

François Béguin, Frédéric Le Roux

**DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE
SUR LES SURFACES**

Université Paris Sud, Laboratoire de mathématiques, Bat. 425,
91405 Orsay Cédex, FRANCE.

E-mail : Frederic.Le-Roux@math.u-psud.fr

E-mail : Francois.Beguin@math.u-psud.fr

Février 2007

DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE SUR LES SURFACES

François Béguin, Frédéric Le Roux

Résumé. — Un système dynamique discret est la donnée d'un espace d'état S et d'une loi d'évolution $f : S \rightarrow S$. L'orbite d'un point $x \in S$ est la suite $x, f(x), f^2(x), \dots$, le point $f^n(x)$ étant vu comme l'état à l'instant n du système si on part de l'état initial x . Le but de la théorie des systèmes dynamiques est alors d'étudier le comportement des orbites des différents points de S (autrement dit, l'évolution du système pour les différents états initiaux possibles). Bien souvent, il est naturel de supposer que l'ensemble S est muni d'une structure supplémentaire (structure d'espace topologique, de variété différentielle, d'espace mesuré) et que l'application f préserve cette structure. Ainsi, dans ce cours, S sera toujours une variété (topologique) et f un homéomorphisme de S .

Même dans ce cadre, une bonne partie des résultats que l'on arrive à prouver sont spécifique à une dimension donnée (autrement dit, ils supposent que la variété S est de dimension 1, 2, ou plus rarement 3). Ainsi, la théorie des systèmes dynamiques en dimension 1 est particulièrement développée, la plupart des résultats de cette théorie reposant sur le fait qu'une variété de dimension 1 admet toujours un ordre total (cas de \mathbb{R} ou d'un intervalle) ou un ordre cyclique (cas du cercle). Le but de ce cours est de présenter les principales techniques d'étude des systèmes dynamiques en dimension 2, autrement dit les principales techniques d'étude de la dynamique des homéomorphismes des surfaces.

On s'intéressera à trois points de vue complémentaires sur la dynamique des homéomorphismes de surfaces :

1. la théorie des vecteurs de rotation, qui étudie la façon dont les orbites d'un homéomorphisme d'une surface S "tournent autour de S ";
2. la théorie de Nielsen-Thurston, qui relie le comportement des orbites d'un homéomorphisme à l'action de cette homéomorphisme sur les classes d'homotopies de courbes fermées;
3. la théorie de Brouwer, qui traite des homéomorphismes du plan sans point fixe.

On verra notamment comment les deux derniers points de vue éclairent le premier, en établissant des liens entre les vecteurs de rotation d'un homéomorphisme et les propriétés dynamiques de cet homéomorphisme.

Ces trois points de vue sont les points de départ de l'étude récente de John Franks et Michael Handel sur les actions de groupes discrets sur les surfaces, montrant en particulier que le groupe $SL(3, \mathbb{Z})$ ne peut pas agir de manière non-triviale sur une surface par difféomorphismes préservant l'aire.

TABLE DES MATIÈRES

1. Présentation du cours	1
1.1. L'ensemble de rotation des homéomorphismes du tore.....	1
1.2. Les homéomorphismes de Brouwer.....	3
1.3. La théorie de Nielsen-Thurston.....	3
1.4. Références.....	4
2. Topologie des surfaces	7
2.1. Topologie des surfaces.....	7
2.2. Topologie algébrique des surfaces.....	9
2.3. Topologie algébrique des homéomorphismes de surfaces.....	11
2.4. Revêtements et relevés des applications.....	12
2.5. Géométrisation des surfaces.....	14
Partie I. Théorie de Nielsen-Thurston	19
3. Isotopie et dynamique sur le tore \mathbb{T}^2	23
3.1. Classes d'isotopie sur \mathbb{T}^2 et automorphismes linéaires.....	23
3.2. Classification des difféomorphismes linéaires du tore.....	24
3.3. Les automorphismes d'Anosov linéaires ont une dynamique "riche".....	26
3.4. Les difféomorphismes d'Anosov linéaires ont la dynamique "la plus simple" parmi les homéomorphismes de leur classe d'isotopie.....	28
4. Énoncé des résultats principaux	33
4.1. Le théorème de classification.....	33
4.2. Dynamique d'un homéomorphisme isotope à un pseudo-Anosov.....	37
4.3. Stratégie de la preuve du théorème de classification.....	38
5. Action d'un homéomorphisme de surface sur les géodésiques	41
5.1. Courbes fermées essentielles et géodésiques sur une surface hyperbolique.....	41
5.2. Action d'un homéomorphisme de surface sur les géodésiques.....	45
5.3. Action sur les géodésiques et isotopie.....	47
6. Laminations géodésiques	49
6.1. Laminations géodésiques : propriétés élémentaires.....	49
6.2. Topologie de l'ensemble des laminations géodésiques.....	50
6.3. Structure d'une lamination géodésique et de son complémentaire.....	50
7. Preuve du théorème de classification de Nielsen-Thurston	55

7.1. Propriété des laminations géodésiques fixées par f_*	55
7.2. Construction des laminations L^s et L^u	57
7.3. Dynamique sur \mathbb{S}_∞ des relevés des puissances de f	60
7.4. Propriétés des laminations L^s et L^u	64
7.5. Construction d'un homéomorphisme isotope à f qui préserve L^s et L^u	67
7.6. Construction de mesures transverses aux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u	67
8. Théorie de Brouwer	71
8.1. Exemples.....	71
8.2. L'indice le long d'une courbe.....	72
8.3. Absence de récurrence, lemme de Franks.....	74
8.4. Décompositions en briques, théorème des translations planes.....	78
8.5. Énoncé du théorème feuilleté équivariant.....	82
8.6. Appendice 1 : le théorème de Schoenflies.....	86
8.7. Appendice 2 : orientation.....	86
8.8. Appendice 3 : l'espace des homéomorphismes du plan.....	87
9. Orbites périodiques	89
9.1. Ensemble de rotation et orbites périodiques.....	89
9.2. Conjecture d'Arnol'd.....	93
10. Ensemble de rotation et entropie	95
10.1. Éclatement.....	95
10.2. Preuve du théorème.....	96
Bibliographie	99

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DU COURS

Un exemple vaut mieux qu'un long discours, dit-on. Pour vous donner un avant-goût du contenu de ce cours, nous allons donc présenter un exemple de résultat qu'on y démontrera. Nous avons choisi ce résultat plutôt qu'un autre essentiellement parce que sa preuve fait intervenir chacune des trois théories que l'on étudiera dans le cours : la théorie de Nielsen-Thurston, la théorie de Brouwer, et la théorie des vecteurs de rotation des homéomorphismes du tore.

1.1. L'ensemble de rotation des homéomorphismes du tore

Le concept de vecteur de rotation généralise à certains homéomorphismes de surfaces la notion classique de nombre de rotation des homéomorphismes du cercle. Vers la fin des années 80, on a découvert des liens entre les vecteurs de rotation et les propriétés dynamiques.

Dynamique des homéomorphismes du cercle : un invariant fondamental, le nombre de rotation. — Il y a maintenant 120 ans qu' H. Poincaré, étudiant le comportement qualitatif des solutions des équations différentielles sur le tore, a été conduit à définir le *nombre de rotation* d'un homéomorphisme f du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ce nombre mesure la "vitesse moyenne à laquelle une orbite de f (c'est-à-dire une suite de la forme $z, f(z), f^2(z), \dots$) tourne autour du cercle". Il contient beaucoup d'information sur la dynamique de cet homéomorphisme ; rappelons simplement :

1. Le nombre de rotation est un rationnel irréductible $\frac{p}{q}$ si et seulement si il existe une orbite périodique de période q ;
2. s'il est irrationnel, alors la dynamique est semi-conjugue à la rotation de même nombre de rotation (et même conjugué si l'homéomorphisme est un C^2 -difféomorphisme).

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme du plan. Supposons que F commute aux translations entières :

$$F \circ \tau_{(1,0)} = \tau_{(1,0)} \circ F \text{ et } F \circ \tau_{(0,1)} = \tau_{(0,1)} \circ F$$

où $\tau_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur \vec{v} (la première commutation s'écrit donc aussi simplement $F(x+1, y) = F(x, y) + (0, 1)$). Alors F induit un homéomorphisme f du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, en effet

$$x - y \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Réciproquement, soit f un homéomorphisme du tore. Supposons qu'on peut passer de l'identité à f par une famille continue d'homéomorphismes : on dit que f est *isotope à l'identité*. Alors f provient d'un homéomorphisme F du plan commutant aux translations entières (voir section 2.4).

Définition 1.1.1. — On dira qu'un vecteur \vec{v} de \mathbb{R}^2 est un *vecteur de rotation de F* si il existe un point x du plan tel que

$$\vec{v} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Cette définition peut s'interpréter géométriquement. Relions le point x à son image $F(x)$ par un segment Γ_0 . En concaténant les images successives par F de ce segment, on obtient une courbe

$$\Gamma_n = \Gamma_0 * F(\Gamma_0) * \dots * F^{n-1}(\Gamma_0)$$

qui se projette dans le tore en une courbe γ_n reliant les images successives de l'orbite du projeté de x . Un vecteur de rotation de F traduit alors l'existence d'une orbite de f qui s'enroule autour de la topologie du tore.

L'un des buts de ce cours est de démontrer qu'un “gros” ensemble de rotation implique une dynamique “riche”.

Théorème 1.1.2 (J. Llibre, R. MacKay, 1991). — *Soit f un homéomorphisme du tore, isotope à l'identité. Supposons que l'enveloppe convexe de l'ensemble des vecteurs de rotation de F soit d'intérieur non vide.*

Alors

- f possède une infinité d'orbites périodiques, de périodes arbitrairement grandes. ⁽¹⁾
- L'entropie topologique de f est strictement positive.

L'entropie topologique est un invariant de conjugaison qui mesure “à quel point la dynamique écarte les points”. ⁽²⁾

Exemples. — L'exemple modèle est bien sûr celui où F est une translation. On dit alors que f est une rotation du tore, c'est le produit de deux rotations du cercle. Il admet un unique vecteur de rotation, qui est le vecteur de translation de F .

Voici une famille d'exemples un peu plus substantiels. Considérons deux applications 1-périodiques $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telles que $\Phi(\mathbb{Z}) = \Psi(\mathbb{Z}) = 0$ et $\Phi(1/2 + \mathbb{Z}) = \Psi(1/2 + \mathbb{Z}) = 1$. Considérons alors l'homéomorphisme du plan $F = V \circ H$ où

$$H(x, y) = (x + \Phi(y), y) \quad \text{et} \quad V(x, y) = (x, y + \Psi(x)).$$

Puisque Φ et Ψ sont 1-périodique l'homéomorphisme F commute aux translations entières, et induit donc un homéomorphisme f du tore. Quels sont les vecteurs de rotation de F ?

⁽¹⁾En fait, on peut préciser l'énoncé du théorème en disant que tout vecteur de coordonnées rationnelles, inclus dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation, est réalisé par une orbite périodique de f .

⁽²⁾Très précisément, on dit que f est d'entropie topologique strictement positive si il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout entier $n > 0$, il existe un ensemble fini E contenant plus de e^{Cn} points, et qui est (ε, n) -séparé : deux points quelconques x, y de E possèdent des itérés $f^j(x), f^j(y)$ à distance plus grande que ε , où l'entier j est compris entre 0 et n .

Tout d'abord $(0, 0)$ est un point fixe de F , il nous donne donc un vecteur de rotation nul. On remarque ensuite que $F(1/2, 0) = (1/2, 1)$; par récurrence, on a donc $F^n(1/2, 0) = (1/2, n)$ pour tout n ; ceci nous donne le vecteur de rotation $(0, 1)$. On obtient de même le vecteur $(1, 0)$ en partant du point $(0, 1/2)$, et le vecteur $(1, 1)$ en partant du point $(1/2, 1/2)$. Notez que les projetés de ces quatre points dans le tore sont fixes par f (un point fixe de f peut avoir un vecteur de rotation non nul! Ceci dépend en fait du choix du relevé F , voir l'exercice 2.4.3).

Les quatre coins du carré $[0, 1]^2$ sont donc des vecteurs de rotations : le théorème précédent s'applique donc à cette famille d'exemples, et on obtient ainsi une infinité de points périodiques, et de l'entropie. Ceci ne semble pas facile à prouver directement...

Exercice 1.1.3. — Soient Φ, Ψ deux applications comme ci-dessus, on suppose que $\Phi = \Psi$ sont affines sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$ (ceci donne un choix unique). Montrer que tout vecteur de rotation de F est inclus dans le carré $[0, 1]^2$ (ainsi, ce carré coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation).

1.2. Les homéomorphismes de Brouwer

L'étude des ensembles de rotation sur les surfaces fait appel à deux types de techniques : d'une part la théorie de Nielsen-Thurston, d'autre part la théorie des homéomorphismes de Brouwer. Le point de départ de la théorie des homéomorphismes de Brouwer est le résultat suivant.

Théorème (F. Brouwer, 1912). — *Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation. Si h a une orbite périodique, alors h a un point fixe.*

Ce résultat se généralise : l'hypothèse sur l'existence d'une orbite périodique peut être remplacée par des formes plus faibles de récurrence (par exemple, existence d'un point non errant, ou d'une pseudo-orbite périodique). On peut le voir comme une version du théorème de Poincaré-Bendixson pour les systèmes dynamiques à temps discret.

Comment ce théorème peut-il intervenir dans l'étude d'un homéomorphisme f sur une surface S quelconque? On considère le revêtement universel \tilde{S} de S ; la plupart du temps, \tilde{S} est homéomorphe au plan. D'autre part, on peut relever f en un homéomorphisme de \tilde{S} . Dans certaines situations, en appliquant le théorème précédent, on pourra trouver un point fixe de \tilde{f} , et donc aussi un point fixe de f .

En particulier, considérons un homéomorphisme f du tore comme dans le théorème 1.1.2 ci-dessus, provenant d'un homéomorphisme F du plan (qui "relève" f). Si le vecteur $(0, 0)$ est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des vecteurs de rotation de F , alors on montrera à l'aide du théorème 1.2 que F a un point fixe, ce qui donnera *a fortiori* un point fixe pour f et un morceau du théorème 1.1.2.

1.3. La théorie de Nielsen-Thurston

La théorie de Nielsen-Thurston établit un lien surprenant entre les propriétés homotopiques d'un homéomorphisme de surface et ses propriétés dynamiques.

Théorème 1.3.1 (W. P. Thurston, 1976). — *Soit f un homéomorphisme d'une surface S compacte, sans bord. Supposons que f possède la propriété suivante :*

pour toute courbe fermée γ essentielle, et pour tout entier $n \neq 0$, la courbe $f^n(\gamma)$ n'est pas homotope à γ .

Alors f est d'entropie topologique strictement positive, et possède des points périodiques de périodes arbitrairement grande.

Deux courbes fermées sont *homotopes* si on peut passer continûment de l'une à l'autre. Une courbe fermée *essentielle* est une courbe qui ne peut pas être déformée continûment en un point⁽³⁾. Un homéomorphisme vérifiant les hypothèses de ce théorème sera dit *de type d'isotopie pseudo-Anosov* (on justifiera ce vocabulaire plus tard).

Comparons cet énoncé avec le théorème 1.1.2 sur les vecteurs de rotation dans le tore. Les conclusions sont identiques : une dynamique riche, caractérisée par l'existence d'orbites périodiques et la présence d'entropie. Par contre, les hypothèses peuvent sembler très différentes : en effet, pour l'homéomorphisme f isotope à l'identité du théorème 1.1.2, toute courbe est homotope à son image par f ; en un certain sens, le théorème 1.3.1 concerne les homéomorphismes qui sont “le moins possible isotopes à l'identité”. Comment peut-on appliquer la théorie de Nielsen-Thurston à la situation du théorème 1.1.2 ?

Sous les hypothèses de ce théorème, on montrera d'abord (par la théorie de Brouwer) que f admet des orbites périodiques. On trouvera ainsi un ensemble fini E , réunion d'orbites périodiques de f , tel que la restriction de f à la surface ouverte $S \setminus E$ ne soit plus isotope à l'identité (ceci revient à ne considérer que des isotopies qui fixent chaque point de E), et vérifie même les hypothèses du théorème 1.3.1.⁽⁴⁾

Ce théorème est bien sûr vide sur la sphère. Il est assez facile à montrer sur le tore (cf chapitre 3), cadre qui sert de modèle-jouet à la théorie. Il devient vraiment intéressant sur les surfaces de genre plus grand, comme le tore à deux trous.

Exemples. — Soit A l'automorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cet automorphisme préserve \mathbb{Z}^2 donc passe au quotient en un homéomorphisme f_A du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (parfois appelé *chat d'Arnold*). On verra au chapitre 3 que f_A vérifie les hypothèses du théorème, de même que tout homéomorphisme isotope à f_A .

Sur les surfaces de genre plus grand que 2, on peut obtenir des exemples explicites d'homéomorphismes vérifiant l'hypothèse du théorème, par exemple en composant des “twists de Dehn” ; voir exercice 4.1.12.

1.4. Références

a. Systèmes dynamiques. — (y compris nombres de rotation sur le cercle).

- Milnor, *Introductory lectures*, disponible sur le Net.
- Pollicott- Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*.

b. Nombres de rotation sur le tore. —

- Misiurewicz, Michał ; Ziemian, Krystyna Rotation sets for maps of tori. *J. London Math. Soc.* (2) **40** (1989), no. 3, 490–506.

⁽³⁾ cf. section 2.2.a.

⁽⁴⁾ Bien sûr, il faudra remédier à la non compacité de $S \setminus E$: on se ramènera en fait à des surfaces à bord, auxquelles on peut généraliser le théorème 1.3.1.

c. Théorie de Nielsen-Thurston. —

- Casson, Andrew ; Bleiler, Steven *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*.
- Fathi, Laudenbach, Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, 66-67 (1979), SMF Paris.
- Handel, Michael ; Thurston, William P. New proofs of some results of Nielsen. *Adv. in Math.* **56** (1985), no. 2, 173–191.
- Thurston, William P. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1988), no. 2, 417–431.

d. Théorie de Brouwer. —

- *Around Brouwer's theory of fixed point free planar homeomorphisms*, Marc Bonino (<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ECOLETE/ecole2006/>, Notes de cours).

