

# Équations différentielles

Math 111

16 novembre 2006

## 1 Généralités

**Qu'est-ce qu'une équation ?** C'est une égalité comportant une (ou plusieurs) inconnue(s) :

“Résoudre l'équation  $2x + 3 = 0$ ”.

*Résoudre* l'équation, c'est chercher *toutes* les valeurs de l'inconnue qui satisfont l'égalité.

Dans la plupart des équations que vous avez rencontrées jusqu'à présent, les inconnues étaient des nombres. Une des difficultés des équations différentielles, c'est que les inconnues vont être des fonctions.

### 1.1 Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

(cf Hubbard et West, p2)

Commençons par l'équation différentielle la plus simple :

$$y' = \alpha y.$$

Dans cette égalité,  $y$  symbolise une fonction inconnue dépendant d'une variable  $t$ , et  $y'$  est sa dérivée. Vous savez (Terminale) que cette équation modélise l'évolution dans le temps du nombre d'atomes radioactifs. Elle exprime le fait que la diminution du nombre d'atomes radioactifs (cad le nombre d'atomes qui se désintègrent) est proportionnelle au nombre total d'atomes radioactifs.

De manière générale, une *équation différentielle* est une équation

- dont l'inconnue est une fonction  $y$  dépendant d'une variable  $x$  (ou  $t$ ),
- qui fait intervenir  $y$  et certaines de ses dérivées  $y'$ ,  $y''$ , *etc.*, et éventuellement la variable  $x$  (ou  $t$ ).

*Résoudre* l'équation différentielle, c'est chercher *toutes* les fonctions, définies sur un intervalle, qui satisfont l'équation (on dit aussi *intégrer* l'équation différentielle).

**Exemple** Une solution de l'équation  $y' = \alpha y$  est une fonction  $f$ , dérivable sur un certain intervalle  $I$ , et vérifiant  $f'(t) = \alpha f(t)$  pour tous les  $t \in I$ .

### Remarques

- La variable est parfois notée  $x$ , parfois  $t$  ( $t$  est utilisée en particulier quand l'équation décrit un phénomène dépendant du temps). La fonction inconnue peut être notée  $y$ , parfois  $x$ , ou toute autre lettre adaptée au problème

(cf plus bas,  $N$  pour le nb d'individus d'une population). Ainsi, la *même* équation peut s'écrire

$$y' = \alpha y \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt}(t) = \alpha y(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}(x) = \alpha y(x) \quad \text{ou} \quad x' = \alpha x.$$

- **Attention :**
  - dans le cours sur les fonctions de deux variables,  $y$  désigne une variable ;
  - dans le cours sur les équation différentielle,  $y$  désigne une fonction inconnue dans une équation.

## 1.2 D'autres exemples

1. En fait, l'équation  $y' = \alpha y$  modélise l'évolution de *n'importe quelle quantité  $y$  dont la croissance (ou décroissance) est proportionnelle à  $y$* , et pas seulement la décroissance radioactive : citons par exemple :
  - l'évolution d'une somme d'argent rapportant des intérêts, placée à un taux  $\alpha$  ;
  - le nombre d'individus dans une population avec un taux de naissance  $\alpha$ .
2. Expliquons avec un peu plus de détail la modélisation de l'évolution d'une population.
  - (a) Le modèle le plus simple est le suivant : la population  $N$  a un taux de naissance  $\alpha$  qui est constant ; le *nombre* de naissances est alors proportionnel au nombre d'individu : pendant un petit temps  $dt$ , il est égal au produit  $N\alpha dt$ . De même, le taux de décès  $\beta$  est supposé constant, et le nombre de morts est égal à  $N\beta dt$ . On a alors l'équation

$$dN = N(t)\alpha dt - N(t)\beta dt$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$N'(t) = (\alpha - \beta)N(t).$$

- (b) Les solutions de cette première équation sont des fonctions exponentielle, ce qui n'est pas réaliste : on peut affiner le modèle en supposant que quand la population devient trop importante, il y a plus de décès (par *surpopulation*, dus par exemple au manque de nourriture). Une possibilité, parmi beaucoup d'autres, est de rajouter un terme de décès proportionnel à  $N^2$  (ce terme est donc dominant lorsque  $N$  est grand) : on aboutit alors à

$$N'(t) = (\alpha - \beta)N(t) - kN(t)^2.$$

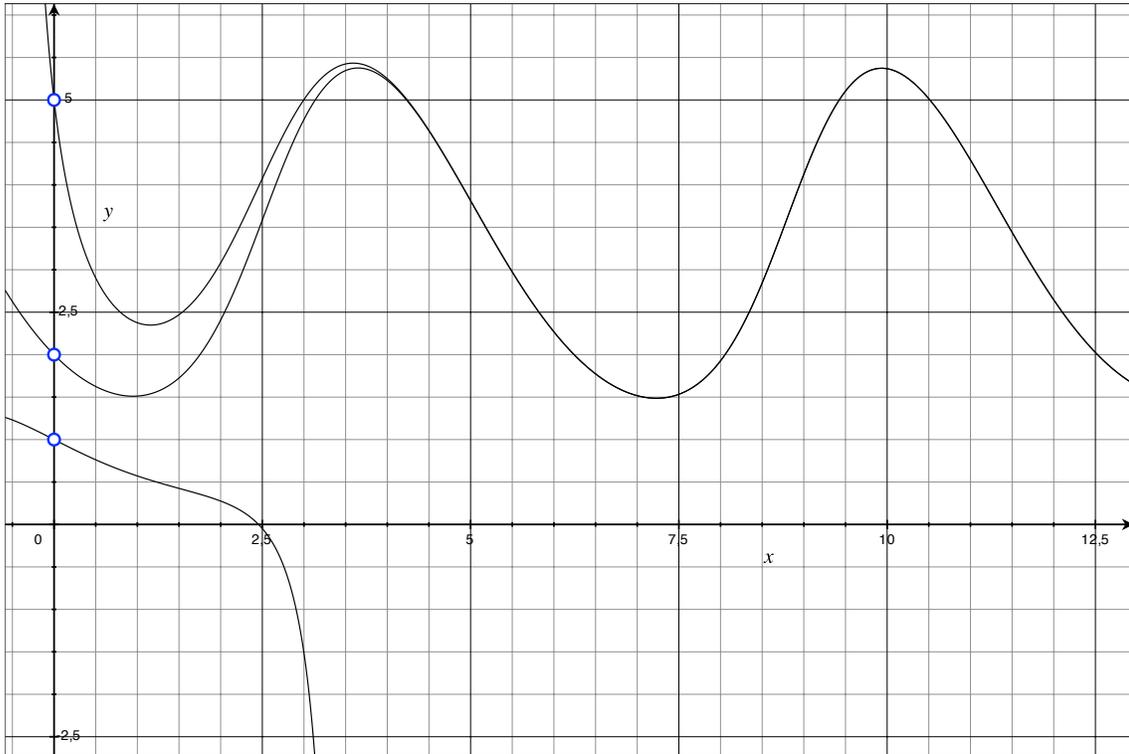
Le choix du  $N^2$  est en grande partie arbitraire (avec le même raisonnement on aurait pu choisir  $N^{3/2}$ ...). Une démarche consiste à essayer divers exposant, et à comparer à des données expérimentale pour sélectionner l'exposant qui semble convenir le mieux.

