans I avec $t_0 \neq t_1$, on a $M(t_0) \neq M(t_1)$).*

Remarque. Attention, l'intervalle de définition I du paramétrage est important.

Exemple. L'application $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $M(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ est un paramétrage du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3. En effet :

1. pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(3\cos(t))^2 + (3\sin(t))^2 = 3^2(\cos^2(t)+\sin^2(t)) = 9$, ce qui prouve que l'image de la courbe est contenu dans le cercle d'équation $x^2+y^2=9$, c'est-à-dire contenue dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3 ;
2. par ailleurs, l'argument du point $M(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ est égal à t. Quand t un intervalle de longueur 2π, le point $M(t)$ fait donc un tour complet du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3. Par conséquent, l'image de la courbe M est bien le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3 en entier.

Le paramétrage ci-dessus n'est pas injectif : en effet, on a par exemple $M(2\pi) = M(0)$. Par contre, on peut obtenir un paramétrage injectif en restreignant l'intervalle de définition : on vérifie facilement que $M : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ (toujours avec $M(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$) est un paramétrage injectif du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3.

Remarque. Une courbe géométrique admet toujours plusieurs paramétrages (en fait, une infinité). C'est une évidence physique : il existe toujours plusieurs manières de parcourir le même chemin ; on peut choisir d'aller plus ou moins vite à tel ou tel endroit, décider ou pas de s'arrêter à tel endroit pour faire une pose, toujours aller dans le même sens ou bien revenir de temps en temps en arrière, etc.
Deux paramétrages d'une même courbe peuvent être définis par des formules très différentes. Par exemple, les courbe paramétrées

$$\begin{array}{cccc} M_1 & : & [-\pi/2, \pi/2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{cccc} M_2 & : & [-1, 1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \end{array}$$

sont deux paramétrages (injectifs) de la moitié du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 située dans le demi-plan $x \geq 0$ (voir TD). En particulier, $M_1 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ et $M_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ sont deux courbes paramétrées qui ont la même image.