CHAPITRE 2

TOPOLOGIE DES SURFACES

Ce chapitre présentent les éléments de base de topologie des surfaces ; *la plupart des résultats seront admis.*

2.1. Topologie des surfaces

Dans cette partie, nous rappelons, pour mémoire, la définition et la classification des surfaces compactes orientables. Une fois la liste établie, on pourra oublier la définition abstraite et considérer la liste comme une définition.

a. Définitions. —

Définition 2.1.1. — Une *surface sans bord* est un espace topologique S tel que tout point de S admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^2 .⁽¹⁾

Une *surface à bord* est un espace topologique séparé S tel que tout point de S admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^2 ou à $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Nos surfaces seront toujours supposées connexes. Le bord d'une surface à bord est l'ensemble ∂S des points qui n'admettent pas de voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Il s'agit d'une variété de dimension 1, chacune de ses composantes connexes est homéomorphe à la droite \mathbb{R} ou au cercle \mathbb{S}^1 (d'après la classification des variétés topologiques de dimension 1).

Définition 2.1.2. — Une surface est dite *orientable* si elle ne contient pas de sous-espace homéomorphe au ruban de Möbius $[0, 1] \times [-1, 1] / (0, y) \sim (1, -y)$.

Il existe une définition plus naturelle (mais plus longue !) de l'orientabilité.⁽²⁾

⁽¹⁾Pour bien faire, il vaudrait mieux ajouter que S est séparée et réunion dénombrable de parties compactes. Dans ce cours, nous considérerons principalement des surfaces compactes, ou bien des surfaces qui sont des ouverts de surfaces compactes ; ces propriétés seront donc toujours vérifiées.

⁽²⁾Soit S une surface connexe ; on considère l'espace des plongements du disque fermé $\bar{\mathbb{D}}^2$ dans la surface, muni de la topologie de la convergence uniforme (un plongement est une application continue injective). On montre alors que cet espace a au plus deux composantes connexes. S'il n'en a qu'une seule, on dit que la surface n'est pas orientable ; c'est le cas du ruban de Moebius. S'il en a deux, alors la surface est dite orientable, et chacune des composantes connexes définit une orientation de S . Étant donnée une orientation définie par un plongement $i : \bar{\mathbb{D}}^2 \rightarrow S$, l'orientation opposée peut être définie par le plongement $i \circ s$, où s est une symétrie du disque $\bar{\mathbb{D}}^2$ (ou tout homéomorphisme de $\bar{\mathbb{D}}^2$ renversant l'orientation. On montre que cette définition d'orientabilité est équivalente à l'absence de ruban de Moebius plongé dans la surface.

Exemples. — La sphère, le tore, le tore à n trous sont des surfaces compactes, connexes, sans bord. Le tore à 2 trou peut être défini proprement par recollement d'un octogone... Le nombre de trous s'appelle le *genre* de la surface : la sphère est de genre 0, le tore est de genre 1, *etc.* On notera souvent S_g la surface de genre g .

b. Classification des surfaces compactes. —

Théorème 2.1.3. — *Toute surface sans bord, orientable, compacte et connexe, est homéomorphe à l'une des surfaces de genre g ($g \geq 0$).*

En particulier, ce théorème montre que toute surface compacte orientable abstraite peut se plonger dans \mathbb{R}^3 , et admet une structure différentiable. On verra plus loin qu'elle admet aussi une bonne structure géométrique.

Idée de démonstration. — La première tentative de preuve remonte à Camille Jordan (*Sur la déformation des surfaces*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1866). Il considère une surface à bord, compacte et orientable ; son idée consiste à choisir une courbe fermée simple qui ne déconnecte pas la surface, à découper la surface selon cette courbe, puis à recommencer avec la nouvelle surface ainsi obtenue. Le processus s'arrête lorsque qu'il n'existe plus de courbe fermée simple qui ne déconnecte pas la surface. Jordan affirme alors que cette dernière surface est homéomorphe au disque, ce qui lui permet, par recollements, de conclure que la topologie de la surface initiale ne dépendait que du nombre de composantes du bord et du nombre découpages effectués.

Bien sûr, chez Jordan, la notion de surface topologique n'est pas bien définie, en particulier l'orientabilité est uniquement implicite⁽³⁾, et deux surfaces sont considérées comme semblables si “elles sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplication”, ou encore si “on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de S correspondent des éléments contigus de S' ”. En ce qui concerne la caractérisation finale du disque, on peut dire que Jordan est essentiellement passé à côté des (difficiles) problèmes posés par la preuve de ce résultat. Par contre, sa technique de réduction au cas du disque par découpages successifs me semble essentiellement valide, c'est-à-dire transformable à peu de frais en une preuve au sens actuel du terme.

Pour une preuve plus raisonnable, voir Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3* ; voir aussi la fin de l'article récent de Larry Siebenmann, *The Osgood-Schoenflies theorem revisited*, *Russain math. survey* **60** (4), 2005. On commence par montrer la densité des homéomorphismes affines par morceaux (“PL”) dans les homéomorphismes. Ceci permet de prouver que toute surface compacte est *triangulable*, c'est-à-dire homéomorphe à un complexe simplicial (espace topologique obtenu en recollant des triangles le long de leurs bords). Tout complexe simplicial peut être vu comme obtenu à partir d'un polygone du plan en recollant les côtés par paires, comme dans la construction du tore à deux trous ci-dessus. La preuve devient alors combinatoire, elle consiste à montrer qu'on peut modifier la présentation de façon à se ramener une présentation connue.

Le résultat d'approximation par des homéomorphismes PL découle de la version affine par morceaux du théorème de Schoenflies : tout polygone du plan peut être envoyé sur un triangle par un homéomorphisme du plan affine par morceaux. La construction d'une triangulation à partir du

Cette définition a l'avantage d'admettre immédiatement une action naturelle des homéomorphismes : étant donnée une surface orientable, un homéomorphisme f agit sur l'espace des plongements par $i \mapsto f \circ i$; on dit que f préserve ou renverse l'orientation selon que f préserve ou échange les deux composantes connexes de l'espace des plongements.

⁽³⁾L'existence de surfaces non orientables a été découverte simultanément par Möbius et Listing en 1858, et publié en 1861 par Listing, et en 1863 par Möbius ; on peut penser que Jordan ne connaissait pas encore ces objets.

résultat d'approximation est valable en toute dimension (voir la présentation concise de Siebenmann *via* les structures PL). On peut ainsi trianguler les variétés de dimension trois en établissant le résultat d'approximation dans ce cadre. Par contre, les variétés topologiques de dimension 4 ne sont pas toutes triangulables. \square

Corollaire 2.1.4. — *Toute surface compacte à bord est homéomorphe à*

$$S_g \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k)$$

où S_g est la surface de genre $g \geq 0$, et les D_i sont des intérieurs de parties de S_g , deux à deux disjointes, homéomorphes au disque fermé.

Exemples : le disque, l'anneau, le pantalon, et le tore à un trou qui est une autre façon d'épaissir un bouquet de deux cercles.

c. Caractéristique d'Euler. — Soit S une surface triangulée, c'est-à-dire obtenue en recollant des triangles le long de leurs bords. On associe à cette triangulation le nombre

$$\chi = n_0 - n_1 + n_2$$

où n_0, n_1, n_2 sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de triangles de la triangulation.

Théorème. — *Le nombre χ est un invariant topologique : sur une surface donnée S , toutes les triangulations donne le même nombre. Pour une surface compacte sans bord, $\chi = 2 - 2g$ où g est le nombre de trous (le genre).*

Ce nombre est appelé *caractéristique d'Euler* (ou d'Euler-Poincaré) de la surface S . Pour une surface à bord, on retire le nombre de disques enlevés.

On rappellera plus loin le lien avec la géométrie (théorème de Gauss-Bonnet), et le lien avec les zéros de champs de vecteurs (théorème de Poincaré-Hopf).

2.2. Topologie algébrique des surfaces

a. Homotopie et homologie. — On se donne une surface S . Soient γ_0, γ_1 deux courbes fermées dans S , c'est-à-dire deux applications continues de \mathbb{S}^1 dans S . On dit qu'elles sont *homotopes* si on peut passer continûment de l'une à l'autre : autrement dit, s'il existe une application continue $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ telle que $H(\cdot, 0) = \gamma_0$ et $H(\cdot, 1) = \gamma_1$. Plutôt que d'utiliser l'application H , on notera souvent $\gamma_t = H(\cdot, t)$ (et on dira simplement : “soit $(\gamma_t)_{t \in [0, 1]}$ une homotopie de courbes”).

Si l'application H est injective, son image est un anneau plongé dans la surface S . Quand ça n'est pas le cas, on peut penser à $H(\mathbb{S}^1 \times [0, 1])$ comme à un anneau “écrasé”. Les deux courbes forment le bord de cet anneau. On obtient la notion d'homologie en remplaçant l'anneau de la définition précédente par une surface quelconque. Plus précisément, on considère les surfaces orientées S_0 dont le bord est formé de deux composantes connexes. L'orientation de la surface S_0 induit une orientation sur son bord ; on choisit alors un paramétrage $i_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S_0$ de la première composante dans le sens positif, et un paramétrage i_1 de la seconde dans le sens négatif. Les deux courbes γ_0, γ_1 sont dites *homologues* s'il existe S_0, i_0, i_1 comme ci-dessus, et une application continue $H : S_0 \rightarrow S$ telle que $H \circ i_0 = \gamma_0$ et $H \circ i_1 = \gamma_1$.

Cette définition se généralise immédiatement aux *cycles*, qui sont les sommes formelles de courbes fermées

$$a_1\gamma_1 + \cdots + a_k\gamma_k,$$

où les γ_i sont des courbes et les a_i des entiers. En particulier, ce cycle est dit *homologue à 0* s'il existe une surface orientée S_0 et une application continue $H : S_0 \rightarrow S$ dont la restriction au bord orienté de S_0 est égale à la réunion de a_1 copies de γ_1 , a_2 copies de γ_2 , etc. (après identification de chaque composante connexe avec \mathbb{S}^1). On peut maintenant définir le premier groupe d'homologie de S , $H_1(S, \mathbb{Z})$, comme étant l'ensemble des cycles modulo les cycles homologues à 0. Autrement dit, on identifie deux courbes fermées (ou deux cycles) si elles sont homologues, c'est-à-dire si leur différence formelle est homologue à 0. Plus formellement, on appelle $C_1(S, \mathbb{Z})$ l'ensemble des sommes formelles de cycles, ⁽⁴⁾ muni de sa structure de \mathbb{Z} -module ; le sous-ensemble $B_1(S, \mathbb{Z})$ des cycles homologues à 0 est un sous- \mathbb{Z} -module, et $H_1(S, \mathbb{Z})$ est le quotient $C_1(S, \mathbb{Z})/B_1(S, \mathbb{Z})$.

Le groupe d'homologie à coefficient réels, $H_1(S, \mathbb{R})$, est défini de façon tout à fait analogue. Il s'agit d'un espace vectoriel réel. Bien sûr, toutes ces définitions sont en fait valables dans tout espace topologique (on n'a pas utilisé le fait que S est une surface).

Exercice 2.2.1. — Montrer que tout cycle est homologue à une courbe fermée (tout élément du H_1 est représenté par une courbe).

Exercice 2.2.2. — Dessiner deux courbes fermées homotopes, mais qui ne bordent pas un anneau plongé. Sur la surface à deux trous, dessiner une courbe fermée qui est homologue à 0 sans être homotope à une courbe constante. En déduire deux courbes fermées qui sont homologues mais non homotopes.

Remarque 2.2.3. — On peut montrer que le groupe H_1 est l'abéliannisé du groupe fondamental (c'est-à-dire le quotient de ce dernier par le sous-groupe normal engendré par les commutateurs).

b. Homologie des surfaces. — Le théorème suivant décrit l'homologie des surfaces compactes orientables sans bords.

Théorème 2.2.4. —

1. Le \mathbb{Z} -module $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , une base est donnée par les deux courbes $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définies par

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \text{ et } \gamma_2(t) = (0, t).$$

2. Plus généralement, si S_g est la surface de genre g , le \mathbb{Z} -module $H_1(S_g, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^{2g} , une base est donnée par les courbes dessinées ci-dessous.

DESSIN.

Idée de démonstration. — Montrons que cette famille est génératrice. Sur le tore, toute courbe est homotope, et *a fortiori* homologue, à la courbe $p\gamma_1 + q\gamma_2$ (voir exercice 2.4.2).

Pour $S_g, g > 1$, on découpe la surface par la courbe verticale milieu γ . On voit facilement que tout cycle est une somme de courbes disjointes de γ . On est alors ramené au cas d'une courbe disjointe de γ , donc incluse dans l'une des deux composantes connexes du

⁽⁴⁾On peut définir $C_1(S, \mathbb{Z})$ comme l'ensemble des applications de l'ensemble des cycles dans \mathbb{Z} , qui prennent la valeur 0 sauf pour un nombre fini de cycles.

complémentaire ; en remplaçant l'autre composante par un disque, on peut utiliser le cas du tore.

Pour la liberté, c'est beaucoup moins facile : il s'agit essentiellement de montrer que le nombre algébrique d'intersections de deux courbes est un invariant d'homologie. Ceci implique ensuite facilement la liberté (par exemple dans le tore : le cycle $p\gamma_1 + q\gamma_2$ a un nombre d'intersection avec γ_1 égal à q , et avec γ_2 égal à p ; si ce cycle est homologue à 0, et si le nombre d'intersection est un invariant d'homologie, alors $p = q = 0$). \square

Exercice 2.2.5. — Soit S_g la surface compacte de genre g , et r un entier strictement positif. En utilisant une base de l'homologie du \mathbb{Z} -module $H_1(S_g, \mathbb{Z})$, montrer la propriété suivante : il existe un entier $n(r)$, tel que, si on considère $n(r)$ courbes fermées essentielles deux à deux non-homotopes dans S_g , alors deux de ces courbes s'intersectent en au moins r points.

2.3. Topologie algébrique des homéomorphismes de surfaces

Soit f une application continue de la surface S dans elle-même. Elle agit naturellement sur les courbes fermées par $f_* : \gamma \mapsto f \circ \gamma$, et donc aussi sur les sommes formelles de courbes, en un morphisme de \mathbb{Z} -module. Il est clair que l'application f_* préserve l'ensemble des cycles homologues à 0, elle induit donc une application notée encore f_* de $H_1(S, \mathbb{Z})$ dans lui-même. Si f est un homéomorphisme, l'application f_* est inversible, c'est un isomorphisme de \mathbb{Z} -module. En particulier, le théorème 2.2.4 permet d'identifier l'application f_* induite par un homéomorphisme de S_g avec un élément de $GL(2g, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice à coefficients entiers et de déterminant ± 1 .

Est-ce que cette construction algébrique est efficace ? Autrement dit, permet-elle de distinguer des homéomorphismes différents ? Pour répondre à cette question, il faut d'abord préciser ce qu'on entend par "différent". On dit que deux homéomorphismes $f_0, f_1 : S \rightarrow S$ sont *homotopes* si on peut passer continûment de l'un à l'autre par une famille d'applications continues : autrement dit, s'il existe une application continue $H : S \times [0, 1] \rightarrow S$, appelée homotopie, telle que $H(\cdot, 0) = f_0$ et $H(\cdot, 1) = f_1$. Il est clair que si f_0 et f_1 sont homotopes, pour toute courbe γ , les courbes $f_0(\gamma)$ et $f_1(\gamma)$ sont homotopes, et donc *a fortiori* homologues ; et par conséquent les applications f_{0*} et f_{1*} coïncident. On pourrait alors espérer une réciproque : est-ce que l'action en homologie distingue les homéomorphismes non homotopes ? C'est bien se qui se passe sur le tore, mais ça n'est malheureusement pas le cas en genre supérieur.

Exercice 2.3.1. — Décrire un homéomorphisme f de S_2 qui n'est pas isotope à l'identité, mais qui induit une application f_* qui est l'identité en homologie. *Indication : considérer un twist de Dehn autour d'une courbe homologue à 0 mais non homotope à 0. (le twist de Dehn est l'homéomorphisme de l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ donné par $(x, y) \mapsto (x + y, y)$).*

Cette constatation est importante, car elle explique en partie pourquoi la situation sera beaucoup plus compliquée en genre supérieur : sur le tore, on peut se contenter de l'action en homologie (et donc faire de l'algèbre linéaire) ; en genre supérieur, il faut renoncer à la notion de courbes homologues et la remplacer par la notion plus fine de courbes homotopes. Le théorème suivant montre que l'action sur les classes d'homotopies de courbes distingue des homéomorphismes non homotopes, et même non *isotopes*. Deux homéomorphismes $f_0, f_1 : S \rightarrow S$ sont dits *isotopes* si on peut passer continûment de l'un à l'autre par une famille d'homéomorphismes, autrement dit, s'ils sont homotopes via une

homotopie H , appelée alors *isotopie*, telle que pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $H(\cdot, t)$ est un homéomorphisme de S . Le théorème montre en particulier que pour les surfaces, deux homéomorphismes homotopes sont isotopes.

Théorème 2.3.2 (Epstein). — *Soit S une surface compacte, sans bord. Supposons que l'homéomorphisme $f : S \rightarrow S$ agisse trivialement sur les classes d'homotopie, c'est-à-dire que pour toute courbe fermée γ , la courbe image $f \circ \gamma$ est homotope à γ . Alors f est isotope à l'identité.*

Démonstration. — Voir l'article d'Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*. Acta Math. **115** (1966) 83–107. Notons qu'il existe aussi une version pour les surfaces à bord. \square

2.4. Revêtements et relevés des applications

Une des méthodes d'étude de la dynamique d'un homéomorphisme f de surface consiste à considérer un relevé F de f au revêtement universel de la surface. On a déjà vu, dans le chapitre introductif, l'exemple du tore : son revêtement universel est l'application de passage au quotient $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$; tout homéomorphisme f , isotope à l'identité, provient par passage au quotient d'un homéomorphisme F du plan ; on peut étudier la dynamique de f à partir de celle de F en se souvenant de l'action du groupe fondamental du tore par les translations entières du plan.

a. Définition, propriété de relèvement. — Voici la définition générale. ⁽⁵⁾ Une application $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est appelée *revêtement* si elle vérifie la propriété suivante, dite de “trivialité locale” : tout point x de X , admet un voisinage U (dit *trivialisant*), tel que

1. l'image inverse $p^{-1}(U)$ peut s'écrire comme l'union disjointe d'ensembles $\{\tilde{U}_i, i \in I\}$,
2. chaque restriction $p|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

En particulier, p est alors un homéomorphisme local (la réciproque est fautive). Un revêtement universel est un revêtement tel que \tilde{X} est simplement connexe (sous les bonnes hypothèses, le revêtement universel est essentiellement unique).