- (c) Il y a beaucoup d'autres variantes possibles. Considérons par exemple l'équation différentielle

$$N' = (2 - \cos(t))N - \frac{1}{2}N^2 - 1$$

- Taux de naissance avec variations saisonnières ;
- terme de surpopulation ;
- terme indépendant de la taille et du temps (élevage de saumons, ce sont les saumons pêchés!).

La figure ci-dessous montre les graphes de trois fonctions solutions de cette équation différentielle.



### 1.3 Conditions initiales

Une *condition initiale* est une relation du type  $y(x_0) = y_0$ , qui impose la valeur  $y_0$  de la fonction inconnue en  $x_0$ .

En pratique, se donner une CI revient donc à se donner le point  $(x_0, y_0)$  par lequel doit passer le graphe de la fonction solution.

**Exemples** Sur la figure ci-dessus, les trois solutions correspondent successivement aux CIs  $y(0) = 1$  (cad que  $x_0 = 0$  et  $y_0 = 1$ ) ;  $y(0) = 2$  ;  $y(0) = 5$ .

Autre exemple : dans un modèle de population utiliser pour prédire l'évolution de la population française, on s'intéressera aux solutions  $N(t)$  qui vérifient  $N(1999) = 58000000$ .

On aura donc deux types de questions :

1. Trouver toute les solutions d'une équation différentielle ;
2. Trouver la ou les solution(s) d'un équation différentielle qui vérifie une condition initiale donnée.

Assez souvent, le premier problème a une infinité de fonctions solutions, alors que le second en a une et une seule (voir plus loin le théorème de Cauchy-Lipschitz).

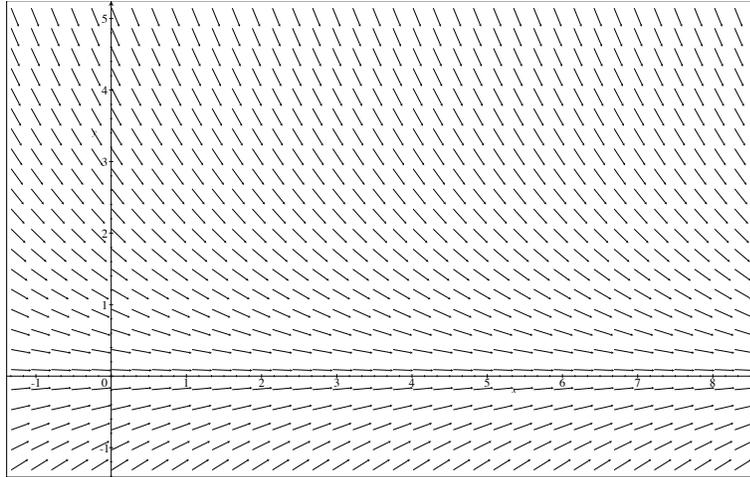
### 1.4 Représentation graphique

On va expliquer comment *dessiner une équation différentielle*.

## Champ de tangentes

Reprenons notre première équation  $y' = -\frac{1}{2}y$ . Les solutions sont donc les fonctions  $f$  qui vérifient  $f'(x) = -\frac{1}{2}f(x)$  pour tout  $x$ . Quel est le sens géométrique de cette égalité? Si  $(x, y)$  est un point du graphe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ , cette égalité dit que *la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $(x, y)$  a pour pente  $-\frac{1}{2}y$* .

Dessignons alors, en (presque) chaque point  $(x, y)$  du plan, un vecteur  $V_{x,y}$  de pente  $-\frac{1}{2}y$  (DESSIN esquissé à la main, et tracé avec GRAPHER).



Finalement, trouver les solutions de l'équation différentielle revient à trouver les courbes “qui, en chaque point, suivent le vecteur  $V_{x,y}$ ”.

Voici l'énoncé général. On considère une équation différentielle du type

$$y' = \varphi(x, y).$$

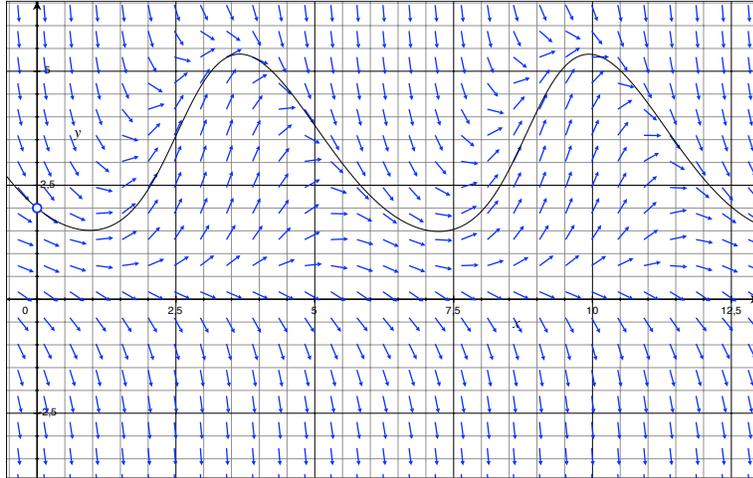
En chaque point  $(x, y)$  du plan, on se donne un vecteur  $V_{x,y}$  de pente  $\varphi(x, y)$  basé au point  $(x, y)$  : la collection de tous ces vecteurs s'appelle le *champ de tangentes* de l'équation différentielle.

**Proposition 1.1.** *Soit  $f$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = \varphi(x, y)$ . Alors le graphe de  $f$  est tangent, en chacun de ses points  $(x, y)$ , au vecteur  $V_{x,y}$ .*

Considérons à nouveau l'équation décrivant l'évolution d'une population (cette fois, la variable est notée  $x$ ,  $y$  désigne la fonction inconnue) : l'équation s'écrit

$$y' = \varphi(x, y)$$

en notant  $\varphi(x, y) = (2 - \cos(x))y - \frac{1}{2}y^2 - 1$ . Voici son champ de tangentes, avec le graphe d'une solution.



Remarquer qu'on n'a pas besoin d'avoir résolu l'équation (analytiquement) pour pouvoir dessiner le champ de tangentes, et ceci permet parfois d'avoir une idée du comportement des solutions.

## 1.5 Exemples

cf Feuille d'exercices.

## 1.6 Méthode d'Euler

Comment l'ordinateur trace-t-il les solutions ? La méthode d'Euler consiste à tracer un graphe affine par morceaux (cad constitué de segments de droites) qui approche une solution. Le segment tracé suit le champ de tangentes de l'équation : le segment tracé à partir d'un point  $(x, y)$  aura pour pente  $\varphi(x, y)$ .

Exemple : tracer une approximation de la solution de l'équation  $y' = y$  vérifiant la condition initiale  $y(0) = 1/2$ .

On se fixe un "pas d'intégration", noté  $\Delta x$  (par exemple, prenons  $\Delta x = 1$ ). On part du point  $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$  correspondant à la condition initiale. En ce point, la pente du champ de tangentes vaut  $1/2$  : on trace donc un segment de pente  $1/2$  jusqu'à arriver en un point d'abscisse  $x_0 + \Delta x = 0 + 1 = 1$  : on arrive ainsi au point  $(1, 1)$ . Et on recommence... On obtient ainsi une ligne brisée qui passe successivement par les points  $(0, 1/2), (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 8), (5, 16), \dots$

**Recette** On se donne un point  $(x_0, y_0)$ , et un pas d'intégration  $\Delta x$ . Pour tracer une approximation de la solution de l'équation différentielle  $y' = \varphi(x, y)$ , pour la condition initiale  $y(x_0) = y_0$ , avec le pas d'intégration  $\Delta x$  :

1. On part du point  $(x_0, y_0)$  ;
2. on calcule  $x_1 = x_0 + \Delta x$  ;
3. on calcule  $y_1 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\Delta x$  ;
4. on trace le segment qui joint le point  $(x_0, y_0)$  au point  $(x_1, y_1)$  ;
5. et on recommence à partir de  $(x_1, y_1)$  pour calculer le point  $(x_2, y_2)$ , etc.

cf exercice de la feuille d'exercices.

## 1.7 Le théorème d'existence et d'unicité

### Constat graphique

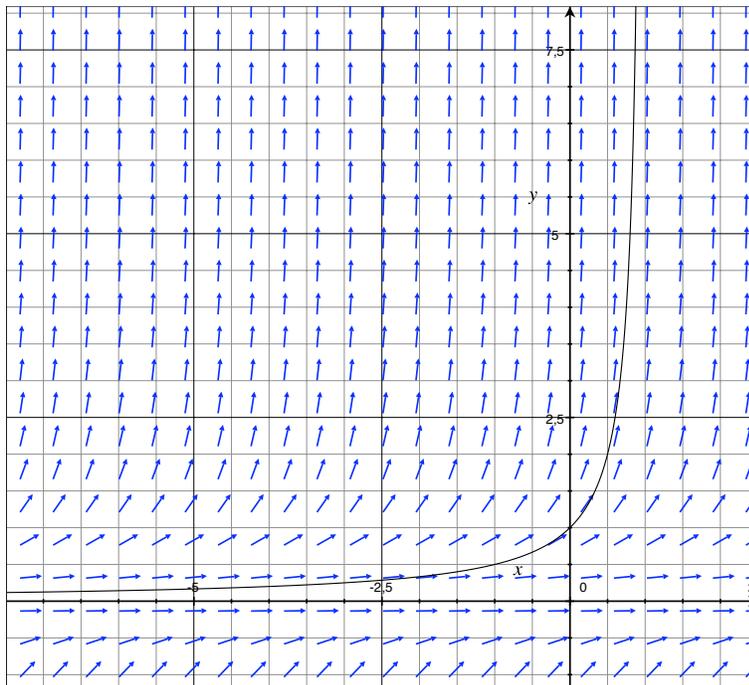
Lorsqu'on trace des solutions d'une même équation différentielle avec différentes conditions initiales, on constate que les courbes obtenues ne se croisent jamais. En regardant le premier dessin du cours (section 1.2), on pourrait croire que deux des courbes sont confondues à partir d'un certain point (d'abscisse 5, par exemple). Mais lorsqu'on zoome sur le dessin, on constate que l'ordinateur trace deux courbes séparées.

En fait, il y a un résultat qui garantit que :

(sous certaines hypothèses très générales) deux graphes de fonctions qui sont des solutions de la même équation différentielle ne se rencontrent jamais, sauf s'ils sont confondus.

Le théorème garantit aussi l'existence des solutions ; pour donner un énoncé précis, il faut d'abord définir la notion de *solution maximale*.

### Intervalle de vie, solutions maximales



Lorsqu'on trace la solution de l'équation  $y' = y^2$  avec la condition initiale  $y(0) = 1$ , on constate que la solution ne semble pas être définie sur  $\mathbb{R}$ , mais seulement sur un intervalle  $] -\infty, b[$  avec  $b \simeq 1$  (la fonction semble tendre vers  $+\infty$  en  $b$ , et on ne peut pas la prolonger).

De façon générale, lorsqu'on se donne une équation différentielle et une condition initiale  $y(x_0) = y_0$ , on cherche un intervalle, contenant  $x_0$ , sur lequel une solution existe, et qui soit "le plus grand possible" : il n'existe pas d'intervalle plus grand sur lequel l'équation différentielle ait une solution. Cet intervalle s'appelle *intervalle de vie* de la solution. Une solution définie sur cet intervalle le plus grand possible s'appelle *solution maximale*.

On se donne une équation différentielle  $y' = \varphi(x, y)$  avec une condition initiale  $y(x_0) = y_0$ .

Une *solution maximale* pour ce problème est une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I$  appelé *intervalle de vie*, telle que

- $f$  est solution de l'équation différentielle et vérifie la condition initiale;
- il n'existe pas de solution  $g$  de la même équation, vérifiant la même condition initiale, et définie sur un intervalle  $J$  contenant  $I$  et plus grand que  $I$ .

### Le théorème de Cauchy-Lipschitz

On considère une équation différentielle du type  $y' = \varphi(x, y)$ . On suppose que la fonction  $\varphi$  est définie pour tout  $x$  dans un intervalle  $I$  et tout  $y$  dans un intervalle  $J$ , et qu'elle est de classe  $C^1$ .

**Théorème 1 (existence et unicité des solutions).** *Pour toute condition initiale  $y(x_0) = y_0$  avec  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in J$ , il existe une **unique** solution maximale de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.*

PLUTOT : l'unicité s'écrit sans la notion de solution maximale, et sans référence à une condition initiale (ça les trouble, parce que dans les exos on se donne une fonction vérifiant la CI  $f(0) = 1$ , puis on applique le théorème avec une autre condition initiale.

Soient  $f_1, f_2$  deux solutions de la même ED sur un intervalle  $I$ . Si il existe un point  $x_0$  tel que  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ , alors  $f_1 = f_2$  sur  $I$ .

Qu'est-ce qu'une fonction de classe  $C^1$  qui dépend de deux variables ? Ceci signifie

- qu'on peut dériver  $\varphi$  par rapport à la variable  $x$ , et que la fonction qu'on obtient est continue;
- même chose par rapport à la variable  $y$  (les deux fonctions obtenues en dérivant par rapport à  $x$  et  $y$  sont appelées *dérivée partielle de  $\varphi$* ).

Ceci sera précisé dans le cours de Calculus. Toutes les équations différentielles étudiées vérifieront cette hypothèse.

D'un point de vue pratique, cet énoncé nous aidera à faire des dessins, en garantissant que les graphes des solutions ne se rencontrent jamais. Voici une utilisation plus subtile.

**Question** On considère comme avant l'équation  $y' = y^2$ , avec condition initiale  $y(0) = 1$ . Montrer que la solution maximale  $f$  est strictement positive sur son intervalle de définition.

Pour répondre, on remarque que la fonction nulle  $f_0 : x \mapsto 0$ , dont le graphe est l'axe des abscisses, est solution de cette équation différentielle. D'après le théorème, le graphe de  $f$  ne rencontre pas le graphe de  $f_0$ , c'est-à-dire l'axe des abscisses. Puisque  $f(0) = 1$  (condition initiale), et que  $f$  est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  dans l'intervalle de définition de  $f$ .

**Exercice** Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  est solution de l'équation différentielle ci-dessus avec la bonne condition initiale. Quel est l'intervalle de vie de cette solution ?