Les *automorphismes du revêtement* sont les homéomorphismes $\tau : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tels que $p = p \circ \tau$. Le groupe des automorphismes du revêtement universel s'identifie avec le groupe fondamental de X .

Nous utiliserons souvent la propriété suivante de relèvement des applications.

Proposition 2.4.1. — *Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Soit Y un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. Supposons que Y est simplement connexe. ⁽⁶⁾ Alors il existe une application continue $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ qui relève f , au sens où $p \circ \tilde{f} = f$.*

Une telle application est unique si on impose la relation $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$, où y est un point donné de Y et \tilde{x} un relevé donné de $f(y)$ (c'est-à-dire $\tilde{x} \in p^{-1}(f(y))$).

⁽⁵⁾Pour la définition des revêtements et du groupe fondamental, voir par exemple le livre de Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, ou celui de Hatcher, *Algebraic Topology*, disponible sur le Net (la traduction anglaise de “revêtement” est “covering space”).

⁽⁶⁾Ou plus généralement que l'image par f du groupe fondamental de Y est triviale ; ou, plus généralement encore, que cette image est incluse dans l'image par p du groupe fondamental de \tilde{X} .

Cette proposition va nous permettre de relever les courbes, les homotopies de courbes, les homéomorphismes, et les homotopies entre homéomorphismes. Pour la fin de cette section, on considère un revêtement $p : \tilde{X} \rightarrow X$ (on peut avoir en tête le cas du tore).

b. Relevés d'une courbe. — Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ une application continue. Il existe une application continue $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{X}$, dite *relevée* de γ , telle que $p \circ \Gamma = \gamma \circ p$ (on a noté abusivement p les deux revêtements de X et de \mathbb{S}^1).

Soit $(\gamma_t)_{t \in [0,1]}$ une homotopie de courbes. Fixons un relevé Γ_0 de la courbe γ_0 . Alors il existe une unique application continue $(\tilde{\Theta}, t) \mapsto \Gamma_t(\tilde{\Theta})$ telle que chaque Γ_t relève la courbe γ_t .

Supposons maintenant que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est le revêtement universel (par exemple $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$). Soit γ une courbe de X ; comment décrire l'ensemble des relevés Γ de γ à partir d'un relevé particulier Γ_0 ? Il suffit de faire agir le groupe fondamental : autrement dit, l'ensemble des relevés de γ coïncide avec l'ensemble des applications $\tau \circ \Gamma_0$, où τ est un automorphisme du revêtement.

c. Relevés d'un homéomorphisme. — Soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme. Il existe alors un homéomorphisme $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ qui *relève* f , au sens où $f \circ p = p \circ \tilde{f}$. Un tel relevé est unique si on se donne deux points \tilde{x}, \tilde{y} de \tilde{X} tels que $f(p(\tilde{x})) = p(\tilde{y})$ et si on impose la relation $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}$. La relation liant f et \tilde{f} est appelée *semi-conjugaison*; en particulier, la même relation lie les puissances de \tilde{f} et de f : l'homéomorphisme \tilde{f}^n est un relevé de l'homéomorphisme f^n .

Une façon particulière d'obtenir un relevé d'un homéomorphisme consiste à relever une isotopie : si $(f_t)_{t \in [0,1]}$ est une isotopie dans X , avec $f_0 = \text{Id}$, alors il existe une unique isotopie $(\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$ dans \tilde{X} avec $\tilde{f}_0 = \text{Id}$, telle que chaque homéomorphisme \tilde{f}_t relève l'homéomorphisme f_t . En particulier, l'homéomorphisme \tilde{f}_1 est un relevé de f_1 ; on dira qu'il est obtenu en relevant l'isotopie (f_t) .

L'ensemble des relevés de l'identité coïncide avec le groupe des automorphismes du revêtement (par définition).

d. Exercices. —

Exercice 2.4.2. — En utilisant le relèvement des applications, montrer que toute courbe du tore est homotope à une des courbes $t \mapsto p(t(m, n))$ où (m, n) est un point du plan à coordonnées entières, et p le revêtement universel du tore. En utilisant la description du H_1 du tore, en déduire que, dans le tore, deux courbes homologues sont homotopes. Ainsi, les classes d'homotopie de courbes sont décrites par les couples d'entiers; géométriquement, ces entiers indiquent le nombre de tours effectués par la courbe dans les directions horizontales et verticales. Décrire l'ensemble des relevés de la courbe $(1, 0)$.

Exercice 2.4.3. —

1. Quels sont les homéomorphismes du plan qui relèvent l'identité du tore? En déduire une expression de l'ensemble des relevés d'un homéomorphisme f du tore, à partir d'un relevé particulier F .
2. Montrer que si f est isotope à l'identité, alors ses relevés commutent avec les translations entières. *Indication : relever l'isotopie.*

3. (Généralisation) Soit f un homéomorphisme du tore, pas forcément isotope à l'identité, soit \tilde{f} un relevé de f , soit f_* l'élément de $GL(2, \mathbb{Z})$ donné par l'action en homologie. Montrer la relation : pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $z \in \mathbb{Z}^2$,

$$\tilde{f}(x+z) = \tilde{f}(x) + f_*(z).$$

Autrement dit, on peut voir f_* comme indiquant le défaut de commutation des relevés de f avec les translations entières.

4. En déduire que l'application $\tilde{f} - f_*$ est \mathbb{Z}^2 -périodique, et donc bornée.

Exercice 2.4.4. —

- Vérifier que les affirmations concernant les relevés d'homéomorphismes et d'isotopies découlent bien de la proposition 2.4.1.
- Démontrer la proposition. *Indication : la preuve consiste essentiellement à relever les chemins, c'est-à-dire les applications continues de $[0, 1]$ dans X .*

e. Unicité du relevé. — La notion d'isotopie conduit à s'interroger sur la topologie de l'espace des homéomorphismes d'une surface S . Notons par exemple $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$ l'espace des homéomorphismes du tore, muni de la topologie de la convergence uniforme. L'ensemble des homéomorphismes isotopes à l'identité correspond alors à la composante connexe par arcs de l'identité dans l'espace $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$; on la note souvent $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$. Étant donné un homéomorphisme $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$, donnons nous une isotopie H de f à l'identité, et notons \tilde{f} le relevé de f obtenu en relevant l'isotopie H . *Est-ce que \tilde{f} dépend du choix de l'isotopie H ?*

On voit facilement que la réponse est "oui" : en fait, f possède de nombreux relevés (voir la question 1 de l'exercice 2.4.3), qui peuvent tous être obtenus de cette manière. Ceci vient du fait que l'espace $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ n'est pas simplement connexe (il a le type d'homotopie du tore \mathbb{T}^2).

Ici, les choses changent quand on remplace le tore par la surface S_g de genre $g \geq 2$. En effet, l'espace $\text{Homeo}_0(S_g)$ des homéomorphismes de S_g isotopes à l'identité est simplement connexe, et même contractile. En conséquence, *pour chaque $f \in \text{Homeo}_0(S_g)$, il existe un unique relevé \tilde{f} , au revêtement universel de la surface S_g , obtenu en relevant une isotopie de l'identité à f .*

Exercice 2.4.5. — Pour $f_1 = \text{Id}$, donner une isotopie (f_t) de l'identité à f_1 telle que le relevé \tilde{f}_1 obtenu en relevant l'isotopie soit la translation de vecteur $(0, 1)$.

2.5. Géométrisation des surfaces

Une découverte fondamentale de la fin du début du XIX^{ème} siècle est que toute surface (σ -compacte) admet une métrique riemannienne à courbure constante. En particulier, toute surface à caractéristique d'Euler strictement négative admet une métrique riemannienne à courbure constante -1 . Il en résulte en particulier que toute surface compacte sans bord à caractéristique d'Euler strictement négative est un quotient du disque de Poincaré \mathbb{H} par un groupe discret d'isométries. Ce fait est fondamental dans la théorie de Nielsen-Thurston.

Détaillons un peu. La sphère \mathbb{S}^2 admet bien sûr une métrique à courbure constante $+1$ (la métrique habituelle obtenue comme restriction de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 lorsqu'on voit \mathbb{S}^2 comme une sphère ronde dans \mathbb{R}^3). Le tore \mathbb{T}^2 est naturellement muni

d'une métrique à courbure constante nulle. En effet, \mathbb{T}^2 est naturellement le quotient de \mathbb{R}^2 par le réseau \mathbb{Z}^2 agissant par translations. Comme les translations sont des isométries de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^2 , cette métrique induit une métrique sur \mathbb{T}^2 . Cette métrique est bien sûr localement isométrique à la métrique euclidienne de \mathbb{R}^2 donc à courbure nulle. Reste à étudier (si on se restreint aux surfaces compactes sans bord) le cas des surfaces de genre $g \geq 2$.

Proposition 2.5.1. — *Toute surface compacte sans bord S de genre $g \geq 2$ admet une métrique à courbure constante -1 (on parle de métrique hyperbolique).*

Schéma de démonstration. — Soit Il est facile de voir qu'à homéomorphisme près, la surface S peut être obtenue en recollant deux à deux les arrêtes d'un polygone à $4g$ côtés. Par exemple, si on recolle les côtés d'un octogone comme indiqué sur la figure 1, on obtient une surface de genre 2.

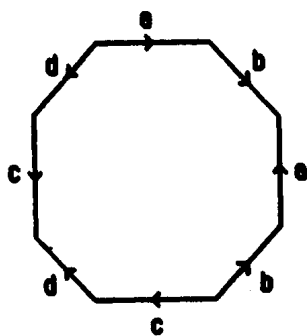


FIGURE 1. Règle de recollement des arrêtes d'un octogone permettant d'obtenir une surface de genre 2

Notons maintenant P_r un polygone hyperbolique⁽⁷⁾ régulier à $4g$ côtés, centré en 0, inscrit dans un cercle de rayon hyperbolique r (voir figure 2). Quand $r \rightarrow 0$, la somme des angles aux sommets du polygone P_r tend vers $(4g - 2)\pi$. Quand $r \rightarrow \infty$, la somme des angles aux sommets du polygone P_r tend vers 0. Par conséquent, il existe une valeur $r_0 > 0$ tel que la somme des angles aux sommets du polygone P_r vaut exactement 2π . Par ailleurs, si a et a' sont deux arrêtes de P_{r_0} , il existe une isométrie de \mathbb{H} qui envoie a sur a' , et envoie l'extérieur de P_{r_0} au voisinage de a sur l'intérieur de P_{r_0} au voisinage de a' . Il existe $2g$ isométries hyperboliques qui permettent de recoller deux à deux les arrêtes de P_{r_0} selon la règle appropriée pour obtenir une surface de genre g . On peut alors vérifier que la métrique hyperbolique de \mathbb{H} induit alors une métrique à courbure -1 sur la surface obtenue en recollant les arrêtes (la seule chose à vérifier est qu'on ne crée pas de singularité au point obtenu par recollement des sommets du polygone; la valeur de r_0 a justement été choisie pour cela). \square

Corollaire 2.5.2. — *Soit S une surface compacte sans bord de genre $g \geq 2$. Alors le revêtement universel de S est homéomorphe au disque hyperbolique \mathbb{H} , et on peut choisir l'homéomorphisme tel que les automorphismes de revêtement agissent comme des*

⁽⁷⁾c'est-à-dire dont les arrêtes sont des segments de géodésiques pour la métrique hyperbolique de \mathbb{H}

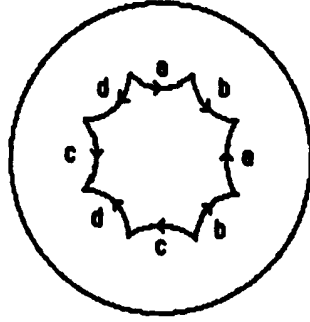


FIGURE 2. Un polygone hyperbolique régulier à 8 côtés dans le disque de Poincaré.

isométries de \mathbb{H} . Autrement dit, S est homéomorphe à un quotient de \mathbb{H} par un groupe discret d'isométries de \mathbb{H} .

Démonstration. — Soit \tilde{S} le revêtement universel de S . La proposition 2.5.1 nous fournit une métrique riemannienne à courbure -1 sur S , que l'on peut relever en une métrique riemannienne à courbure -1 sur \tilde{S} . Muni de cette métrique, \tilde{S} est une variété riemannienne, de dimension 2, simplement connexe, complète. Il est bien connu (et facile à montrer) qu'il n'existe (à isométrie près) qu'une seule telle variété : le disque hyperbolique \mathbb{H} (voir, par exemple, [1, chapitre 2]). Le corollaire en découle immédiatement. \square

Réciproquement, dès qu'on choisit une identification le revêtement universel d'une surface S au disque hyperbolique \mathbb{H} où les automorphismes de revêtement agissent comme des isométries de \mathbb{H} , la métrique de \mathbb{H} induit une métrique riemannienne hyperbolique (i.e. à courbure -1) sur S .

On rappelle qu'il existe trois sortes d'isométries de \mathbb{H} : les isométries *elliptiques*, les *paraboliqes* et les *hyperboliques*⁽⁸⁾.

Proposition 2.5.3. — *Soit S une surface compacte sans bord genre $g \geq 2$. On identifie le revêtement univèrel de S au disque hyperbolique \mathbb{H} , les automorphismes de revêtement agissant comme des isométries de \mathbb{H} . Alors toutes ces isométries (sauf l'identité) sont de type hyperbolique.*

Démonstration. — Notons Γ le groupe des automorphismes de revêtements, vu comme un groupe d'isométries de \mathbb{H} . On munit S de la métrique hyperbolique induite par ce revêtement. Alors S est isométrique au quotient \mathbb{H}/Γ . Le groupe Γ agit librement sur \mathbb{H} (aucun élément de $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ n'a de point fixe ; donc aucun élément de $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ n'est une isométrie elliptique. Par ailleurs, comme S est compacte, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in S$, l' ε -voisinage de x est simplement connexe. On en déduit que, pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ et tout $\tilde{x} \in \mathbb{H}$, le point $\gamma(\tilde{x})$ est à distance au moins ε du point \tilde{x} . On vérifie facilement qu'une isométrie parabolique ne satisfait pas cette propriété (il suffit par exemple de se placer dans le modèle du demi-plan supérieur où, à conjugaison près, toute isométrie parabolique γ agit comme une translation horizontale $(x, y) \mapsto (x + v, y)$; la

⁽⁸⁾Attention à la terminologie : toutes ces isométries (elliptiques, paraboliques et hyperboliques) sont des isométries pour la métrique hyperbolique de \mathbb{H}

distance hyperbolique entre le point $(0, y)$ et son image par γ est donc égale à $\frac{|v|}{y}$, et en particulier tend vers 0 lorsque $y \rightarrow \infty$. \square

Il existe des analogues des résultats ci-dessus pour les surfaces à bord :

Proposition 2.5.4. — *Toute surface compacte à bord S , de caractéristique d'Euler strictement négative, admet une métrique riemannienne à courbure constante -1 pour laquelle les composantes de bord sont des géodésiques.*

Schéma de démonstration. — On se ramène au cas d'une surface sans bord en utilisant l'astuce suivante. On considère une deuxième copie de S que l'on note S' . On note C_1, \dots, C_n les composantes de bord de S , et C'_1, \dots, C'_n les composantes de bord de S' . On fabrique une surface compacte sans bord Σ à partir de S et S' en collant C_i sur C'_i pour chaque i (on dit que Σ est le *double* de la surface S). Alors Σ est une surface compacte sans bord dont la caractéristique d'Euler est double de celle de S ; en particulier, la caractéristique d'Euler de Σ est strictement négative. La proposition 2.5.1 nous fournit donc une métrique riemannienne hyperbolique sur Σ .

On voit maintenant C_1, \dots, C_n comme des courbes fermées simples deux à deux disjointes dans la surface Σ . On vérifie facilement que ces courbes sont essentielles. Nous montrerons au chapitre 5 que les courbes C_1, \dots, C_n sont homotopes dans Σ à des géodésiques deux à deux disjointes pour la métrique hyperbolique Σ , que l'on note $\widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_n$ (voir proposition 5.1.4). De plus, on vérifie que l'homotopie peut s'effectuer parmi les ensembles de n courbes fermées simples deux à deux disjointes. En découpant Σ le long des courbes $\widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_n$, on obtient une surface homéomorphe à S . La métrique hyperbolique de \mathbb{H} induit par restriction une métrique hyperbolique sur cette surface pour laquelle les composantes de bord $\widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_n$ sont géodésiques. \square

En raisonnant comme précédemment, on obtient facilement :

Proposition 2.5.5. — *Soit S une surface compacte connexe (éventuellement à bord), de caractéristique d'Euler strictement négative. Alors le revêtement universel de S est homéomorphe à un domaine du disque hyperbolique \mathbb{H} dont le bord est une union de géodésiques (deux à deux disjointes), et on peut choisir l'homéomorphisme tel que les automorphismes de revêtement agissent comme des isométries de \mathbb{H} .*

Schéma de démonstration. — On raisonne comme ci-dessus : on considère le double Σ de la surface S . C'est une surface compacte sans bord. Son revêtement universel est le disque de Poincaré \mathbb{H} , les automorphismes de revêtement agissant comme des isométries. De plus, on peut voir les composantes de bord de S comme des géodésiques fermées simples deux à deux disjointes de Σ . La proposition en découle. \square

Proposition 2.5.6. — *Soit S une surface compacte connexe (éventuellement à bord), de caractéristique d'Euler strictement négative. On identifie le revêtement universel de S à un domaine du disque hyperbolique \mathbb{H} dont le bord est une union de géodésiques, les automorphismes de revêtement agissant comme des isométries de \mathbb{H} . Alors toutes ces isométries (sauf l'identité) sont de type hyperbolique.*

Schéma de démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 2.5.3 au double de S . \square

PARTIE I

THÉORIE DE NIELSEN-THURSTON

La théorie de Nielsen-Thurston s'intéresse aux homéomorphismes de surfaces à *isotopie près*. Rappelons que deux homéomorphismes f, g d'une surface S sont dits *isotopes* s'il existe un chemin continu dans l'espace des homéomorphismes de S qui joint f à g . *A priori*, une théorie concernant les homéomorphismes à isotopie près ne devrait pas avoir sa place dans un cours de dynamique. En effet, le fait de modifier un homéomorphisme par une isotopie change en général radicalement la dynamique de cet homéomorphisme. Par exemple, sur n'importe quelle surface, il existe des homéomorphismes isotopes à l'identité qui ont une dynamique "riche" et "chaotique" (alors que la dynamique de l'identité est bien sûr triviale). Cependant, le miracle de la théorie de Nielsen-Thurston est justement qu'elle fournit des liens entre *classe d'isotopie* et *dynamique*. Dans chaque classe d'isotopie \mathcal{C} , on trouve en effet un homéomorphisme ayant la dynamique "la plus simple" parmi les éléments de \mathcal{C} . On en déduit alors un résultat du type suivant : si la classe d'isotopie d'un homéomorphisme de surface est "suffisamment compliquée", alors cet homéomorphisme possède une dynamique "riche" et "chaotique".