## 2 Primitives

La recherche de primitives fournit l'exemple le plus simple d'équation différentielle.

### 2.1 Définition, existence, condition initiale

**Définition 2.1.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Une autre fonction  $F$ , définie sur  $I$ , est une *primitive* de  $f$  si  $F$  est dérivable sur  $I$ , et si  $f$  est la fonction dérivée de  $F$  sur  $I$  :

$$F' = f.$$

Trouver les primitives de  $f$ , c'est donc résoudre l'équation différentielle

$$y' = f(x).$$

**Exemple le plus simple** Un des théorèmes de base du calcul différentiel s'interprète en terme de primitive.

**Proposition 2.2.** Une fonction  $f$ , définie et dérivable sur un intervalle  $I$ , vérifie  $f' = 0$  si et seulement si  $f$  est une fonction constante.

Autrement dit, les primitives de la fonction nulle sur un intervalle sont les fonctions constantes. Ou encore : les solutions de l'équation différentielle  $y' = 0$  sont les fonctions  $y = C$  où  $C$  est une constante. (Preuve ? Le TAF (que l'on a admis...)).

**Exercice 1** Attention, la situation est un peu différente si on ne se trouve pas sur un intervalle : Trouver toutes les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}^*$  et qui vérifient  $f' = 0$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Théorème 2.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Alors  $f$  admet des primitives. De plus, si  $F$  est l'une d'entre elles, alors les primitives de  $f$  sont exactement les fonctions  $x \mapsto F(x) + C$  où  $C$  est une constante (un nombre réel).

### Exercice 2

Exemple : trouver toutes les primitives de la fonction  $f(x) = x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ .  $F_0 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + x$  est une primitive (calculer!), donc d'après le théorème, les primitives de cette fonction sont les fonctions

$$F_C : x \mapsto \frac{x^2}{2} + x + C$$

où  $C$  est une constante quelconque. Il faut bien comprendre ce que désigne ce ' $C$ ' :  $C$  symbolise n'importe quel nombre "fixé", c-à-d qui ne dépend pas de  $x$ .

**Test** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de  $x + 1$  ?

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \quad G(x) = \frac{x^2}{2} + x + x \quad H(x) = \frac{x^2}{2} + x + \pi.$$

**Condition initiale** On a souvent besoin de trouver, non pas *toutes* les primitives, mais celle dont la valeur en un certain point est donnée.

Exemple : parmi les primitives  $F$  de  $x \mapsto x + 1$  trouvées plus haut, lesquelles vérifient  $F(2) = 1$ ? On calcule pour voir que cette condition est équivalente à  $C = -3$ . Conclusion : il y a exactement une primitive de  $x \mapsto x + 1$  qui vérifie  $F(2) = 1$ , c'est la fonction  $x \mapsto \frac{x^2}{2} + x - 3$ .

Ceci est un phénomène général : si l'on impose la valeur de la primitive en un point, alors il n'y a plus qu'une seule primitive qui convienne.

**Théorème 3.** *Étant donnée une condition initiale  $(x_0, y_0)$ , où  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $I$  qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$  : autrement dit, il existe une unique fonction  $F$ , dérivable sur  $I$ , qui est solution de l'équation différentielle avec condition initiale :*

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

C'est équivalent au théorème précédent, et c'est un cas très simple de Cauchy-Lipshitz.

Interprétation cinématique :

- Un mobile à vitesse nulle reste au même endroit ;
- Si on connaît la position d'une voiture sur l'autoroute à 12h00, et la fonction vitesse  $V(t)$ , alors on connaît sa position en fonction du temps.

## 2.2 Calcul de primitives

(Pour plus de détails sur les techniques de calcul, voir le cours Calculus Math151 ou Math 101.)

### Exercice 3, 4, 5

1. **Liste de primitives classiques** On peut bien sûr construire une liste de primitives classiques à partir d'une liste de dérivées classiques.

**Test** Donner une primitive de  $f(x) = x^\alpha$ . Donner une primitive de  $\sin$ , de  $\cos$ , de  $\exp$ .

2. **Reconnaissance d'une dérivation composée** Une des techniques qui va nous être utile consiste à utiliser, "à l'envers", la formule de dérivation des fonctions composées :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

**Exemple** Soit  $u$  une fonction (dérivable) de  $x$ . Quelle est la fonction dérivée de  $u^2$  ?

Si on reconnaît qu'une fonction est sous la forme  $u'u$ , une primitive sera donnée par  $\frac{1}{2}u^2$ .

Par exemple, en déduire une primitive de  $g(x) = \sin(x) \cos(x)$ .

**Exercice** Soit  $u$  une fonction (dérivable) de  $x$ . Donner les dérivées des fonctions

- (a)  $u^3$  ;
- (b)  $\frac{1}{u^2}$  (si  $u$  ne s'annule pas) ;

- (c)  $\ln(u)$  (si  $u$  ne prend que des valeurs strictement positives).
- (d)  $\ln(-u)$  (si  $u$  ne prend que des valeurs strictement négatives).

En déduire les primitives des fonctions  $u'u$ ,  $u'u^2$ ,  $\frac{u'}{u^2}$ ,  $\frac{u'}{u}$ .

Le calcul d'une primitive n'est pas toujours possible! Par exemple, l'une des fonctions importante du calcul des probabilité est  $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Cette fonction admet des primitives, mais on ne peut pas exprimer ces primitives à l'aide des fonctions usuelles. Par contre, on sait quand même calculer (par une autre méthode) l'aire sous le graphe de cette fonction entre les bornes  $-\infty$  et  $+\infty$ .

### 2.3 Exemples

1. Trouver les primitives de  $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ . On s'en sort en constatant que

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

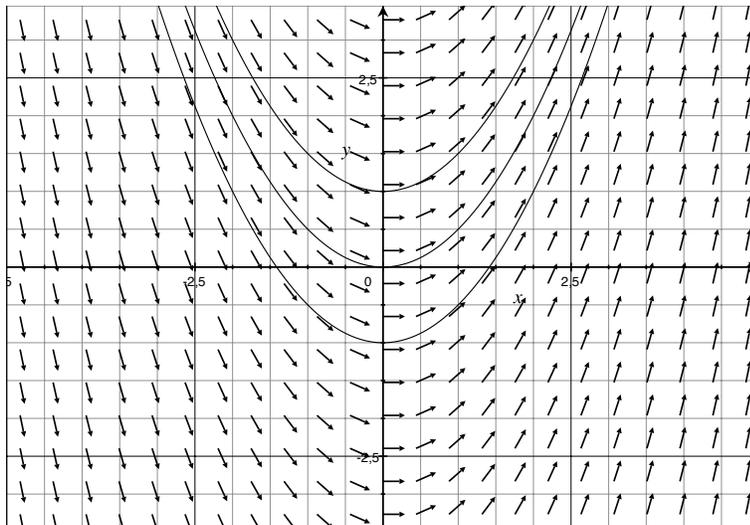
Pour plus d'exemples de ce type, cf cours math 151 : intégrer des fractions rationnelles.