Sous sa forme actuelle, la théorie remonte aux travaux de W.P. Thurston dans les années 70 ([8]). Thurston s'est ensuite aperçu qu'une partie des résultats qu'il avait trouvés avaient déjà été obtenus une quarantaine d'années plus tôt par J. Nielsen. Si j'ai bien compris, la classification des homéomorphismes de surfaces en fonction de leur action sur les classes d'homotopies de courbes était essentiellement connue de Nielsen, mais les liens avec la dynamique des homéomorphismes sont entièrement dus à Thurston.

La théorie de Nielsen-Thurston est triviale sur la sphère \mathbb{S}^2 et sur l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$: deux homéomorphismes préservant l'orientation de \mathbb{S}^2 sont toujours isotopes, et il n'y a que deux classes d'isotopies d'homéomorphismes préservant l'orientation sur $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$. Pour des raisons techniques, le cas du tore \mathbb{T}^2 doit être traité séparément de celui des autres surfaces⁽⁹⁾. En fait, d'un point de vue pédagogique, c'est une aubaine. En effet, le cas du tore est beaucoup plus simple que celui des autres surfaces, et permet de motiver les énoncés qu'on cherchera à prouver sur les surfaces de genre plus grand.

Les preuves originales de Thurston utilisent la compactification de l'espace des multicourbes d'une surface par les feuilletages mesurés (voir [8, 2]). Celles que nous présenterons utilisent les laminations géodésiques des surfaces hyperboliques ; elles sont essentiellement extraites du livre de A. Casson et S. Bleiler [1].

⁽⁹⁾Ceci est dû au fait que toutes les surfaces compactes à bord orientables, hormis la sphère \mathbb{S}^2 , l'anneau \mathbb{A} et le tore \mathbb{T}^2 , admettent une structure hyperbolique. Cette structure joue un rôle fondamental dans les preuves des résultats principaux de la théorie.

CHAPITRE 3

ISOTOPIE ET DYNAMIQUE SUR LE TORE \mathbb{T}^2 .

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux homéomorphismes du tore \mathbb{T}^2 . Ce cadre sert de modèle-jouet à la théorie de Nielsen-Thurston : la classification que l'on obtient sur le tore \mathbb{T}^2 est tout à fait analogue à celle qui existe sur les surface de genre supérieur, mais les preuves sont élémentaires⁽¹⁾. Les résultats du chapitre ne seront pas réutilisés par la suite.

3.1. Classes d'isotopie sur \mathbb{T}^2 et automorphismes linéaires

À tout homéomorphisme $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, on peut associer son action en homologie : l'automorphisme de \mathbb{Z} -module $f_* : H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ obtenu en faisant agir f sur les courbes fermées (voir section 2.3). Puisque $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$, l'automorphisme f_* est un élément de $GL(2, \mathbb{Z})$. Si f préserve l'orientation, alors le déterminant de f_* est positif, et donc $f_* \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Réciproquement, si A est un élément de $GL(2, \mathbb{Z})$, on peut voir A comme un automorphisme linéaire de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Cet automorphisme linéaire préserve le réseau \mathbb{Z}^2 ; il induit donc un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ que l'on notera f_A . Un tel difféomorphisme de \mathbb{T}^2 est dit *linéaire*.

Proposition 3.1.1. — *L'application $f \mapsto f_*$ induit une bijection entre les classes d'isotopies d'homéomorphismes du tore et $GL(2, \mathbb{Z})$ (resp. entre (resp. les classes d'isotopies d'homéomorphismes préservant l'orientation du tore et $SL(2, \mathbb{Z})$). La réciproque de cette bijection n'est autre que l'application qui à un élément A de $GL(2, \mathbb{Z})$ (resp. $SL(2, \mathbb{Z})$) associe la classe d'isotopie de l'homéomorphisme f_A .*

Démonstration. — Il est clair (et il a déjà été mentionné) que deux homéomorphismes isotopes induisent la même action en homologie. L'application $f \mapsto f_*$ induit donc une application entre les classes d'isotopies d'homéomorphismes du tore et $GL(2, \mathbb{Z})$.

Pour montrer l'injectivité de cette application, on doit vérifier que, si f, g sont deux homéomorphismes de \mathbb{T}^2 tels que $f_* = g_*$, alors f et g sont isotopes. Comme $(f \circ g^{-1})_* = f_* \circ (g_*)^{-1}$, on est ramené à vérifier que, si $f_* = \text{Id}_{\mathbb{Z}^2}$, alors f est isotope à $\text{Id}_{\mathbb{T}^2}$. C'est une conséquence immédiate du théorème d'Epstein 2.3.2, et du fait que, dans le tore \mathbb{T}^2 , deux courbes fermées sont homotopes si et seulement si elles sont homologues.

⁽¹⁾Sur \mathbb{T}^2 , on profite du fait que deux courbes fermées simples sur \mathbb{T}^2 sont homotopes si et seulement si elles sont homologues (ce qui est grossièrement faux en genre plus grand). L'action de f sur les classes d'homotopies de courbes est donc une action linéaire sur \mathbb{Z}^2 , ce qui simplifie beaucoup les choses...

Enfin, pour tout élément A de $GL(2, \mathbb{Z})$, on a clairement $(f_A)_* = A$. Ceci montre que l'application $f \mapsto f_*$ est surjective, et que sa réciproque n'est autre que l'application qui à tout $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ associe la classe d'isotopie du difféomorphisme linéaire f_A . \square

La proposition 3.1.1 implique en particulier :

Corollaire 3.1.2. — *Tout homéomorphisme f du tore \mathbb{T}^2 est isotope à un unique difféomorphisme "linéaire" du tore \mathbb{T}^2 : le difféomorphisme f_A avec $A = f_*$.*

Ainsi classer les homéomorphismes du tore \mathbb{T}^2 à isotopie près revient à classer les difféomorphismes linéaires de \mathbb{T}^2 .

3.2. Classification des difféomorphismes linéaires du tore

Il nous reste à classer les difféomorphismes linéaires de \mathbb{T}^2 . Rappelons que, pour tout $A \in GL(2, \mathbb{Z})$, on voit A comme un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 qui préserve le réseau \mathbb{Z}^2 , et que l'on note f_A le difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induit par A . Remarquons que A est alors l'unique relevé de f_A fixant 0 (voir la proposition 2.4.1), et rappelons que $(f_A)_* = A$.

Pour simplifier, on va se restreindre au cas où $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ (ce qui revient à se restreindre aux homéomorphismes du tore \mathbb{T}^2 qui préservent l'orientation). Le discriminant du polynôme caractéristique de A est alors $\Delta = \text{Tr}(A)^2 - 4$. On va voir que le comportement dynamique du difféomorphisme linéaire f_A dépend essentiellement du signe de Δ , et donc de la valeur de la trace de A .

a. Premier cas : $\text{tr}(A) = -1, 0$ ou 1 . — C'est le cas où les valeurs propres de A sont complexes. Le comportement dynamique de f_A est très simple :

Proposition et définition 3.2.1. — *Il existe un entier $n \leq 6$ tel que $f_A^n = \text{Id}_{\mathbb{T}^2}$. Un tel difféomorphisme est dit périodique.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème de Cayley-Hamilton. Supposons par exemple que $\text{tr}(A) = 1$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a alors $A^2 - A + \text{Id}_{\mathbb{R}^2} = 0$. On en déduit $A^3 = A^2 - A = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, puis $A^6 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, et enfin $f_A^6 = \text{Id}_{\mathbb{T}^2}$. Les cas $\text{tr}(A) = 0$ et $\text{tr}(A) = -1$ se traitent de même. \square

Exercice 3.2.2. — La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est d'ordre 4. Montrer que toute matrice $B \in SL(2, \mathbb{Z})$ de trace nulle est conjuguée dans $SL(2, \mathbb{Z})$ à A . Montrer qu'il existe une infinité de telles matrices.

b. Deuxième cas : $|\text{tr}(A)| = 2$. — C'est le cas où la matrice A a alors une valeur propre double, qui est 1 ou -1 . On a le résultat suivant :

Proposition et définition 3.2.3. — *Le difféomorphisme f_A fixe une courbe fermée simple du tore \mathbb{T}^2 . Un tel difféomorphisme est dit réductible.*

Démonstration. — La matrice A admet 1 ou -1 comme valeur propre double. Comme A est à coefficients entiers, on voit facilement qu'il existe un vecteur propre associé à coordonnées entières (m, n) . On a $A(m, n) = (m, n)$ ou $A^2(m, n) = (m, n)$: la droite

vectorielle $t \mapsto t.(m, n)$ est donc fixée par A . La projection de cette droite vectorielle est une courbe fermée simple dans \mathbb{T}^2 qui est fixée par f_A . \square

La terminologie “réductible” renvoie au fait que l’on peut découper le tore le long de la courbe préservée par f_A . On obtient alors un anneau, et f_A induit un homéomorphisme de cet anneau. On a alors “réduit” l’étude de la dynamique de f_A à celle d’un homéomorphisme de l’anneau $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$.

On peut analyser un peu mieux la dynamique du difféomorphisme f_A : en complétant le vecteur propre en une base du réseau \mathbb{Z}^2 , on voit que la matrice A est conjuguée, dans $SL(2, \mathbb{Z})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dans le premier cas, le difféomorphisme f_A s’appelle un *twist de Dehn* (d’ordre n autour des courbes préservées par f_A). La seconde est obtenue en composant un twist de Dehn par $-\text{Id}_{\mathbb{T}^2}$.

Exercice 3.2.4. — Décrire géométriquement l’action d’un twist de Dehn A sur le tore : montrer qu’il existe un feuilletage en cercles invariants sur chacun desquels f_A agit par rotation.

c. Troisième cas : $|\text{tr}(A)| > 2$. — C’est le cas le plus intéressant, par exemple celui de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a deux valeurs propres réelles λ et λ^{-1} , avec $|\lambda| < 1$ et $|\lambda^{-1}| > 1$. La matrice A est dite *hyperbolique*. Notons que les valeurs propres λ, λ^{-1} sont nécessairement irrationnelles (montrer que Δ n’est pas un carré parfait). Dans une base propre, la matrice de A s’écrit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Si on note E^s et E^u les droites propres associés respectivement aux valeurs propres λ et λ^{-1} , la norme des vecteurs de E^s est contractée par A , alors que la norme des vecteurs de E^u est dilatée.

Cherchons maintenant à comprendre ce qui se passe dans le tore. Il faut pour cela remarquer que la différentielle du difféomorphisme f_A en n’importe quel point de \mathbb{T}^2 s’identifie naturellement à l’application $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ainsi, en tout point de \mathbb{T}^2 , la différentielle de f_A laisse invariante les directions E^s et E^u , dilate les vecteurs tangents à E^s et contracte les vecteurs tangents E^u . Considérons le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (resp. $\tilde{\mathcal{F}}^u$) de \mathbb{R}^2 par les droites affines parallèles à la droite vectorielle E^s . Ces feuilletages sont évidemment invariants par les translations à coordonnées entières : ils se projettent donc en des feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u du tore \mathbb{T}^2 . Les propriétés de la différentielle du difféomorphisme f_A vues ci-dessus impliquent que f_A préserve globalement les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u (attention chaque feuille n’est pas préservée individuellement ; une feuille est envoyée sur une feuille, c’est tout !). Et bien sûr, la différentielle de f_A contracte (d’un facteur λ) la norme des vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F}^s et dilate la norme des vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F}^u . Les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont appelés respectivement *feuilletage stable* et *feuilletage instable* de f_A . Notons que les pentes des droites E^s et E^u sont irrationnelles. Ceci peut se voir algébriquement, ou géométriquement⁽²⁾ Il en résulte que les feuilles des feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont toutes denses dans \mathbb{T}^2 (exercice).

Pour résumer, on a donc obtenu la proposition suivante :

⁽²⁾Supposons en effet, par exemple, que le vecteur $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ est un vecteur propre de A . La courbe correspondante dans le tore est une courbe fermée, que nous notons $C_{(m, n)}$, est alors globalement invariante par f_A . L’application $f_A|_{C_{(m, n)}}$ est un homéomorphisme sur une courbe fermée qui dilate localement les distances d’un facteur λ ou λ^{-1} : c’est absurde.

Proposition et définition 3.2.5. — *Le difféomorphisme f_A préserve globalement deux feuilletages transverses \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , “contracte uniformément la direction de \mathcal{F}^s ” et “dilata uniformément la direction de \mathcal{F}^u ”. Plus précisément, il existe une constante $\lambda < 1$ telle que, pour tout vecteur v tangent à une feuille de \mathcal{F}^s (resp. \mathcal{F}^u), on a $\|df.v\| \leq \lambda.\|v\|$ (resp. $\|df.v\| \geq \lambda^{-1}.\|v\|$). Un tel difféomorphisme linéaire du tore \mathbb{T}^2 est dit d’Anosov⁽³⁾.*

Exercice 3.2.6. — Montrer que tout difféomorphisme d’Anosov linéaire $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ vérifie les hypothèses du théorème 1.3.1.

d. Résumé. — En mettant bout-à-bout le corollaire 3.1.2 et les résultats de cette section, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.2.7. — *Tout homéomorphisme f du tore \mathbb{T}^2 est isotope à un difféomorphisme linéaire f_A qui est soit périodique, soit réductible, soit de type Anosov.*

3.3. Les automorphismes d’Anosov linéaires ont une dynamique “riche”

Dans cette section, on considère un automorphisme d’Anosov linéaire $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Notre but est de montrer que f_A possède une dynamique “riche” et “chaotique”. On note $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le relevé linéaire de A . On note λ la valeur absolue de la valeur propre contractante de A . On note \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u les feuilletages stable et instable de A .

Commençons par un résultat très simple :

Proposition 3.3.1. — *Les orbites périodiques de f_A sont dense dans \mathbb{T}^2 .*

Remarque 3.3.2. — Cet énoncé implique en fait que tout ouvert U de \mathbb{T}^2 contient des points périodiques de f_A de périodes arbitrairement grandes. Considérons en effet un ouvert U de \mathbb{T}^2 . Il est facile de voir que U ne peut pas être périodique pour f_A . Donc, quel que soit n , les points périodiques de période n ne peuvent être denses dans U . Comme, d’après la proposition 3.3.1, les points périodiques de f sont denses dans U , on en déduit que U contient des points périodiques de périodes arbitrairement grandes.

Démonstration. — Pour tout entier $q > 0$, on considère l’ensemble $\tilde{E}_q := \left(\frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)^2 \subset \mathbb{R}^2$, ainsi que sa projection $E_q \subset \mathbb{T}^2$. L’ensemble E_q est fini, de cardinal q^2 . Par ailleurs, puisque la matrice de A dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est à coefficient entiers, A préserve \tilde{E}_q , et par suite, f_A préserve E_q . On en déduit que tout point de E_q est périodique de période inférieure à q^2 . Pour conclure la preuve, il nous reste plus qu’à remarquer que la réunion $\bigcup_{q>0} \tilde{E}_q = \mathbb{Q}^2$ est dense dans \mathbb{R}^2 , et donc que la réunion $\bigcup_{q>0} E_q$ est dense dans \mathbb{T}^2 . \square

Même si la proposition 3.3.1 montre que f_A possède de nombreuses orbites périodiques, la plupart des orbites de f_A ont un comportement fort différent, comme le montre par exemple le résultat suivant :

Proposition 3.3.3. — *Soit E l’ensemble des points $x \in \mathbb{T}^2$ dont l’orbite par f_A est dense dans \mathbb{T}^2 . Alors E est une intersection dénombrable d’ouverts denses⁽⁴⁾ de \mathbb{T}^2 .*

⁽³⁾En hommage au mathématicien russe D. V. Anosov, qui a le premier montré que le flot géodésique d’une surface à courbure négative satisfaisait des propriétés analogues à ces difféomorphismes du tore, et en a déduit que ce flot géodésique était ergodique pour la mesure de Liouville

⁽⁴⁾En particulier, par le théorème de Baire, E est dense dans \mathbb{T}^2

Lemme 3.3.4. — Pour tout couple U, V d'ouverts non-vides de \mathbb{T}^2 , il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f_A^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.1, on peut trouver un point périodique x de f_A dans U . Soient p_x la période de p . Soit \mathcal{F}_x^u la feuille du feuilletage \mathcal{F}^u qui passe par x , et I_x^u un segment de la feuille \mathcal{F}_x^u centré en x et inclus dans U . Soit 2ε la longueur du segment I_x^u . L'application $f_A^{p_x}$ fixe le point x , et donc la feuille \mathcal{F}_x^u . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'image par $f_A^{kp_x}$ du segment I_x^u est donc un segment dans la feuille \mathcal{F}_x^u , de longueur $\lambda^{-kp_x} \cdot \varepsilon$, centré en x . La feuille \mathcal{F}_x^u est dense dans \mathbb{T}^2 ; elle rencontre donc en particulier l'ouvert V . Comme $\lambda^{-kp_x} \cdot \varepsilon \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, on en déduit que, pour k assez grand, le segment $f_A^{kp_x}(I_x^u)$ rencontre l'ouvert V . Comme le segment I_x^u est contenu dans l'ouvert U , on en déduit finalement que, pour k assez grand, l'intersection $f_A^{kp_x}(U) \cap V$ est non-vide. \square

Démonstration de la proposition 3.3.3. — Soit V_1, V_2, \dots une base dénombrable d'ouverts de \mathbb{T}^2 . Pour tout n , on note W_i l'ensemble des points de \mathbb{T}^2 dont l'orbite positive rencontre chacun des n ouverts V_1, V_2, \dots, V_n . En appliquant le lemme 3.3.4 avec $U = B(x, r)$ et $V = V_1$ pour tout $x \in \mathbb{T}^2$ et tout $r > 0$, on obtient que l'ensemble W_1 est un ouvert dense de \mathbb{T}^2 . En appliquant alors le lemme 3.3.4 avec $U = V_1 \cap B(x, r)$ et $V = V_2$ pour tout $x \in \mathbb{T}^2$ et tout $r > 0$, on obtient que l'ensemble W_2 est un ouvert dense de \mathbb{T}^2 . Par récurrence, on montre ainsi que W_n est un ouvert dense de \mathbb{T}^2 pour tout n . Par conséquent, $\bigcap_{n \geq 0} W_n$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à remarquer que, si l'orbite de x rencontre chacun des ouverts V_i , alors cette orbite est dense dans \mathbb{T}^2 (puisque V_1, V_2, \dots une base dénombrable d'ouverts de \mathbb{T}^2). \square

La notion d'entropie topologique permet de quantifier la "richesse" de la dynamique d'une application. Un peu plus précisément, la notion d'entropie topologique d'une application f permet de donner un sens précis et quantitatif au fait que "les orbites par f de deux points proches ne restent en général pas proches pendant bien longtemps" (et ont donc en général rapidement des comportements "complètement différents").