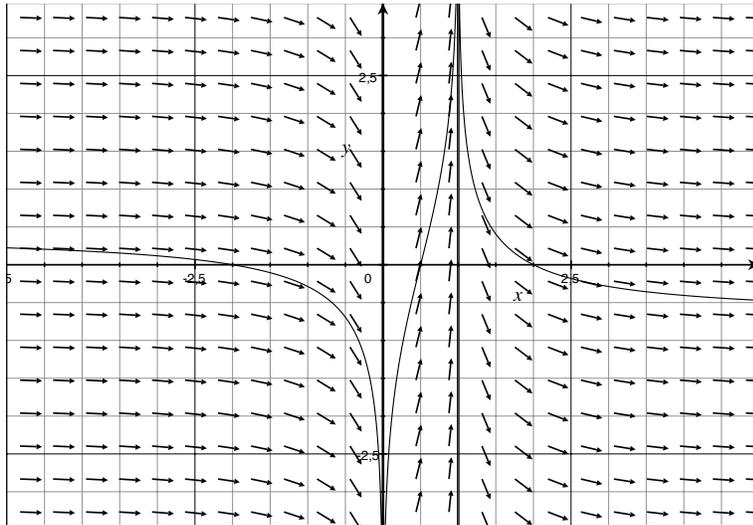
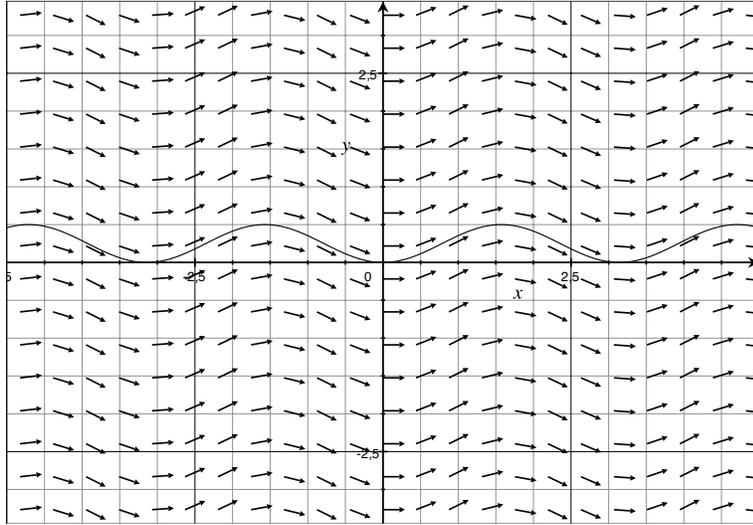
2. Trouver les primitives de  $\tan(x)$  sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Même question sur l'intervalle  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  (cf feuille d'exos).
3. Soit  $f$  une fonction qui ne s'annule pas sur un intervalle  $I$ , quelles sont les primitives de  $\frac{f'}{f^2}$  (cf feuille d'exos).

### 2.4 Dessins

Les trois dessins ci-dessous montrent successivement des primitives des fonctions  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = \sin(x)\cos(x)$  et  $f_3(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ . Chercher ces primitives revient à résoudre les équations différentielles  $y' = x$ ,  $y' = \sin(x)\cos(x)$ ,  $y' = \frac{1}{x(1-x)}$ ; on a aussi tracé les champs de tangentes associés à ces équations différentielles.

La pente ne dépend que de la variable  $x$  (et pas de  $y$ ) : les champs sont "invariants par translation vers le haut". Ceci correspond au fait que les solutions se déduisent les unes des autres en ajoutant une constante.





### 3 Équations à variables séparables

Il s'agit des équations où on peut "séparer ce qui concerne  $y, y', \dots$  d'un côté de l'équation et ce qui concerne  $x$  de l'autre".

#### 3.1 Exemples

1.  $y'y = 1$  (dans cette équation, les variables sont déjà séparées...);
2.  $y'y^2 = x$ ;
3.  $y' = y^2$  (on "sépare les variables" en écrivant  $\frac{y'}{y^2} = 1$ );
4.  $y' = y - y^2$  (équation de population...), qu'on écrit  $\frac{y'}{y-y^2} = 1$ .

Contre-exemple :  $y' = \sin(xy)$ ; on peut essayer de prendre l'arcsin...

#### 3.2 Méthode générale de résolution

De façon générale, l'équation s'écrit

$$y'g(y) = f(x)$$

(avec  $f$  et  $g$  deux fonctions d'une variable. Si on connaît une primitive  $G$  de  $g$ , et une primitive  $F$  de  $f$ , alors l'équation équivaut à

$$G(y) = F(x) + C,$$

autrement dit, une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I$ , est solution de l'équation différentielle si et seulement si il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $x \in I$ , on a  $G(f(x)) = F(x) + C^1$ .

**Attention**, il ne suffit pas de mettre les ' $y$ ' à gauche et les ' $x$ ' à droite, il faut que la partie gauche soit vraiment sous forme  $y'g(y)$ . Par exemple, l'équation 3 pourrait s'écrire  $y' - y = 0$ , on a bien les ' $y$ ' à gauche, mais ça n'est pas sous la bonne forme, on ne sait pas résoudre ainsi (il n'y a pas de formule générale pour une primitive de  $y' - y$ ).

#### 3.3 Pièges

Il y a un certain nombre de difficultés :

1. les solutions ne sont pas toujours définies sur  $\mathbb{R}$  (cf exemples 1, 3, 4);
2. il faut parfois faire des hypothèses sur  $y$  pour pouvoir continuer les calculs (exemples 3 et 4), ce qui revient à "oublier" certaines solutions;
3. il faut savoir calculer les primitives  $F$  et  $G$ ;
4. on n'obtient pas directement  $y$  comme fonction de  $x$ , mais comme fonction *implicite* de  $x$ , et il n'est pas toujours facile d'en déduire une formule explicite pour les solutions : il faut savoir inverser la fonction  $G$ .

---

<sup>1</sup>On a bien sûr utilisé un des théorèmes de la section précédente sur les primitives (lequel?).

### 3.4 Résolution des exemples

Solutions :

1. Les solutions sont les fonctions  $f(x) = \sqrt{x+c_1}$  et  $f(x) = -\sqrt{x+c_2}$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes.
2. Les solutions sont les fonctions  $f(x) = (\frac{3}{2}x^2 + c_3)^{\frac{1}{3}}$  où  $c_3$  est une constante ;
3. Les solutions sont les fonctions  $f(x) = \frac{-1}{x+c_4}$  où  $c_4$  est une constante ;
4. ...

### 3.5 Dessins

## 4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### 4.1 Définition

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1* toute équation différentielle du type

$$y' + a(x)y = b(x)$$

(où  $a$  et  $b$  sont des fonctions de  $x$ , définies et continues sur un intervalle  $I$ ).<sup>2</sup>

**Exemples** Parmi ces équations, lesquelles sont linéaires ?

1.  $y' = y$  ;
2.  $y' = y + x$  ;
3.  $y' = y + \sin(x)$  ;
4.  $y' = y + e^{2x}$  ;
5.  $y' = -xy$  (exemple étudié dans la première section) ;
6.  $y' = y - \frac{1}{2}y^2$  (équation de population) ;
7.  $y'y = 1$  ;
8.  $y' = \tan(x)$  (simple recherche de primitive) ;
9.  $y' = \tan(y)$  ;
10.  $y' + 2xy = 1$  ;
11.  $y' + 2xy = 2x$  ;
12.  $2xy' + y = 1$  ;
13.  $xy' - y = x^2$ .

varcste2

Les deux dernières équations ne sont pas à proprement parler sous la forme d'une équation différentielle linéaire, mais on peut les transformer : pour l'avant-dernière, par exemple, si on se place sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , elle équivaut à l'équation

$$y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x}$$

qui a la bonne forme.

### 4.2 Résolution de l'équation homogène

Nous allons expliquer comment résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1. On commence par résoudre une *autre* équation, qu'on appelle équation *homogène* associée à notre équation différentielle :

$$y' + a(x)y = 0$$

C'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre (mais plus simple).

**Définition 4.1.** On dit qu'une l'équation différentielle linéaire est *homogène* (ou : sans second membre) si la fonction  $b$  est nulle, c-à-d si elle est du type

$$y' + a(x)y = 0.$$

---

<sup>2</sup>«Ordre 1» signifie que l'équation ne fait pas intervenir les dérivées de  $y$  d'ordre plus grand que 1 :  $y''$ ,  $y'''$  etc..

Par exemple, les trois équations différentielles  $y' = y + x$ ,  $y' = y + e^{2x}$ ,  $y' = y + \sin(x)$ , ont pour équation homogène associée  $y' - y = 0$ .

**Remarque-clé** : une équation différentielle linéaire homogène est à variables séparables : on peut la résoudre avec les techniques de la section précédente.

Résolvons l'équation linéaire homogène générale  $y' + a(x)y = 0$ .

1. La fonction nulle est solution. Donc d'après Cauchy-Lipschitz (et le TVI), toute autre solution est soit strictement positive soit strictement négative.
2. Soit  $f$  une solution  $> 0$ . Alors  $f$  est solution de l'ED ssi

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -a(x) \Leftrightarrow \ln(f(x)) = -A(x) + C \Leftrightarrow f(x) = e^{-A(x)} e^C = \lambda e^{-A(x)}$$

où  $A$  est une primitive de  $a$  et  $\lambda$  une constante strictement positive.

3. De même, si  $f < 0$ , ...

On a donc montré que les solutions sont les fonctions  $\lambda e^{-A(x)}$  où  $A$  est une primitive de  $a$  et  $\lambda$  une constante quelconque.<sup>3</sup>

Remarquons que si  $a$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors les solutions sont définies sur  $\mathbb{R}$  (l'intervalle de vie est  $\mathbb{R}$ ).

### Exemples

1. On peut ainsi résoudre l'équation  $y' = y$  : en se plaçant sur un intervalle où la fonction  $y$  ne s'annule pas, on l'écrit  $\frac{y'}{y} = 1$ , qui s'intègre en  $\ln |y| = x + C$ , ou encore  $|y| = \underbrace{e^C}_{\lambda} e^x = \lambda e^x$  (où la constante  $\lambda$  est strictement positive).

Si on est sur un intervalle où  $y$  est strictement positive, ceci équivaut à  $y = \lambda e^x$ ; si on est sur un intervalle où  $y$  est strictement négative, ceci équivaut à  $y = -\lambda e^x$ ; d'autre part, la fonction nulle est aussi solution. Finalement, les solutions peuvent se mettre sous la forme

$$x \mapsto \lambda e^x$$

où  $\lambda$  est une constante réelle quelconque.

2. Résolvons l'équation  $y' - \frac{1}{x}y = 0$  (équation différentielle homogène associée à l'équation [13](#) ci-dessus). ... Les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda x$$

où  $\lambda$  est une constante réelle quelconque.

**Test** Vérifier que ces fonctions sont bien des solutions.

### 4.3 Résolution de l'équation quand on a une solution particulière

Dans le paragraphe précédent, on a expliqué comment résoudre l'équation homogène associée. Nous revenons maintenant à l'équation différentielle non homogène,

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer pourquoi il suffit maintenant de trouver *une* solution particulière de cette équation pour les avoir toutes. Il restera ensuite à trouver une solution particulière, ce que nous ferons au paragraphe suivant.

<sup>3</sup>Retenir la démarche et surtout pas la formule.

**Théorème 4.** Soit  $f_0$  une fonction qui est une solution particulière de l'équation différentielle non homogène. Soit  $\{\lambda g\}$  l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle homogène associée. Alors les solutions de l'équation différentielle non homogène sont les fonctions

$$f(x) = f_0(x) + \lambda g(x).$$

*Preuve du théorème* —

1. Toute fonction  $f_0(x) + \lambda g(x)$  est solution (il suffit de remplacer dans l'équation différentielle).
2. Réciproquement, toute solution est de cette forme : pour voir ceci, on considère une fonction  $f$  solution, on montre alors que  $f - f_0$  est solution de l'équation différentielle homogène associée (vérifier!), et par conséquent  $f - f_0$  est l'une des fonctions  $\lambda g$ , autrement dit  $f = f_0 + \lambda g$ , ce qu'on voulait.

□

#### 4.4 Comment trouver une solution particulière : la variation de la constante

On a trouvé les solutions de l'équation différentielle homogène sous la forme

$$\lambda g(x)$$

où  $\lambda$  est une *constante*. La technique de *variation de la constante* consiste à chercher une solution particulière de l'équation différentielle non homogène sous la forme

$$\lambda(x)g(x)$$

où  $\lambda$  est une *fonction*. Puisque la fonction  $g$  est solution de l'ED homogène, on a  $g' + ag = 0$  (\*). Maintenant, la fonction  $\lambda(x)g(x)$  est solution ssi

$$\lambda'g + \lambda g' + a\lambda g = b$$

qui se simplifie (à l'aide de (\*)) en

$$\lambda' = \frac{b}{g}.$$

Il n'y a plus qu'à trouver une primitive de  $\frac{b}{g}$ .<sup>4</sup> Remarquons là encore que si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , alors les solutions sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exemples

1. Reprenons l'équation  $y' - y = e^{2x}$ . ...

**Test** Petite variante : résoudre  $y' - y = e^{5x}$ .

2. Reprenons l'équation  $xy' - y = x^2$ ...

---

<sup>4</sup>Là encore, retenir la démarche et surtout pas la formule.

## 4.5 Autres exemples

On trouve parfois des solutions particulières assez simples, sans avoir à utiliser la méthode de variation de la constante.

1.  $y' + 2xy = 2x$  : on cherchera une solution particulière sous forme de fonction constante.
2.  $2xy' + y = 1$  là encore, chercher une solution particulière simple.
3.  $y' - y = x$  Aide pour la primitive...
4.  $y' - y = \sin(x)$  Aide pour la primitive...
5.  $y' + 2xy = 1$ . Appliquer la variation de la constante ; quelle fonction doit-on intégrer ? Ceci est un exemple d'équation où la méthode n'aboutit pas, parce qu'on ne sait pas trouver une formule pour les primitives de  $e^{x^2}$ .

## 5 Étude géométriques

Ou : que faire quand on ne sait pas résoudre ? Deux résultats qualitatifs.

### 5.1 Barrières

On considère une équation différentielle  $y' = \Phi(x, y)$  (où  $\Phi$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ).

DESSIN.

**Définition 5.1.** On appellera *sur-solution* toute fonction dérivable  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) > \Phi(x, g(x))$ . Le graphe d'une sur-solution est appelé *barrière descendante*.

Autrement dit, en tout point d'une barrière descendante, la pente de la tangente est supérieure à la pente du champ de l'équation différentielle.