Définition 3.3.5. — Considérons un espace métrique compact (X, d) et une application continue $f : X \rightarrow X$. Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, deux points $x, y \in X$ sont dits (n, ε) -séparés, s'il existe un entier j avec $0 \leq j \leq n$ tel que $d(f^i(x), f^j(y)) > \varepsilon$. Notons $C(n, \varepsilon)$ le cardinal maximal d'un ensemble de points de X deux-à-deux (n, ε) -séparés. L'entropie topologique de f est alors la quantité

$$h_{top}(f) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log C(n, \varepsilon).$$

En particulier, f a une entropie topologique strictement positive s'il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout entier $n > 0$, il existe un ensemble fini E contenant plus de e^{Cn} points deux à deux (ε, n) -séparés. Sur la notion d'entropie topologique et ses liens avec d'autres quantités, on lira avec profit le chapitre 3 du livre d'A. Katok et B. Hasselblatt [4].

Proposition 3.3.6. — L'entropie topologique de f_A est égale à $\log(\lambda)$.

Démonstration. — L'exercice 3.3.8 permet de montrer l'inégalité qui nous intéresse le plus : l'entropie de f_A est supérieure à $\log(\lambda)$. Pour l'autre inégalité, nous renvoyons par exemple à [4]. \square

On peut trouver de nombreux autres indices du fait que la dynamique de f_A est “compliquée” ; nous n’en citerons qu’un seul autre, qui utilise la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^2 :

Proposition 3.3.7. — *Quels que soient les ensembles boréliens $E, F \subset \mathbb{T}^2$, la quantité $\text{Leb}(f_A^n(E) \cap F)$ tend exponentiellement vite vers $\text{Leb}(E) \cdot \text{Leb}(F)$ quand $n \rightarrow +\infty$.*

Autrement, quels que soient les ensembles E et F , la probabilité pour l’orbite d’un point $x \in E$ de se trouver dans F au bout d’un temps n tend très vite vers la quantité $\text{Leb}(E) \cdot \text{Leb}(F)$, qui ne dépend que des tailles de E et F , mais pas de leurs positions. On peut donc dire que, lorsque n est grand, il n’y a presque aucune corrélation entre la position d’un point x et la position du point $f_A^n(x)$. On dit que f_A est *exponentiellement mélangant* pour la mesure de Lebesgue.

Démonstration de la proposition 3.3.7. — Voir par exemple [4, proposition 4.2.12]. \square

Exercice 3.3.8. — Le but de cet exercice est de minorer l’entropie topologique de l’automorphisme d’Anosov linéaire f_A .

1. Soit $x \in \mathbb{T}^2$ et $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ un relevé de x . Vérifier que x est périodique de période n pour f_A si et seulement si il existe un vecteur $v \in \mathbb{Z}^2$ tel que $A^n(\tilde{x}) = \tilde{x} + v$.
2. Montrer que, quel que soit $n \geq 0$, deux points périodiques de période n pour f_A sont toujours $(n, \frac{1}{2})$ -séparés.

Aide. D’après la première question, si x, y sont deux points périodiques de période n pour f_A , et si \tilde{x}, \tilde{y} sont des relevés de x et y , il existe des vecteurs v et w dans \mathbb{Z}^2 tels que $A^n(\tilde{x}) = \tilde{x} + v$ et $A^n(\tilde{y}) = \tilde{y} + w$. On peut alors remarquer que A^n ne préserve aucun vecteur non-nul de \mathbb{R}^2 , en déduire que $v \neq w$ et conclure.

3. Soit P un parallélogramme semi-ouvert de \mathbb{R}^2 dont les sommets sont des points entiers,

$$P := \{tV_1 + sV_2, 0 \leq t < 1, 0 \leq s < 1\}$$

avec $V_1 = (a, b)$ et $V_2 = (c, d)$ dans \mathbb{Z}^2 . Montrer que l’aire euclidienne de P est égal au nombre de points entiers qu’il contient, c’est à dire au cardinal de $P \cap \mathbb{Z}^2$.

Aide. On pourra se ramener au cas où $b = 0$ en utilisant un élément de $GL(2, \mathbb{Z})$, puis se ramener au cas où $c = b = 0$ par découpage.

4. En utilisant la question 1, montrer que le nombre de points périodiques dont de période n de f_A est exactement le nombre de points entiers dans le parallélogramme $(A^n - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})([0, 1]^2)$.
5. Montrer que le volume du parallélogramme $(A^n - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})([0, 1]^2)$ croît comme $c \cdot \lambda^n$ quand $n \rightarrow \infty$ (pour une certaine constante $c > 0$).

Aide : Soit $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice de \tilde{f}_A^n dans la base canonique. Vérifier que le volume du parallélogramme $(\tilde{f}_A^n - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})([0, 1]^2)$ vaut $\det(A^n - I) = 2 - (a_n + d_n)$. En utilisant les valeurs propres et les directions propres de A , montrer que les coefficients a_n et d_n croissent comme $c_1 \cdot \lambda^n$ et $c_2 \cdot \lambda^n$ quand $n \rightarrow \infty$.

6. Conclure que l’entropie topologique de f_A est supérieure ou égale à $\log(\lambda)$.

3.4. Les difféomorphismes d’Anosov linéaires ont la dynamique “la plus simple” parmi les homéomorphismes de leur classe d’isotopie

A priori, le fait de changer un homéomorphisme par une isotopie change entièrement la dynamique de cet homéomorphisme. Il s’avère cependant que le fait d’appartenir à une classe d’isotopie de type Anosov suffit à forcer une dynamique “compliquée”.

Plus précisément, nous allons montrer que, si f est un homéomorphisme du tore \mathbb{T}^2 isotope à un automorphisme d'Anosov linéaire f_A , alors la dynamique de f "se projette surjectivement" sur la dynamique de f_A (théorème 3.4.1 ci-dessous). En un certain sens, ceci signifie que, si f est isotope à un automorphisme d'Anosov linéaire f_A , alors la dynamique de f est "au moins aussi riche" que celle de f_A . En combinant cela avec les résultats du paragraphe précédent, on en déduit que tout homéomorphisme du tore isotope à un automorphisme d'Anosov linéaire possède une dynamique "très riche".

Théorème 3.4.1 (J. Franks, 1970). — *Soit f_A un automorphisme d'Anosov linéaire du tore \mathbb{T}^2 , et soit f un homéomorphisme de \mathbb{T}^2 isotope à f_A . Alors il existe une application continue surjective $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ telle que $\pi \circ f = f_A \circ \pi$.*

Au cours de la preuve de ce théorème, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.2. — *Toute application continue $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotope à l'identité est surjective.*

Démonstration. — Pour $r > 0$, on note C_r (resp. D_r) le cercle (resp le disque fermé) de centre 0 et de rayon r dans \mathbb{R}^2 . Soit $(\pi_t)_{t \in [0,1]}$ une homotopie de $\text{Id}_{\mathbb{T}^2}$ à π . On peut la relever en une homotopie $(\tilde{\pi}_t)_{t \in [0,1]}$ de $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ à un relevé $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de π . La norme $\|\tilde{\pi} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\|_\infty$ est alors majorée par le supremum pour $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ du diamètre du chemin $t \mapsto \tilde{\pi}_t(\tilde{x})$. Cette quantité est égal au supremum pour $x \in \mathbb{T}^2$ du diamètre du chemin $t \mapsto \tilde{\pi}_t(\tilde{x})$, qui est fini par compacité de \mathbb{T}^2 . Donc $\|\tilde{\pi} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\|_\infty$ est fini. On fait alors deux remarques :

- Pour $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$, si $r - \|x\| > \|\tilde{\pi} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\|_\infty$, alors la courbe $\tilde{\pi}(C_r)$ est homotope au cercle C_r dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{\tilde{x}\}$. Donc on a l'égalité $\text{Ind}(\tilde{\pi}(C_r), \tilde{x}) = \text{Ind}(C_r, \tilde{x}) = 1$ (si on paramètre le cercle C_r de manière à le parcourir une seule fois, dans le sens direct)⁽⁵⁾
- Pour $r > 0$, si $\tilde{x} \notin \tilde{\pi}(D_r)$, alors le cercle est contractible sur un point dans D_r , donc la courbe $\tilde{\pi}(C_r)$ est contractible sur un point dans $f(D_r)$, et donc *a fortiori* dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$. Donc $\text{Ind}(\tilde{\pi}(C_r), \tilde{x}) = 0$.

En mettant ces deux points ensemble, on obtient que, pour $r > 1 + \|\tilde{\pi} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\|_\infty$, l'ensemble $\tilde{\pi}(D_r)$ contient $[0, 1]^2$. En particulier, l'image de $\tilde{\pi}$ contient $[0, 1]^2$. Et comme $[0, 1]^2$ est un domaine fondamental du revêtement $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, on en déduit finalement que π est surjective. \square

Preuve du théorème 3.4.1. — On travaille dans le revêtement universel \mathbb{R}^2 de \mathbb{T}^2 . On note comme d'habitude $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le relevé de f_A qui agit linéairement sur \mathbb{R}^2 , et $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un relevé de f . On va chercher un relevé $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de l'application $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ sous la forme $\tilde{\pi} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2} - a$, où a est invariante par les translations entières (on verra ci-dessous que, si $\tilde{\pi}$ s'écrit sous cette forme, alors l'application π est automatiquement surjective).

⁽⁵⁾On rappelle que l'indice $\text{Ind}(\gamma, x)$ d'une courbe fermée $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par rapport à un point $z \in \mathbb{R}^2$ est "le nombre algébrique de tours que γ fait autour de z ". Plus formellement, on considère l'application $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\|\gamma(t) - z\|}$$

(φ arrive dans le cercle unité de \mathbb{R}^2 que l'on identifie à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) ; on considère un relevé continu $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de φ ; on peut alors définir $\text{Ind}(\gamma, x) := \frac{1}{2\pi}(\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0))$. Ce nombre est un entier, ne dépend pas du choix du relevé $\tilde{\varphi}$, et est invariant par toute homotopie de γ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$.

Remarquons dès maintenant que la relation $\pi \circ f = f_A \circ \pi$ s'écrit alors $(\text{Id}_{\mathbb{R}^2} - a) \circ \tilde{f} = A \circ (\text{Id}_{\mathbb{R}^2} - a)$, ou de manière équivalente

$$(1) \quad a - A^{-1} \circ a \circ \tilde{f} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2} - A^{-1} \circ \text{Id}_{\mathbb{R}^2} \circ \tilde{f}.$$

Afin de montrer que cette équation admet une solution a , on considère l'espace de Banach $\mathcal{F} = C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et l'application linéaire $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ définie par $\Phi(a) = A^{-1} \circ a \circ \tilde{f}$. On note $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ l'identité de \mathcal{F} . Avec ces définitions, l'équation (1) se réécrit

$$(2) \quad (I - \Phi)(a) = (I - \Phi)(\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$$

Rappelons par ailleurs qu'on cherche une application a qui soit invariante par les translations entières. Pour ce faire, on note \mathcal{G} le sous-espace de \mathcal{F} constitué des applications $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ invariantes par les translations entières. Comme f_A et f sont isotopes, les relevés A et \tilde{f} ont "le même défaut de commutation aux translations entières" : pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{Z}^2$, on a $A(\tilde{x} + v) - A(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x} + v) - \tilde{f}(\tilde{x})$ (voir exercice 2.4.3). On en déduit, d'une part que $(I - \Phi)(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \in \mathcal{G}$, et d'autre part que Φ et $I - \Phi$ laissent le sous-espace \mathcal{G} invariant. Pour trouver une solution $a \in \mathcal{G}$ de l'équation (2), il suffit donc de montrer que $I - \Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ est inversible.

Pour cela, on se souvient que f_A est de type Anosov. L'application linéaire $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possède donc deux valeurs propres réelles $\lambda < 1$ et $\lambda^{-1} > 1$. On note E^s et E^u les droites propres correspondantes. On note \mathcal{G}^s (resp. \mathcal{G}^u) le sous-espace de \mathcal{G} constitué des applications à valeurs dans E^s (resp. E^u) ; les sous-espaces \mathcal{G}^s et \mathcal{G}^u sont évidemment invariants par Φ et on a $\mathcal{G} = \mathcal{G}^s \oplus \mathcal{G}^u$. Pour tout $a \in \mathcal{G}^s$, on a $\|\Phi(a)\|_\infty \leq \lambda \|a\|_\infty$; par conséquent, on a $\|\Phi|_{\mathcal{G}^s}\| \leq \lambda < 1$. On en déduit que la série

$$\sum_{n \geq 0} \Phi|_{\mathcal{G}^s}^n$$

est normalement convergente. La somme de cette série est bien sûr un inverse de $(I - \Phi)|_{\mathcal{G}^s}$. De même, on a $\|\Phi|_{\mathcal{G}^u}^{-1}\| \leq \lambda < 1$; donc la série $\sum_{n \geq 0} \Phi|_{\mathcal{G}^u}^{-n}$ est convergente ; la somme de cette série est un inverse de $(I - \Phi^{-1})|_{\mathcal{G}^u}$; donc $(I - \Phi)|_{\mathcal{G}^u} = (I - \Phi^{-1})|_{\mathcal{G}^u} \circ \Phi|_{\mathcal{G}^u}$ est inversible. Par conséquent, l'application linéaire $I - \Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ est bien inversible.

On a donc trouvé une solution $a \in \mathcal{G}$ à l'équation (2). L'application $\tilde{\pi} := \text{Id}_{\mathbb{R}^2} + a$ satisfait alors $\tilde{\pi} \circ \tilde{f} = A \circ \tilde{\pi}$. Puisque l'application a est invariante par les translations entières, l'application $\tilde{\pi}$ est équivariante pour l'action de \mathbb{Z}^2 par translations entières : pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{Z}^2$, on a $\tilde{\pi}(\tilde{x} + v) = \tilde{\pi}(\tilde{x}) + v$. Elle relève donc une application $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotope à l'identité (voir exercice 2.4.3), donc en particulier surjective (voir le lemme 3.4.2). Et on a bien sûr $\pi \circ f = f_A \circ \pi$ comme souhaité. \square

Le théorème 3.4.1 donne un sens précis au slogan "un automorphisme d'Anosov linéaire a la dynamique la plus simple parmi tous les homéomorphismes de sa classe d'isotopie". On peut quantifier cela de diverses manières, par exemple en termes d'entropie topologique :

Exercice 3.4.3. — Soit f_A un automorphisme d'Anosov linéaire du tore \mathbb{T}^2 , et soit f un homéomorphisme de \mathbb{T}^2 isotope à f_A . Vérifier que le théorème 3.4.1 implique que l'entropie topologique de f est supérieure à celle de f_A .

Le théorème 3.4.1 n'est pas adapté à l'étude de toutes les propriétés dynamiques. Par exemple, il ne nous dit rien sur l'existence ou non de points périodiques pour un homéomorphisme isotope à un automorphisme d'Anosov linéaire. En fait, comme le montre

l'exercice ci-dessous, un automorphisme d'Anosov linéaire a le nombre minimal de points périodiques parmi tous les homéomorphismes de leur classe d'isotopie.

Exercice 3.4.4. — Soit $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un automorphisme d'Anosov linéaire, et $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme isotope à f . On veut montrer le résultat suivant : pour tout $n > 0$, l'homéomorphisme f a au moins autant de points périodiques de période n que f_A . Cet exercice nécessite de connaître la notion d'indice d'une courbe pour un homéomorphisme du plan.

1. Soit n un entier, et $x \in \mathbb{T}^2$ un point périodique de période n de f_A . On choisit un relevé $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ de x . Vérifier qu'il existe un relevé $\tilde{f}_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de f_A tel que \tilde{f}_A^n fixe \tilde{x} .
2. Pour $r > 0$, on note \mathcal{C}_r le cercle dans \mathbb{R}^2 de centre \tilde{x} et de rayon euclidien r . En utilisant le fait que \tilde{f}_A^n contracte et dilate uniformément deux directions complémentaires, montrer que :
 - (a) $d(\tilde{f}_A^n(\tilde{z}), \tilde{z})$ croît exponentiellement quand $d(\tilde{z}, \tilde{x})$ tend vers l'infini.
 - (b) quel que soit $r > 0$, l'indice de $\text{Ind}(\tilde{f}_A^n, \mathcal{C}_r)$ vaut -1 .
3. Soit \tilde{f} le relevé de f obtenu à partir de \tilde{f}_A en relevant une isotopie de f_A à f . Montrer que la distance $d(\tilde{f}_A^n(\tilde{z}), \tilde{f}(\tilde{z}))$ reste bornée quand \tilde{z} varie dans \mathbb{R}^2 . En déduire que, si r est assez grand, alors l'indice de $\text{Ind}(\tilde{f}^n, \mathcal{C}_r)$ vaut -1 .
4. En déduire que \tilde{f}^n fixe un point dans \mathbb{R}^2 . Conclure.