**Exemple** On considère  $y' = 2 \cos(y - x)$ . La droite  $y = x + \pi$  est une sur-solution. Faire un dessin.

Une barrière descendante “pousse les solutions vers le bas” : **Remarque** Soit  $g$  une barrière descendante et  $f$  une solution. Supposons que les deux graphes se croisent :  $f(x_1) = g(x_1)$  pour un certain  $x_1$ . Alors :

1. si  $x < x_1$  et  $x$  assez proche de  $x_1$ , on a  $g(x_1) < f(x_1)$ .
2. si  $x > x_1$  et  $x$  assez proche de  $x_1$ , on a  $g(x_1) > f(x_1)$ .

(Preuve : DL 1 de  $g - f$ ).

L'intérêt des barrières, c'est 1) qu'il est beaucoup plus facile de trouver des barrières que des solutions (il y en a plus!), et 2) qu'une bonne barrière peut donner des indications sur le comportement des solutions, à l'aide du théorème suivant.

**Théorème 5.** Soit  $g$  une barrière descendante, et  $f$  une solution. Supposons qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $g(x_0) \geq f(x_0)$ .

Alors pour tout  $x \geq x_0$ , on a  $g(x) > f(x)$ .

*Preuve* — On commence par le cas où  $g(x_0) > f(x_0)$ .

On raisonne par l'absurde : si la conclusion du théorème n'est pas vérifiée, le graphe de  $f$  passe au-dessus du graphe de  $g$ , alors il doit le croiser ; soit  $x_1$  le PREMIER moment après  $x_0$  où le graphe de  $g$  rencontre celui de  $f$ . On a donc (dessin)  $g(x_1) = f(x_1)$  et, pour tout nombre  $x$  tel que  $x_0 \leq x < x_1$ ,  $g(x) > f(x)$ .

Puisque  $g$  est une barrière descendante et  $f$  une solution, on a pour  $x$  assez proche de  $x_1$  et plus petit que  $x_1$ , on a  $g(x_1) < f(x_1)$  (d'après la remarque). Ceci contredit la définition de  $x_1$  comme premier point d'intersection des graphes.

Il reste le cas où  $g(x_0) = f(x_0)$ . Mais alors la remarque nous dit que  $g(x'_0) > f(x'_0)$  pour  $x'_0 > x_0$  et assez proche de  $x_0$ . On est ramené au cas précédent.  $\square$

**Remarque** De façon analogue, notion de sous-solution (barrière montante) et théorème symétrique.

On reprend l'exemple  $y' = 2 \cos(y - x)$ . Les droites  $y = x$  et  $y = x + \pi$  sont respectivement des barrières montante et descendante. Soit  $f$  une solution telle que  $f(0) \in [0, \pi]$ . En appliquant le théorème, on voit que le graphe de  $f$  est coincé entre les deux droites (“zone piège”). On en déduit  $f(x)/x$  tend vers 1 en  $+\infty$  (direction asymptotique).

Dans ce qui précède, on a admis que  $f$  était définie pour tout  $x \geq 0$ . En fait, ceci découle d'un résultat général.

## 5.2 “Explosion des solutions”

On considère maintenant une équation différentielle

$$y' = \Phi(x, y)$$

avec  $\Phi$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Le théorème de CL s'applique.

On a déjà vu que les solutions ne sont pas nécessairement définies sur  $\mathbb{R}$  : par exemple, l'équation différentielle  $y' = y^2$  a pour solution  $y = \frac{-1}{x-c}$  définie sur l'intervalle  $] -\infty, c[$  ou bien  $]c, +\infty[$ . Notons que ces solutions ont une asymptote verticale  $y = c$ . Ceci est un phénomène général : pour une solution d'équation différentielle, la seule façon de ne pas être défini sur  $\mathbb{R}$  est d'avoir une asymptote verticale.

**Théorème 6.** (ADMIS) *Soit  $f$  une solution maximale définie sur un intervalle de vie  $I = ]a, b[$ . Si  $b \neq +\infty$ , alors  $f$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $b-$  : autrement dit, le graphe de  $f$  a une asymptote verticale  $y = b$ . Même chose si  $a \neq -\infty$ .*

On utilise souvent le théorème sous forme contraposée : si les solutions ne peuvent pas “exploser”, alors elles sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple**  $y' = y^2 - 1$ . on a deux solutions constantes  $y = 1$  et  $y = -1$ . Aucune autre solution ne peut croiser celles-là. Donc toute solution avec une CI entre ces deux droites n'explose pas : elle est définie sur  $\mathbb{R}$ .

## 6 Équation différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Il s'agit des équations du type

$$ay'' + by' + c = g(t)$$

avec  $a, b, c$  constantes (on a choisi de noter la variable avec la lettre  $t$ ).

Rappels : contextes physiques où l'équation intervient... (cf Cottet-Emard).

### 6.1 Nombres complexes

À quoi servent les nombres complexes ? À résoudre cette équation différentielle (et à plein d'autres choses...) ! Les nombres complexes se sont d'abord imposés comme un artifice de calcul. Depuis Gauss (1830), on les considère comme des "vrais" nombres, avec le même statut que les nombres réels... En physique, Fresnel (1823) les utilise en optique. Plus fondamentalement, en mécanique quantique, l'état d'une particule est décrit par une fonction d'onde, qui est à valeurs complexes.

Dans les trois pages qui suivent, on va utiliser les nombres complexes comme artifice de calcul : on a une équation différentielle, on en trouve les solutions complexes, ce qui permet ensuite de trouver les solutions réelles.

#### Rappels

Pour travailler avec les nombres complexes, il faut accepter l'existence d'un nombre  $i$  dont le carré vaut  $-1$ . Ceci étant admis, un nombre complexe est un nombre de la forme

$$z = x + iy$$

où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels. On calcule avec les complexes comme avec les nombres réels ; on peut ainsi les ajouter, les multiplier.

**Exercice** : calculer  $(1 + 2i)(3 + 4i)$ .

Comme un nombre complexe correspond à la donnée de deux nombres réels, on peut identifier l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes avec le plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$x + iy \longleftrightarrow (x, y).$$

Si vous avez du mal à vous habituer à l'existence de  $i$ , pensez simplement qu'il s'agit d'un point du plan. Qu'est-ce qu'on a gagné en écrivant  $x + iy$  au lieu de  $(x, y)$  ? Réponse = une multiplication.

Pour tout nombre  $\theta$ , on peut noter  $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ . Si on note  $(R, \theta)$  les coordonnées polaires du point  $(x, y)$ , on a alors

$$x + iy = Re^{i\theta}.$$

L'intérêt de cette notation est qu'on a la règle de calcul habituelle de l'exponentielle :

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

**Exercice** : vérifier cette égalité (on a ainsi remplacé une formule de trigo, assez difficile à retenir, par une règle déjà connue étendue aux nombres complexes!).

Le *conjugué* de  $z = x + iy$  est  $\bar{z} = x - iy$ .

**Exercice** : que vaut  $z \cdot \bar{z}$ ? Calculer alors  $\frac{1}{1+i}$ .

Voici une première motivation pour les nombres complexes. On les a inventé en décidant simplement qu'il existait une racine carré au nombre négatif  $-1$ . Mais maintenant, tout nombre négatif a une (et même deux) racines carrées.