CHAPITRE 4

ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

4.1. Le théorème de classification

Au chapitre précédent, nous avons divisé les classes d'isotopies d'homéomorphismes du tore \mathbb{T}^2 en trois catégories. Plus précisément, nous avons montré que tout homéomorphisme f de \mathbb{T}^2 est isotope à un difféomorphisme linéaire f_A de l'un des trois types suivants :

- périodique (il existe un entier n tel que $f_A^n = \text{Id}_{\mathbb{T}^2}$),
- réductible (f_A préserve une courbe fermée simple essentielle),
- d'Anosov (f_A préserve deux feuilletages transverses \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , la différentielle de f_0 contracte uniformément la norme des vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F}^s et dilate uniformément la norme des vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F}^u).

Le but de la théorie de Nielsen-Thurston est de généraliser cette classification à toutes les surfaces compactes ; le résultat principal est le suivant :

Théorème 4.1.1 (J. Nielsen, W. P. Thurston, 1976). — Soit S une surface compacte, éventuellement à bord. Tout homéomorphisme $f : S \rightarrow S$ est isotope à un homéomorphisme f_0 qui est soit périodique, soit réductible, soit de type pseudo-Anosov.

Définitions 4.1.2. — Un homéomorphisme f d'une surface S est dit *périodique* s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f^n = \text{Id}_S$.

Un homéomorphisme f d'une surface compacte sans bord S est dit *réductible* s'il n'est pas périodique, et s'il existe un nombre fini de courbes fermées simples essentielles C_1, \dots, C_k deux à deux non-homotopes qui sont permutées par f . Cette notion se généralise au cas où S est une surface à bord : on exige alors de plus qu'aucune des courbes C_1, \dots, C_k ne soit *périphérique*, c'est-à-dire homotope à une composante de bord de S .

La notion d'homéomorphisme pseudo-Anosov est une généralisation de naturelle de la notion de difféomorphisme d'Anosov linéaire du tore. Très grossièrement, on peut dire qu'un homéomorphisme pseudo-Anosov est un difféomorphisme d'Anosov linéaire où on autorise les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u à avoir des singularités. Pour être plus précis, il nous faut définir une notion appropriée de *feuilletage singulier mesuré*.

Définitions 4.1.3. — Soit S une surface. Pour nous, un *feuilletage singulier* de S sera une partition de S en sous-ensembles qu'on appelle des *feuilles* avec les propriétés suivantes. Il existe un ensemble fini $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset S$ tel que :

- tout point x de $S \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ admet un voisinage U et une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui envoie $\mathcal{F} \cap U$ sur la partition de $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$ en segments horizontaux ;

- tout x dans Σ admet un voisinage U et une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui envoie $\mathcal{F} \cap U$ sur une singularité à k branches pour un certain $k \geq 3$ (voir figure 1).

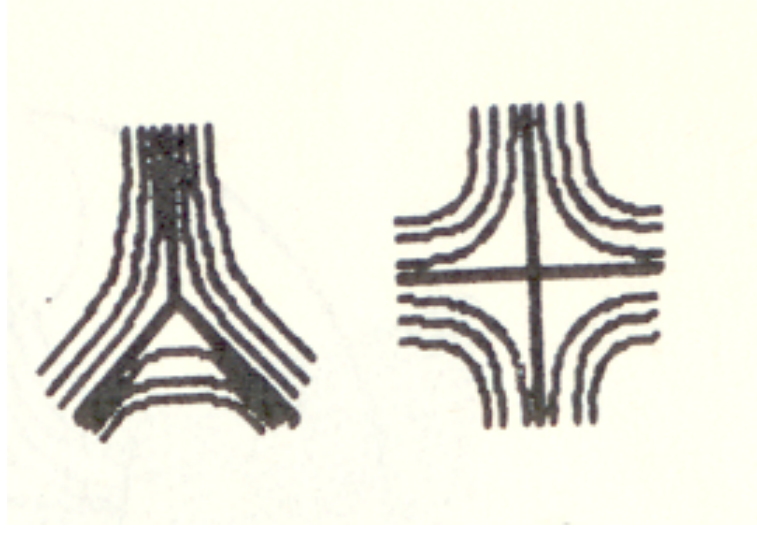


FIGURE 1. Une singularité à 3 branches (à gauche), et une à 4 branches (à droite).

Deux feuilletages singuliers \mathcal{F} et \mathcal{F}' de S sont dits *transverses*, s'ils ont le même ensemble singulier Σ , si les feuilletages sont transverses au sens usuel sur $S \setminus \Sigma$, et si au voisinage d'un point de Σ , la situation est homéomorphe au modèle standard (représenté sur la figure 2 dans le cas d'une singularité à 4 branches).

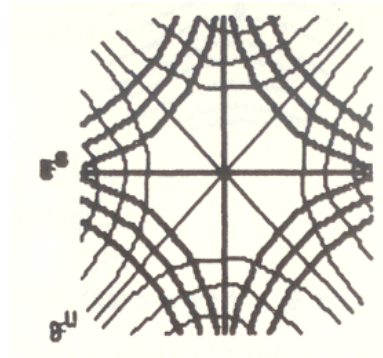


FIGURE 2. . Modèle des feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u au voisinage d'une singularité à 4 branches.

Définition 4.1.4. — Soit \mathcal{F} un feuilletage singulier sur une surface S . Une *mesure transverse* μ à \mathcal{F} est une application qui à chaque segment α transverse à \mathcal{F} associe une mesure borélienne $\mu|_\alpha$ avec les propriétés suivantes :

- si β est un sous-arc de α , alors $\mu|_\beta$ est la restriction de $\mu|_\alpha$,
- si $\alpha_0, \alpha_1 : I \rightarrow S$ sont deux arcs transverses, homotopes le long des feuilles de \mathcal{F} (figure 3), alors $\mu|_{\alpha_1}$ est obtenu en poussant $\mu|_{\alpha_0}$ le long de cette homotopie.

Nous sommes maintenant en mesure de définir formellement une notion d'homéomorphisme pseudo-Ansov :

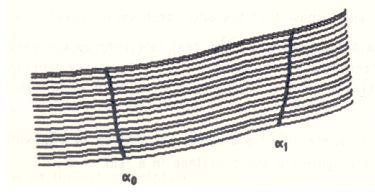


FIGURE 3. Deux arcs α_0, α_1 , transverses au feuilletage \mathcal{F} , et homotopes le long des feuilles de \mathcal{F} .

Définition 4.1.5. — Un homéomorphisme f d’une surface compacte sans bord S est dit *pseudo-Anosov* s’il existe deux feuilletages transverses mesurés (\mathcal{F}^s, μ^s) et (\mathcal{F}^u, μ^u) tels que f préserve les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , et contracte μ^s et dilate μ^u (i.e. il existe une constante λ avec $0 < \lambda < 1$ telle que $f_*\mu^s = \lambda.\mu^s$ et $f_*\mu^u = \lambda^{-1}.\mu^u$).

Cette définition s’étend au cas où S est une surface compacte à bord. Dans ce cas, on demande à chaque composante de bord de S d’être à la fois une union de feuille de \mathcal{F}^s et une union de feuille de \mathcal{F}^u (les singularités sont des feuilles), et de contenir au moins une singularité de \mathcal{F}^s et une singularité de \mathcal{F}^u .

Remarque 4.1.6. — L’utilisation de mesures transverses rend la définition ci-dessus difficile à appréhender. Notons cependant que la condition portant sur l’action de f sur les mesures transverses μ^s et μ^u exprime bien le fait que “ f contracte (resp. dilate) uniformément dans la direction des feuilles de \mathcal{F}^s (resp. \mathcal{F}^u)”. En effet, on peut montrer que cette condition implique l’existence d’une métrique riemannienne sur S singulière seulement aux points de $\text{Sing}(\mathcal{F}^s) = \text{Sing}(\mathcal{F}^u)$ telle que, pour tout segment I dans une feuille de \mathcal{F}^s (resp. de \mathcal{F}^u), on ait $\text{longueur}(f(I)) \leq \lambda.\text{longueur}(I)$ (resp. $\text{longueur}(f(I)) \geq \lambda^{-1}.\text{longueur}(I)$).

Exemples. — Tout difféomorphisme d’Anosov du tore \mathbb{T}^2 est bien sûr un homéomorphisme pseudo-Anosov (vérifier).

Si on sait ce qu’est un *revêtement ramifié*, on a un moyen simple de construire des exemples d’homéomorphismes pseudo-Anosov. Considérons en effet un automorphisme d’Anosov $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ et un revêtement ramifié $p : S \rightarrow \mathbb{T}^2$ dont les points de ramification sont des points fixes de f . Alors f se relève en un homéomorphisme $\hat{f} : S \rightarrow S$, et les feuilletages invariants \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u de f se relèvent en des feuilletages $\hat{\mathcal{F}}^s$ et $\hat{\mathcal{F}}^u$ qui ont des singularités aux points de ramifications. Alors \hat{f} est un homéomorphisme pseudo-Anosov de S de feuilletages invariants $\hat{\mathcal{F}}^s$ et $\hat{\mathcal{F}}^u$.

Il est encore plus facile de construire des exemples d’homéomorphismes pseudo-Anosov sur le tore privé d’un certain nombre de disques. Considérons par exemple un automorphisme d’Anosov linéaire $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. En éclatant un point fixe de f , on obtient un homéomorphisme \hat{f} sur le tore privé d’un disque ; il est très facile de voir que \hat{f} est un homéomorphisme pseudo-Anosov (toutes les singularités des feuilletages sont situées sur le cercle bord).

Exercice 4.1.7. — Soit S est une surface compacte, $f_0 : S \rightarrow S$ est un homéomorphisme pseudo-Anosov. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, l’homéomorphisme f_0^n ne préserve aucune courbe fermée essentielle sur S (sauf les composantes du bord de S , si celui-ci n’est pas vide). Par suite, un homéomorphisme pseudo-Anosov n’est ni périodique, ni réductible.

Remarque 4.1.8. — En fait, on verra plus tard que l’énoncé de l’exercice ci-dessus reste correct si on remplace l’homéomorphisme pseudo-Anosov f_0 par un homéomorphisme

f isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov. Par conséquent, les trois cas du théorème 4.1.1 sont mutuellement exclusifs.

Remarque 4.1.9. — Le théorème 4.1.1 peut être utilisé de manière récursive de la manière suivante. On considère un homéomorphisme f d'une surface compacte S . Le théorème 4.1.1 nous dit que f est isotope à un homéomorphisme modèle f_0 qui est soit périodique, soit réductible, soit pseudo-Anosov. Supposons que f_0 soit pseudo-Anosov. Alors f_0 permute un ensemble fini de courbes fermées simples C_1, \dots, C_k . Découpons la surface S le long de ces courbes; on obtient une nouvelle surface S' (à bord, non-nécessairement connexe), et un homéomorphisme $f' : S' \rightarrow S'$ induit par f_0 . On peut alors ré-appliquer le théorème 4.1.1 à l'homéomorphisme f' , et obtenir un nouveau homéomorphisme modèle $f'_0 : S' \rightarrow S'$. Si f'_0 est réductible, on recommence l'opération. Et ainsi de suite. Le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étape car le genre des composantes connexes de la surface diminue à chaque étape. On peut ainsi, en quelque sorte, "casser la classe d'isotopie de f en morceaux qui sont soit périodiques, soit pseudo-Anosov".

Le théorème 4.1.1 implique immédiatement l'énoncé suivant :

Corollaire 4.1.10. — *Soit f un homéomorphisme d'une surface S compacte à bord. On suppose que pour toute courbe fermée γ essentielle non-périphérique, et pour tout entier $n \neq 0$, la courbe $f^n(\gamma)$ n'est pas homotope à γ . Alors f est isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov.*

Les deux exercices montrent comment construire des exemples d'homéomorphismes qui satisfont l'hypothèse du corollaire 4.1.10. Ces exercices sont extraits du livre de Casson et Bleiler ([1, pages 75 à 79]).

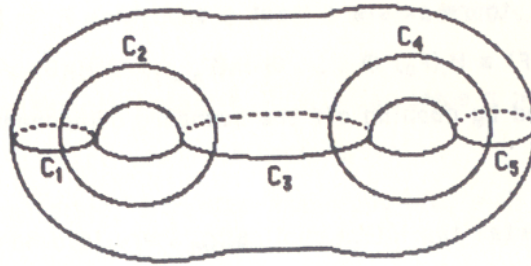
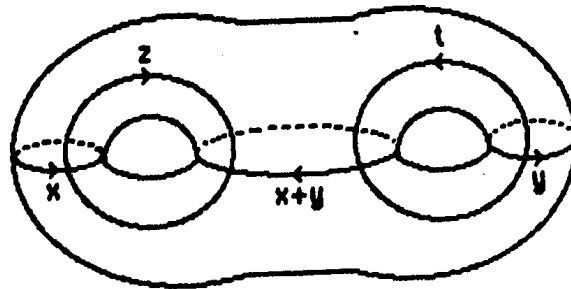
Exercice 4.1.11. — On considère une surface compacte sans bord S , et un homéomorphisme $f : S \rightarrow S$. On note f_* l'action de f sur le groupe d'homologie $H_1(S, \mathbb{Z})$, et P_f le polynôme caractéristique de f_* . On suppose qu'il existe une courbe fermée simple essentielle C et un entier n tel que les courbes $f^n(C)$ et C sont homotopes. Pour tout i , on note $C_i := f^i(C)$.

1. Supposons tout d'abord que l'une des courbes C_0, \dots, C_{n-1} n'est pas homologuée à 0. Montrer dans ce cas que P_f s'annule en une racine de l'unité.
2. Supposons maintenant que toutes les courbes C_0, \dots, C_{n-1} sont homologues à 0. Montrer que dans ce cas, soit P_f est réductible sur \mathbb{Z} , soit P_f est un polynôme en X^n pour un certain $n > 1$.

Aide. On considérera la surface à bord $F_0 \subset S$ bordée par C_0 (on notera que F_0 n'est pas un disque). La courbe C_i bordera alors la surface à bord $F_i = f(F_0)$, et on notera G l'adhérence dans S de $S \setminus (F_0 \cup \dots \cup F_{n-1})$. On écrira alors la matrice de f_* dans une base constituée en concaténant une base de l'homologie de F_0 , les images successives de cette base par f, f^2, \dots, f^{n-1} , et une base de l'homologie de G .

Exercice 4.1.12. — Soit maintenant S_2 le tore à 2 trous (la surface compacte sans bord de genre 2), et C_1, \dots, C_5 les courbes fermées simples orientées sur S représentées sur la figure 4. Pour $i = 1 \dots 5$, notons T_i le twist de Dehn d'ordre 1 autour de la courbe C_i (voir encadré ci-dessous).

1. Pour chaque i , calculer la matrice de l'endomorphisme $(T_i)_* : H_1(S_2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_2, \mathbb{Z})$ dans la base (x, y, z, t) de $H_1(S_2, \mathbb{Z})$ représentée sur la figure 5.

FIGURE 4. Les courbes C_1, \dots, C_5 autour desquels on effectue un twist de Dehn.FIGURE 5. Une base (x, y, z, t) de l'homologie de la surface S_2 .

2. Pour chaque i , calculer le polynôme caractéristique de $(T_i)_*$. Puis, calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $(T_1.T_3.T_5^2.T_2^{-1}.T_4^{-1})_* = (T_1)_*.(T_3)_*.(T_5)_*^2.(T_2)_*^{-1}.(T_4)_*^{-1}$ (ne pas hésiter à utiliser un logiciel de calcul formel).
3. En utilisant l'exercice précédent, en déduire que l'homéomorphisme $T_1.T_3.T_5^2.T_2^{-1}.T_4^{-1}$ satisfait l'hypothèse du corollaire 4.1.10.

Twists de Dehn. — Nous avons précédemment défini ce qu'est un *twist de Dehn* sur le tore \mathbb{T}^2 (Cf exercice 2.3.1). En fait, cette notion se généralise à toute surface. Soit S une surface compacte, et C une courbe fermée simple essentielle orientée sur S . On considère un voisinage A de la courbe C dans S , tel que A est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. On choisit des coordonnées $(\theta, s) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ sur A telle que C soit la courbe d'équation $s = \frac{1}{2}$, et tel que θ soit croissant lorsqu'on parcourt s dans le sens de son orientation. Soit $T : S \rightarrow S$ l'homéomorphisme qui coïncide avec l'identité sur $S \setminus A$ et est défini par la formule $(\theta, s) \mapsto (\theta + n.s, s)$ sur A . Cet homéomorphisme s'appelle le *twist de Dehn* d'ordre n autour la courbe C . À isotopie près, il ne dépend pas du choix du voisinage A et des coordonnées (θ, s) .

4.2. Dynamique d'un homéomorphisme isotope à un pseudo-Anosov

Le théorème 4.1.1 montre que chaque homéomorphisme f d'une surface S est isotope à un homéomorphisme modèle f_0 qui est périodique, réductible ou pseudo-Anosov. C'est dans le cas où f_0 est de type pseudo-Anosov que le théorie prend tout son intérêt d'un

point de vue dynamique. En effet, nous allons voir que les résultats des sections 3.3 et 3.4 se généralisent aux homéomorphismes pseudo-Anosov :

Proposition 4.2.1. — *Si f_0 est homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface compacte S , alors :*

- les orbites périodiques de f_0 sont denses dans S ,
- il existe une intersection d'ouverts denses de points $x \in S$ tels que l'orbite de x par f_0 est dense dans S ,
- l'entropie topologique de f_0 est strictement positive.

Proposition 4.2.2. — *Soit $f : S \rightarrow S$ est un homéomorphisme d'une surface compacte S , isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov $f_0 : S \rightarrow S$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'homéomorphisme f possède au moins autant d'orbite périodiques de période primitive égale à n que f_0 .*

Théorème 4.2.3 (M. Handel, 1985). — *Soit $f : S \rightarrow S$ est un homéomorphisme d'une surface compacte S , isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov $f_0 : S \rightarrow S$. Alors il existe un ensemble fermé $X \subset S$ et une application continue surjective $\pi : X \rightarrow S$ tel que $\pi \circ f = f_0 \circ \pi$.*

Remarque 4.2.4. — Ce résultat est un peu moins fort que le résultat analogue dans le cas des automorphismes d'Anosov du tore \mathbb{T}^2 (théorème 3.4.1). En effet, dans le cas des pseudo-Anosov, l'application π est en général pas définie sur un sous-ensemble strict de la surface S . Il n'empêche : si f est isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov f_0 , alors la dynamique de f “se projette surjectivement” sur celle de f_0 .