**Exercice** : trouver les deux racines carrées complexes de  $-10$ .

Autrement dit, l'équation  $z^2 = r$  (avec  $r$  réel) a toujours deux solutions (sauf pour 0). Mieux : toutes les équations de degré 2 (avec  $a, b, c$  réels)

$$az^2 + bz + c = 0$$

vont avoir deux (ou parfois une seule) solutions. Et la formule est la même que dans le cas  $\Delta > 0$  :  $\frac{-b+\delta_{\pm}}{2a}$  où  $\delta_{\pm}$  représente les deux racines carrées de  $\Delta$ .

(En fait, idem si  $a, b, c$  complexes).

**Exercice** : quelles sont les solutions complexes de  $z^2 + z + 1 = 0$ ?

Vérifier votre réponse.

**L'exponentielle complexe.** On peut définir  $e^{\omega}$  pour tout nombre complexe  $\omega$  : si on veut que les règles de calcul avec l'exponentielle subsistent, on doit avoir

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

L'exponentielle devient alors une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . On va voir l'intérêt de cette fonction bientôt.

### Fonctions à valeurs complexes

Soit  $\omega$  un nombre complexe fixé. La fonction  $t \mapsto z(t) = e^{t\omega} = x(t) + iy(t)$  va de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . Si on se rappelle que  $\mathbb{C}$  est identifié au plan, il s'agit d'une courbe paramétrée (une spirale).

Notons  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  (il s'agit du nombre complexe correspondant au vecteur vitesse  $(x', y')$ ). Que vaut  $z'(t)$ ? Si on dérive l'exponentielle comme d'habitude (sans se soucier du fait que  $\omega$  n'est pas un réel), on a envie d'écrire

$$z'(t) = \omega e^{\omega t}.$$

**Exercice** : est-ce vrai?

**Exercice** : Donner une primitive de la fonction  $t \mapsto z(t)$ .

#### 6.1.1 Application : recherche de primitives

Comment trouver les primitives de la fonction  $x(t) = \cos(t)e^t$ ?

**Exercice** : répondre à la question. Aide :

1. on voit cette fonction comme la partie réelle d'une fonction à valeur complexe ;
2. on trouve une primitive  $Z(t)$  de cette fonction complexe : c'est facile, parce qu'elle est sous forme  $e^{\omega t}$  ;
3. on reprend la partie réelle de la fonction  $Z(t)$  obtenue.

En utilisant des nombres complexes, on vient de trouver une façon très agréable d'intégrer des fonctions réelles.

**Exercice** Donner les primitives de  $\sin(t)e^t$ , et de  $\cos(2t)e^{3t}$ .

## 6.2 L'équation différentielle homogène

Il s'agit de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Nous allons voir comment la résoudre à l'aide des complexes. D'abord quelques remarques.

### Généralités

On peut interpréter cette équation de deux manières, selon qu'on cherche des solutions à valeurs réelles ou complexes. Le sens physique de cette équation avec  $y$  à valeurs complexes n'est pas très clair, mais on va voir que le point de vue complexe permet de trouver agréablement les solutions réelles.

**Principe de superposition** Si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux fonctions solutions, toute combinaison linéaire est encore solution. Ceci est vrai en réel comme en complexe.

### Résolution

On va trouver des solutions complexes sous forme de fonction exponentielle, et on les combinera pour obtenir des solutions réelles.

**Exercice** : trouver les fonctions solutions du type  $t \mapsto e^{\omega t}$ . Miracle, l'équation différentielle est convertie en une équation polynomiale de degré deux !

Quand  $\Delta > 0$ , on trouve deux solutions qui sont des fonctions réelles.

Quand  $\Delta < 0$  on trouve deux solutions complexes conjuguées. En les combinant linéairement, on obtient leur partie réelle et imaginaire, qui sont deux solutions réelles.

Quand  $\Delta = 0$ , on trouve une seule solution (réelle)  $y_1$ , on remarque que  $y_2 = ty_1$  est encore solution.

**Théorème** Dans chacun des trois cas, on a trouvé deux fonctions solutions  $f_1$  et  $f_2$ . Les solutions de l'équation sont alors les combinaisons linéaires de ces deux fonctions (vrai sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

(ce qui resterait à montrer pour avoir le théorème, c'est qu'on a bien trouvé toutes les solutions).

**Conditions initiales** Attention : en ordre 2, pour avoir une unique solution, Il faut se donner deux conditions,  $y(0) = \dots$  et  $y'(0) = \dots$ .

**Exercice** : trouver toutes les solutions réelles de l'équation différentielle avec CI

$$y'' + y' + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1.$$

## 6.3 Exemple avec second membre

On ne traite que le cas particulier :

$$ay'' + by' + cy = e^{\omega t}$$

Exemple physique important (excitation périodique d'un ressort ou d'un circuit électrique...) Attention,  $\omega$  est fixé, c'est une donnée du problème (fréquence d'excitation).

ressort forcé sans frottement :

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t).$$

### **Théorème de structure (superposition)**

Comme en ordre 1, on considère l'équation homogène associée.

**Théorème 7.** *Soit  $f_0$  une fonction qui est une solution particulière de l'équation différentielle non homogène. Soit  $\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\}$  l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle homogène associée. Alors*

1. *Les solutions de l'équation différentielle non homogène sont les fonctions  $f$  définies par*

$$f(t) = f_0(t) + \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t).$$

2. *Pour toute condition initiale  $(t_0, y_0, y'_0)$ , il existe une unique solution  $f$  qui vérifie les conditions initiales  $f(t_0) = y_0$  et  $f'(t_0) = y'_0$ .*

On a le complément suivant (principe de superposition, II). On a une équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = d(t) + e(t)$$

où le second membre est la somme de deux termes. Si  $f_0$  est solution de

$$ay'' + by' + cy = d(t),$$

et si  $f_1$  est solution de

$$ay'' + by' + cy = e(t),$$

alors  $f_0 + f_1$  est solution de

$$ay'' + by' + cy = d(t) + e(t).$$

### **Recherche d'une solution particulière**

Quand le second membre est une exponentielle, de la forme  $e^{\omega t}$ , on cherche une solution sous la forme  $C.e^{\omega t}$  avec  $C$  constante. Parfois il n'y en a pas (en fait, ceci arrive quand ces fonctions sont déjà solutions de l'ED homogène. On cherche alors une solution du type  $C.te^{\omega t}$ . Là encore, si il n'y en a pas, on cherche sous la forme  $C.t^2 e^{\omega t}$ . Si il n'y en a toujours pas, c'est qu'on s'est trompé dans les calculs (autrement dit, il y a toujours une solution sous l'une des trois formes).

De même, si le second membre est de la forme  $P(t)e^{\omega t}$  avec  $P$  polynôme, on cherche une solution de la même forme :  $Q(t)e^{\omega t}$  avec  $Q$  polynôme à déterminer.

Remarquons encore une fois que ceci marche tout aussi bien quand  $\omega$  est un nombre complexe : ainsi, si le second membre est  $\cos(t)e^t$ , on l'écrit  $Re(e^{(1+i)t})$ , on trouve les solutions avec second membre  $e^{(1+i)t}$ , dont on prend la partie réelle (cf exemple...)