En mettant bout-à-bout le corollaire 4.1.10, la proposition 4.2.1, la proposition 4.2.2 et le théorème 4.2.3, on obtient le résultat déjà énoncé dans l'introduction :

Corollaire 4.2.5. — *Soit f un homéomorphisme d'une surface compacte S . On suppose que pour toute courbe fermée γ essentielle non-périphérique et tout entier $n \neq 0$, la courbe $f^n(\gamma)$ n'est pas homotope à γ . Alors l'entropie topologique de f est strictement positive.*

4.3. Stratégie de la preuve du théorème de classification

Les quatre prochains chapitres vont être consacrés à la preuve du théorème 4.1.1 ; nous allons essayer d'expliquer en quelques lignes les grandes lignes de cette preuve.

Soit S une surface compacte et $f : S \rightarrow S$ un homéomorphisme. Commençons par remarquer que le théorème 4.1.1 est trivial si la surface S est la sphère \mathbb{S}^2 ou l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$: en effet, tout homéomorphisme préservant l'orientation de \mathbb{S}^2 est isotope à $\text{Id}_{\mathbb{S}^2}$, et tout homéomorphisme préservant l'orientation de \mathbb{A} est isotope à $\text{Id}_{\mathbb{A}}$ ou $-\text{Id}_{\mathbb{A}}$. Dans le cas où la surface S est le tore \mathbb{T}^2 , le théorème 4.1.1 résulte des sections 3.1 et 3.2. Ainsi, pour ce qui est de la preuve du théorème 4.1.1, nous pourrons dorénavant faire l'hypothèse que la caractéristique d'Euler de la surface S est strictement négative.

Cette hypothèse joue un rôle fondamental dans la preuve. En effet, elle nous permet de munir S d'une métrique riemannienne à courbure -1 et d'identifier le revêtement universel de S au disque de Poincaré \mathbb{H} (voir section 2.5). Ce choix de métrique nous permet de parler de la distance, de la forme d'aire et des géodésiques de la surface S .

Montrer le théorème 4.1.1 revient à supposer que f ne préserve pas un ensemble fini de courbes (même à isotopie près), et à montrer que, dans ce cas, f préserve (à isotopie près) un objet un peu plus compliqué : une paire de feuilletages singuliers transverses. En fait, on ne construira pas directement un homéomorphisme isotope à f qui préserve deux feuilletages singuliers transverses. On commencera par construire un homéomorphisme isotope à f qui préserve deux *lamination géodésiques* transverses.

Définition 4.3.1. — Une *lamination géodésique* de S est une union de géodésiques⁽¹⁾ simples deux à deux disjointes.

L'homéomorphisme f n'envoie pas géodésique sur géodésique ; l'image par f d'une lamination géodésique n'est donc pas une lamination géodésique en général. Au chapitre 5, on définira cependant une action f_* de f sur l'ensemble $\Lambda(S)$ des laminations géodésiques de S . Un point important est que cette action f_* ne dépend que de la classe d'isotopie de f : si g est un homéomorphisme isotope à f , alors $f_* = g_*$. Au chapitre 6, on montrera que l'ensemble $\Lambda(S)$ des laminations géodésiques de S , muni de la topologie de Hausdorff est compact. Au chapitre 7, on en déduira que f_* fixe toujours un point de $\Lambda(S)$. Avec un peu plus de travail, on montrera que, soit f est isotope à un homéomorphisme qui fixe une union finie de géodésiques fermées simples (autrement dit un homéomorphisme périodique ou réductible), soit f est isotope à un homéomorphisme qui préserve deux laminations géodésiques transverses avec une propriété “contraction dans la direction d'une des laminations, dilatation dans la direction de l'autre”.

Supposons maintenant que f préserve deux laminations géodésiques transverses avec une propriété “contraction dans la direction d'une des laminations, dilatation dans la direction de l'autre”. Il nous restera à montrer, au chapitre ??, qu'en “écrasant le complémentaire de ces laminations, on obtient deux feuilletages singuliers transverses préservés par f et deux mesures transverses à ces feuilletages, l'une dilatée, l'autre contractée par f .”

⁽¹⁾Il s'agit bien sûr de géodésiques pour la métrique à courbure -1 qu'on a choisit sur S

CHAPITRE 5

ACTION D'UN HOMÉOMORPHISME DE SURFACE SUR LES GÉODÉSIIQUES

Dans ce chapitre, on considère une surface compacte sans bord⁽¹⁾ de caractéristique d'Euler strictement négative S . Le but du chapitre est de définir, pour tout homéomorphisme $f : S \rightarrow S$ une action de f sur les géodésiques de S .

On rappelle que le revêtement universel de S est homéomorphe au disque de Poincaré \mathbb{H} , et qu'on peut voir les automorphismes de revêtements comme des isométries de \mathbb{H} (voir section 2.5). On fixe une application de revêtement $p : \mathbb{H} \rightarrow S$ telle que les automorphismes de revêtements comme des isométries de \mathbb{H} . On voit \mathbb{H} comme le disque unité ouvert de \mathbb{R}^2 , et on note \mathbb{S}_∞ le cercle bord de \mathbb{H} dans \mathbb{R}^2 . Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{H}$, on note \overline{E} l'adhérence de E dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$. On rappelle que les automorphismes du revêtement $p : \mathbb{H} \rightarrow S$ sont tous des isométries de type *hyperbolique*. Ainsi, tout automorphisme de revêtement $\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ fixe deux points $\sigma^-, \sigma^+ \in \mathbb{S}_\infty$ et la géodésique de \mathbb{H} qui joint ces deux points. De plus, pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{H}$, le point $\sigma^n(\tilde{x})$ tend vers σ^- quand $n \rightarrow -\infty$ et vers σ^+ quand $n \rightarrow +\infty$. Puisque les automorphismes de revêtements sont des isométries, la métrique hyperbolique de \mathbb{H} induit une métrique (également dite hyperbolique) sur la surface S . Cette métrique est par définition localement isométrique à la métrique de \mathbb{H} .

5.1. Courbes fermées essentielles et géodésiques sur un surface hyperbolique

Avant de pouvoir définir l'action d'un difféomorphisme de S sur les géodésiques, il nous faut tout d'abord glaner quelques informations concernant les géodésiques de S , et plus généralement les courbes fermées essentielles. Le résultat principal sera que toute courbe fermée essentielle sur S est homotope à une unique géodésique fermée (proposition 5.1.4).

La notation \mathbb{S}^1 désigne le cercle vu comme \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Pour $s \in \mathbb{R}$, on note \bar{s} la projection de s dans le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ainsi, si $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ est un relevé d'une courbe fermée $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on aura $p(\tilde{\alpha}(s)) = p(\tilde{\alpha}(s+n)) = \alpha(\bar{s})$.

Lemme 5.1.1. — *Si $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ est un relevé d'une courbe fermée essentielle $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$, alors $\tilde{\alpha}(s)$ converge vers deux points du cercle \mathbb{S}_∞ respectivement lorsque $s \rightarrow -\infty$ et lorsque $s \rightarrow +\infty$.*

⁽¹⁾Cette hypothèse ne sert qu'à simplifier les énoncés ; tous les résultats du chapitre se généralisent au cas où S est une surface compacte à bord.

On parlera naturellement des *extrémités* de la courbe $\tilde{\alpha}$ pour désigner les deux points du cercle \mathbb{S}_∞ vers lesquels converge $\tilde{\alpha}(s)$ lorsque $s \rightarrow \pm\infty$.

Démonstration du lemme 5.1.1. — Les points $\tilde{\alpha}(0)$ et $\tilde{\alpha}(1)$ sont des relevés d'un même point de S . Il existe donc un (unique) automorphisme de revêtement σ tel que $\sigma(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\alpha}(1)$. La courbe $\tilde{\alpha}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ définie par $\tilde{\alpha}'(t+n) = \sigma^n(\tilde{\alpha}(t))$ pour tout $t \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ est un relevé de α qui satisfait $\tilde{\alpha}'(0) = \tilde{\alpha}(0)$; par unicité du relevé, on a donc $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}$. Autrement dit, on a $\tilde{\alpha}([n, n+1]) = \sigma^n(\tilde{\alpha}([0, 1]))$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

L'automorphisme σ est hyperbolique; notons $\sigma^-, \sigma^+ \in \mathbb{S}_\infty$ ses points fixes (respectivement répulsif et attractif). Alors le point $\sigma^n(\tilde{x})$ tend vers σ^- quand $n \rightarrow -\infty$ et vers σ^+ quand $n \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'arc $[\tilde{\alpha}(n), \tilde{\alpha}(n+1)]_{\tilde{\alpha}}$ est contenue dans une boule hyperbolique de rayon R centrée au point $\tilde{\alpha}(n)$ (puisque le diamètre de l'arc $[\tilde{\alpha}(n), \tilde{\alpha}(n+1)]_{\tilde{\alpha}} = \sigma^n([\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(1)]_{\tilde{\alpha}})$ est indépendante de n). Comme le rayon euclidien d'une boule de rayon hyperbolique R tend vers 0 lorsque le centre de cette boule sort de tout compact de \mathbb{H} , il en résulte que le point $\tilde{\alpha}(s)$ tend vers σ^- lorsque $s \rightarrow -\infty$ et vers σ^+ lorsque $s \rightarrow +\infty$. \square

Lemme 5.1.2. — Soient $\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ deux courbes fermées essentielles, homotopes l'une à l'autre, et $\tilde{\alpha}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ un relevé de la courbe α_0 . Alors il existe un relevé $\tilde{\alpha}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ de la courbe α_1 qui reste à distance bornée de $\tilde{\alpha}_0$. En particulier, $\tilde{\alpha}_1$ a les deux mêmes extrémités que $\tilde{\alpha}_0$.

Démonstration. — Par hypothèse, il existe une homotopie $\alpha : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ entre α_0 et α_1 . On peut alors relever cette homotopie en une homotopie $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ avec $\tilde{\alpha}(0, \cdot) = \tilde{\alpha}_0$. Notons $\tilde{\alpha}_1 := \tilde{\alpha}(1, \cdot)$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, le chemin $\tilde{\alpha}(\{s\} \times [0, 1])$ relève le chemin $\alpha(p(s) \times [0, 1])$, où p est la projection de \mathbb{R} sur $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Puisque \mathbb{S}^1 est compact, on en déduit donc que le diamètre (pour la métrique hyperbolique de \mathbb{H}) du chemin $\tilde{\alpha}(\{s\} \times [0, 1])$ est bornée indépendamment de s . Par conséquent, la distance entre les points $\tilde{\alpha}_0(s)$ et $\tilde{\alpha}_1(s)$ reste bornée quand s parcourt \mathbb{R} . Comme les points $\tilde{\alpha}_0(s)$ et $\tilde{\alpha}_1(s)$ sortent de tout compact de \mathbb{H} quand $s \rightarrow \pm\infty$ (d'après le lemme 5.1.1), il en résulte que la distance euclidienne entre les points $\tilde{\alpha}_0(s)$ et $\tilde{\alpha}_1(s)$ tend vers 0 lorsque $s \rightarrow \pm\infty$. Par conséquent les courbes $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ ont les deux mêmes extrémités. \square

Remarque 5.1.3. — Rappelons que, si $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ est un relevé d'une courbe $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$, alors tout autre relevé de α s'obtient en composant $\tilde{\alpha}$ par un automorphisme de revêtement. Comme les automorphismes de revêtement sont des isométries de \mathbb{H} , on peut déduire du lemme 5.1.2 l'énoncé légèrement plus fort suivant :

Si $\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ deux courbes fermées essentielles homotopes, alors il existe une constante C tel que, pour tout relevé $\tilde{\alpha}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ de α_0 , il existe un relevé $\tilde{\alpha}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ de α_1 qui reste à distance inférieure à C de $\tilde{\alpha}_0$.

Autrement dit, dans le lemme 5.1.2, la distance entre les courbes $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ ne dépend que des courbes α_0 et α_1 , mais pas du choix du relevé $\tilde{\alpha}_0$.

Proposition 5.1.4. — Toute courbe fermée essentielle dans S est homotope à une unique géodésique fermée.

Démonstration. — On considère une courbe fermée essentielle $\alpha_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$. On va montrer qu'il existe une unique géodésique fermée α_1 de S homotope à α_0 .

Soit $\tilde{\alpha}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ un relevé de α_0 . Les points $\tilde{\alpha}_0(0)$ et $\tilde{\alpha}_0(1)$ sont deux relevés du point $\alpha_0(\bar{0})$ (où on note $\bar{0}$ l'image commune des réels 0 et 1 dans $\mathbb{S}_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Il existe donc un automorphisme σ du revêtement $p : \mathbb{H} \rightarrow S$ qui laisse $\tilde{\alpha}_0$ invariante et tel que $\sigma(\tilde{\alpha}_0(0)) = \sigma(\tilde{\alpha}_0(1))$. On considère l'axe de l'automorphisme de revêtement σ ; c'est une géodésique de \mathbb{H} que l'on note $\tilde{\alpha}_1$, et que l'on paramètre de manière à ce que $\tilde{\alpha}_1(s+1) = \sigma(\tilde{\alpha}_1(s))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On note $\alpha_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ la projection de $\tilde{\alpha}_1$ dans \mathbb{S} . On va montrer que la géodésique α_1 est homotope à α_0 .

Pour ce faire, on un chemin quelconque $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ joignant le point $\tilde{\alpha}_0(0)$ au point $\tilde{\alpha}_1(0)$. Alors le chemin $\sigma(\tilde{\beta})$ joint les points $\tilde{\alpha}_0(1)$ au point $\tilde{\alpha}_1(1)$. On considère le lacet obtenu en concaténant le chemin $\tilde{\beta}$, le chemin $\tilde{\alpha}_1([0, 1])$, le chemin $\sigma \circ \tilde{\beta}$ parcouru à l'envers, et le chemin $\tilde{\alpha}_0([0, 1])$ parcouru à l'envers. Ce lacet est contractile dans \mathbb{H} , on donc trouver une application continue $\tilde{\alpha} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ telle que :

1. $\tilde{\alpha}([0, 1] \times \{0\}) = \tilde{\alpha}_0|_{[0,1]}$ et $\tilde{\alpha}([0, 1] \times \{1\}) = \tilde{\alpha}_1|_{[0,1]}$,
2. $\tilde{\alpha}(\{0\} \times [0, 1]) = \tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}(\{1\} \times [0, 1]) = \sigma \circ \tilde{\beta}$.

Puisque σ est un automorphisme de revêtement, les chemins β_0 et $\sigma \circ \beta_0$ ont la même projection dans S . Il s'en suit que l'application $\tilde{\alpha} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ induit une application continue $\alpha : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow S$, que l'on peut voir comme une homotopie joignant les courbes α_0 et α_1 . Ceci termine la partie "existence" de la preuve.

L'unicité de la géodésique α_1 découle immédiatement du lemme 5.1.2. En effet, considérons une deuxième géodésique fermée α'_1 de S homotope à α_0 . Alors les géodésiques α_1 et α'_1 sont homotopes. Le lemme 5.1.2 nous fournit donc deux relevés $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}'_1$ de α_1 et α'_1 qui ont les mêmes extrémités dans \mathbb{S}_∞ . Mais une géodésique de \mathbb{H} est entièrement caractérisée par ses deux extrémités; donc $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}'_1$. Et par suite, $\alpha_1 = \alpha'_1$. \square

Addendum 5.1.5. — *Si α_0 est une courbe fermée essentielle simple sur S , alors l'unique géodésique fermée α_1 homotope à α_0 est également simple.*

Remarque 5.1.6. — En fait, on peut montrer un résultat beaucoup plus général : le nombre de points d'auto-intersections d'une géodésique fermée α_1 de S est minimal parmi les nombres de points d'auto-intersections des courbes fermées homotopes à α_1 .

La preuve de l'addendum 5.1.5 repose sur le lemme 5.1.2 et sur le lemme facile suivant :

Lemme 5.1.7. — *Soit $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée essentielle sur la surface S . On dira que deux relevés $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ de α sont équivalents s'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\alpha}'(s) = \tilde{\alpha}(s+n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

1. *Si α est une courbe simple (i.e. injective), alors deux relevés s'intersectent seulement s'ils sont équivalents.*
2. *Si α est une géodésique, alors la réciproque est vraie : si α n'est pas injective, alors elle possède deux relevés non-équivalents qui s'intersectent.*

Démonstration. — Supposons que α est simple, et qu'il existe deux relevés $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ de α qui s'intersectent. Alors il existe des réels s_1 et s_2 tels que $\tilde{\alpha}_1(s_1) = \tilde{\alpha}_2(s_2)$. On a alors bien sûr $\alpha(\bar{s}_1) = \alpha(\bar{s}_2)$. Comme α est simple, ceci implique $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$, et donc $s_1 - s_2 = n \in \mathbb{Z}$. Considérons alors $\hat{\alpha}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ défini par $\hat{\alpha}_2(s) = \tilde{\alpha}_2(s + (s_1 - s_2))$. Alors $\tilde{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ sont deux relevés de α , qui coïncident en $s = s_2$. Par unicité du relevé, on a donc $\hat{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_1$. Par suite, les courbes de $\tilde{\alpha}_1(\mathbb{R})$ et $\tilde{\alpha}_2(\mathbb{R})$ sont confondues.

Réciproquement, supposons que α est une géodésique fermée sur S , qui n'est pas simple. Soit $x \in S$ un point d'auto-intersection de α : il existe deux temps $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$ tels que $\alpha(\bar{s}_1) = \alpha(\bar{s}_2) = x$. Soit $\tilde{\alpha}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ un relevé de α . Soient s_1 et s_2 deux réels se projetant sur \bar{s}_1 et \bar{s}_2 dans \mathbb{S}^1 . Alors $p(\tilde{\alpha}_1(s_1)) = x = \alpha(\bar{s}_2)$. Donc il existe un relevé $\tilde{\alpha}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ tel que $\tilde{\alpha}_2(s_2) = \tilde{\alpha}_1(s_1)$. Les relevés $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_1$ ne sont pas équivalents car $\tilde{\alpha}_1$ est une géodésique de \mathbb{H} donc est injective, et $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$ donc $s_2 - s_1 \notin \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ sont deux relevés non-équivalents de α qui s'intersectent. \square

Démonstration de l'addendum 5.1.5. — Soit α_0 une courbe fermée essentielle sur S , et α_1 l'unique géodésique homotope à α_0 . Supposons que la géodésique α_1 n'est pas simple. Alors il existe deux relevés distincts $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}'_1$ de α_1 qui s'intersectent (lemme 5.1.7). Comme $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}'_1$ sont deux géodésiques de \mathbb{H} , il en résultent que les extrémités de $\tilde{\alpha}_1$ séparent celles de $\tilde{\alpha}'_1$ dans le cercle \mathbb{S}_∞ . Puisque α_1 est homotope à α_0 , le lemme 5.1.2 nous fournit des relevés $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}'_0$ de α_0 ayant les mêmes extrémités respectivement que $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}'_1$. Par conséquent, les extrémités de $\tilde{\alpha}_0$ séparent celles de $\tilde{\alpha}'_0$ dans le cercle \mathbb{S}_∞ . Donc $\tilde{\alpha}_0$ intersecte $\tilde{\alpha}'_0$. On a ainsi trouvé deux relevés distincts de α_0 qui s'intersectent. Il en résulte que α_0 n'est pas une courbe simple (lemme 5.1.7). \square

Le lemme 5.1.2 affirme que certains relevés de courbes fermées essentielles sont “proches les uns autres”. Réciproquement, voici un lemme qui affirme que certains relevés de courbes fermées essentielles de S sont “éloignés les uns des autres” :

Lemme 5.1.8. — *Soit α une courbe fermée simple essentielle dans S . Alors il existe un réel $C > 0$ tel que, la distance hyperbolique dans \mathbb{H} entre deux relevés quelconques $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'$ de γ est minorée par C .*

Démonstration. — Supposons le contraire. Alors on peut trouver une suite $\tilde{\alpha}_i$ de relevés deux à deux distincts de α tels que la distance (pour la métrique hyperbolique de \mathbb{H}) entre $\tilde{\alpha}_i$ et $\tilde{\alpha}_{i+1}$ tend vers 0 quand $i \rightarrow \infty$. Pour chaque i , notons $\tilde{\beta}_i$ un chemin dans \mathbb{H} joignant $\tilde{\alpha}_i$ à $\tilde{\alpha}_{i+1}$, et tel que la longueur de $\tilde{\beta}_i$ tend vers 0 lorsque $i \rightarrow \infty$. Notons β_i le projeté de $\tilde{\beta}_i$; c'est un chemin qui va de la courbe α à elle-même. Notons $x_i, y_i \in \alpha$ les extrémités de β_i . En ajoutant au chemin β_i le plus court des deux arcs de α qui joint x_i à y_i on obtient une courbe fermée dans S , que l'on notera γ_i . Lorsque $i \rightarrow \infty$, la longueur de l'arc β_i tend vers 0, donc la distance entre les points x_i et y_i tend aussi vers 0, donc la longueur du plus court des deux arcs de α joignant x_i à y_i tend aussi vers 0, et finalement, la longueur de la courbe γ_i tend vers 0. Mais puisque $\tilde{\beta}_i$ joint deux relevés distincts des α , la courbe γ_i n'est pas homotope à 0. Il en résulte que la longueur de la courbe γ_i est donc minorée indépendamment de i (la longueur des courbes fermées essentielles dans une surface compacte est minorée, car la surface est recouverte par un nombre fini d'ouverts homéomorphes à des ouverts de \mathbb{R}^2). D'où la contradiction recherchée. \square

Exercice 5.1.9. — Le but de cet exercice est d'essayer d'acquérir une intuition sur l'ensemble de tous les relevés d'un point ou d'une géodésique de S .

1. Soit x un point de S , et \tilde{X} l'ensemble de ses relevés au revêtement universel \mathbb{H} . Montrer que \tilde{X} est dense dans le cercle \mathbb{S}_∞ .

Indication : utiliser un domaine fondamental Δ du revêtement $p : \mathbb{H} \rightarrow S$, et la comparaison qualitative entre métrique hyperbolique et métrique euclidienne près du bord à l'infini : si (x_n) et (y_n) sont deux suites dans \mathbb{H} qui tendent vers deux points distincts de \mathbb{S}_∞ , alors la distance hyperbolique entre x_n et y_n tend vers $+\infty$.

2. Soit y un autre point de S ; on considère tous les segments géodésiques allant de x à y . À chaque segment correspond une direction au point x . Montrer qu'on obtient ainsi un ensemble de directions qui est dense dans l'ensemble des directions au point x .⁽²⁾
Indication : l'ensemble des directions au point x est la fibre du fibré unitaire tangent en x ; montrer qu'en choisissant un relevé de x , on peut l'identifier à \mathbb{S}_∞ .
3. Soit α une géodésique de S , et \mathcal{A} l'ensemble de ses relevés. Montrer que l'ensemble des extrémités des éléments de \mathcal{A} est dense dans \mathbb{S}_∞ . L'ensemble des couples d'extrémités est-il dense dans l'ensemble des couples de \mathbb{S}_∞ ?

5.2. Action d'un homéomorphisme de surface sur les géodésiques

On considère un homéomorphisme f de la surface compacte S . Nous allons montrer que tout relevé \tilde{f} de f s'étend en un homéomorphisme du disque fermé $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$. On en déduira une action de f sur les géodésiques de S .

Théorème 5.2.1. — *Tout relevé $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ de f s'étend en un homéomorphisme (que l'on notera encore \tilde{f}) du disque fermé $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$.*

La preuve du théorème 5.2.1 repose sur l'existence d'une base de voisinages "sympathiques" pour chaque point $x \in \mathbb{S}_\infty$:

Lemme 5.2.2. — *On se place sous les hypothèses du théorème 5.2.1, et on considère un point $x \in \mathbb{S}_\infty$. Alors il existe une géodésique fermée simple essentielle α dans S , et une suite de relevés $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots$ de α tels que les deux extrémités de $\tilde{\alpha}_i$ dans \mathbb{S}_∞ tendent vers x quand $i \rightarrow \infty$.*

Par suite, si on note \bar{U}_i la composante connexe de $(\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty) \setminus \overline{\tilde{\alpha}_i}$ contenant x , alors $\bar{U}_1 \supset \bar{U}_2 \supset \dots$ est une base de voisinage de x dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$.

Démonstration. — On choisit un point base $x_0 \in \mathbb{H}$, et on considère la demi-géodésique $\tilde{\gamma}$ dans \mathbb{H} qui va de x_0 vers x . On note γ le projeté de $\tilde{\gamma}$ dans S . Quitte à bouger un peu x_0 , on peut supposer que γ n'est pas une géodésique fermée.

En utilisant la proposition 5.1.4, on peut trouver une famille finie de géodésiques fermées simples essentielles qui découpent S en disques. Par ailleurs, une demi-géodésique de S ne peut être contenue dans un disque fermé de S (sinon n'importe quel relevé de cette demi-géodésique resterait dans un compact de \mathbb{H}). Il s'en suit qu'il existe une géodésique fermée simple essentielle α de S que γ intersecte une infinité de fois. Soient x_1, x_2, \dots la suite des points d'intersection de γ avec α (ordonnés par le paramétrage de γ). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un unique relevé \tilde{x}_i de x_i situé sur $\tilde{\gamma}$ (sinon γ serait une géodésique fermée), et un unique relevé $\tilde{\alpha}_i$ de la géodésique α qui passe par \tilde{x}_i .

Les points x_1, x_2, \dots sont deux à deux distincts (car γ n'est pas une courbe fermée). Donc, *a fortiori*, les points $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots$ sont deux à deux distincts. Comme $\tilde{\gamma}$ est une demi-géodésique, elle intersecte toute géodésique de \mathbb{H} en au plus un point. Il en résulte que les courbes $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots$ sont deux à deux distinctes (en tant que sous-ensemble de \mathbb{H} et non seulement en tant que courbes paramétrées). Puisque α est une géodésique simple, les géodésiques $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots$ sont deux à deux disjointes. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\bar{\tilde{\alpha}}_i$ l'adhérence de $\tilde{\alpha}_i$ dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$ (i.e. la réunion de $\tilde{\alpha}_i$ et de ses deux extrémités dans \mathbb{S}_∞). On note

⁽²⁾Interprétation : une bougie allumée dans une surface hyperbolique est visible de n'importe quel point de la surface dans toutes les directions.

\bar{U}_i la composante connexe de $(\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty) \setminus \bar{\alpha}_i$ qui contient x . Alors $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots$ est une suite décroissante de voisinages de x . Par suite, le diamètre euclidien de U_i tend vers 0. Le lemme 5.1.8 montre que la distance hyperbolique entre les géodésiques $\tilde{\alpha}_i$ et $\tilde{\alpha}_{i+1}$ est minorée indépendamment de i . Il en résulte que la distance hyperbolique entre $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_i$ tend vers l'infini lorsque $i \rightarrow \infty$. Donc l'intersection décroissante $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{U}_i$ est réduite à un point (qui ne peut être que x). Donc les deux extrémités de la géodésique $\tilde{\alpha}_i$ tendent vers x , et $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots$ est une base décroissante de voisinages de x . \square

Démonstration du théorème 5.2.1. — Soit x un point de \mathbb{S}_∞ , et $\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \dots$ une base de voisinages ouverts (quelconques) de x dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$. Le lemme 5.2.2 nous fournit une base particulière de voisinage $\bar{U}_1 \supset \bar{U}_2 \supset \dots$ de x , associés à une géodésique fermée simple α dans S , et une suite de relevé $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots$ de α . Quitte à extraire une sous-suite, on supposera que $\bar{V}_i \supset \bar{U}_i \supset \bar{V}_{i+1}$ pour tout i . On notera β l'unique géodésique fermée simple de S isotope à la courbe $f(\alpha)$. Le lemme 5.1.2 nous fournit, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, un relevé $\tilde{\beta}_i$ de la géodésique β qui est à distance bornée de la courbe $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i)$; en particulier les courbes $\tilde{\beta}_i$ et $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i)$ ont les mêmes extrémités. Pour chaque i , on note \bar{W}_i la composante connexe de $(\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty) \setminus \bar{\beta}_i$ qui contient $\bar{\beta}_{i+1}$.

Clairement, $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots$ est une suite décroissante d'ouverts de $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$. De plus, la distance hyperbolique entre les courbes $\tilde{\beta}_i$ et $\tilde{\beta}_{i+1}$ est minorée indépendamment de i (lemme 5.1.8). Il s'en suit que le diamètre euclidien de \bar{W}_i tend vers 0 quand $i \rightarrow \infty$, et donc que l'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{W}_i$ est réduite à un point de \mathbb{S}_∞ , que l'on notera y . Par ailleurs, la distance hyperbolique entre les courbes $\tilde{\beta}_i$ et $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i)$ est majorée indépendamment de i (lemme 5.1.2 et remarque 5.1.3). Comme la distance hyperbolique entre les courbes $\tilde{\beta}_i$ et $\tilde{\beta}_{i+1}$ est minorée indépendamment de i , on en déduit l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $W_i \supset \tilde{f}(U_{i+k}) \supset W_{i+2k}$ pour tout i . Par suite, on a

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{\tilde{f}(U_i)} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{\tilde{f}(V_i)} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{W}_i = \{y\}.$$

On pose $\tilde{f}(x) = y$; ceci définit une extension de \tilde{f} à $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$. On remarque dans la construction précédente, la base de voisinage $\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \dots$ est arbitraire, et que, pour tout n , la suite finie $\bar{V}_1 \supset \dots \supset \bar{V}_n$ peut être complétée en une base décroissante de voisinages de n'importe quel point dans $\bar{V}_n \cap \mathbb{S}_\infty$. Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout point $x' \in V_n$, le point $y' = \tilde{f}(x')$ sera dans le voisinage \bar{W}_{n-k-1} de y (rappelons que l'entier k est une constante indépendante de n). Ceci montre que \tilde{f} est continue.

Pour vérifier que $\tilde{f} : \mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$ est un homéomorphisme, il suffit d'appliquer la construction précédente à $\tilde{f}^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$; on obtient alors une extension continue $\tilde{f}^{-1} : \mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$ qui est manifestement l'inverse de l'extension de \tilde{f} obtenue précédemment. \square

Le théorème 5.2.1 permet de définir une action f_* de f sur les géodésiques de S :

Définition 5.2.3. — Soit α une géodésique de S . On choisit un relevé \tilde{f} de f à \mathbb{H} , que l'on étend au disque fermé $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$. On choisit également un relevé $\tilde{\alpha}$ de α , et on note x et y les extrémités de $\tilde{\alpha}$ dans \mathbb{S}_∞ . On notera $f_*(\alpha)$ la géodésique de S obtenue en projetant la géodésique de \mathbb{H} d'extrémités $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(y)$. Ceci définit une application f_* de l'ensemble des géodésiques de S dans lui-même.

Dans le cas où α est une géodésique fermée simple de S , on peut définir la géodésique $f(\alpha)$ de manière beaucoup plus directe (sans avoir à considérer des relevés de α et de f) :

Proposition 5.2.4. — *Si α est une géodésique fermée de S , alors $f_*(\alpha)$ est l'unique géodésique fermée isotope à la courbe $f(\alpha)$.*

Démonstration. — Soit $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une géodésique fermée dans S , et $\beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ l'unique géodésique fermée isotope à $f(\alpha)$. Soit $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ un relevé de α , et $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ de f . Bien entendu, la courbe $\tilde{f}(\tilde{\alpha})$ est un relevé de la courbe $f(\alpha)$. D'après le lemme 5.1.2, il existe donc un relevé $\tilde{\beta}$ de la géodésique β qui a les deux mêmes extrémités que la courbe $\tilde{f}(\tilde{\alpha})$. Par définition de f_* , ceci signifie exactement que $f_*(\alpha) = \beta$. \square

Exercice 5.2.5. — Vérifier que l'action f_* de f sur les géodésiques définies ci-dessus satisfait les propriétés élémentaires suivantes :

1. Contrairement à ce que peut laisser croire la définition 5.2.3, la géodésique $f_*(\alpha)$ dépend de f et de α , mais pas du choix des relevés \tilde{f} et $\tilde{\alpha}$.
2. On a $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$.
3. Si α est une géodésique simple, alors $f_*(\alpha)$ aussi.
4. Si α est une géodésique fermée, alors $f_*(\alpha)$ aussi.
5. Si α_1 et α_2 sont deux géodésiques disjointes, alors les géodésiques $f_*(\alpha_1)$ et $f_*(\alpha_2)$ sont également disjointes.

5.3. Action sur les géodésiques et isotopie

Comme dans la section précédente, on considère un homéomorphisme f de la surface S . On note f_* l'application de l'ensemble des géodésiques de S dans lui-même défini ci-dessus.

Souvenons-nous que le but de la théorie de Nielsen-Thurston est d'étudier les homéomorphismes de surfaces à isotopie près. C'est dans cette optique que l'action f_* de f sur les géodésiques de S prend tout son intérêt ; en effet, nous allons voir que f_* ne dépend que de la classe d'isotopie de f .

Proposition 5.3.1. — *Si $f : S \rightarrow S$ est isotope à l'identité, et si \tilde{f} est obtenu en relevant une isotopie de Id_S à f , alors \tilde{f} s'étend par l'identité sur le cercle \mathbb{S}_∞ .*

Démonstration. — Supposons qu'il existe une isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$ de Id_S à f qui se relève en une isotopie $(\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$ de $\text{Id}_\mathbb{H}$ à \tilde{f} . Pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{H}$, on considère le chemin $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}} : [0,1] \rightarrow \mathbb{H}$ défini par $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}_t(\tilde{x})$. Bien sûr, le chemin $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ se projette sur le chemin γ_x défini par $\gamma_t(x) = f_t(x)$ où x est le projeté de \tilde{x} dans S . Puisque S est compacte, la longueur (pour la métrique hyperbolique) du chemin γ_x est uniformément bornée lorsque x varie dans S . Par suite, la longueur (pour la métrique hyperbolique) du chemin $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ est uniformément bornée lorsque \tilde{x} varie dans \mathbb{H} . En particulier, la distance hyperbolique entre un point \tilde{x} et son image $\tilde{f}(\tilde{x})$ reste bornée lorsque \tilde{x} varie dans \mathbb{H} . Par conséquent, la distance euclidienne entre un point \tilde{x} et son image $\tilde{f}(\tilde{x})$ tend vers 0 lorsque \tilde{x} sort de tout compact de \mathbb{H} . La proposition en découle immédiatement. \square

Corollaire 5.3.2. — *L'application f_* , de l'ensemble des géodésiques de S dans lui-même, ne dépend que de la classe d'isotopie de f : si f et g sont deux homéomorphismes de S isotopes l'un à l'autre, alors $f_* = g_*$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 5.3.1 à $\tilde{f} \circ \tilde{g}^{-1}$, et d'utiliser la définition de l'application f_* . \square

La proposition 5.3.1 admet une réciproque :

Proposition 5.3.3. — *Supposons que f admet un relevé $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ qui s'étend par l'identité sur le cercle \mathbb{S}_∞ . Alors f est isotope à l'identité.*

Démonstration. — D'après le théorème d'Epstein 2.3.2, il suffit de montrer que toute courbe fermée simple dans S est homotope à son image par f .

On considère donc une courbe fermée simple α_0 dans S , et on note $\beta_0 = f(\alpha_0)$. On note α_1 (resp. β_1) l'unique géodésique fermée simple isotope à α_0 (resp. β_0). On choisit un relevé $\tilde{\alpha}_0$ de α_0 , et on note $\tilde{\beta}_0 = \tilde{f}(\alpha_0)$. Bien entendu, la courbe $\tilde{\beta}_0$ est un relevé de la courbe fermée $\beta_0 = f(\alpha_0)$. D'après le lemme 5.1.2, il existe un relevé $\tilde{\alpha}_1$ (resp. $\tilde{\beta}_1$) de la géodésique α_1 (resp. β_1) qui a les mêmes extrémités dans \mathbb{S}_∞ que $\tilde{\alpha}_0$ (resp. $\tilde{\beta}_0$). Puisque \tilde{f} vaut l'identité en restriction au cercle \mathbb{S}_∞ , les courbes $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\beta}_0 = \tilde{f}(\tilde{\alpha}_0)$ ont les mêmes extrémités. Par conséquent, les géodésiques $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\beta}_1$ ont les mêmes extrémités ; donc $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_1$. *A fortiori*, $\alpha_1 = \beta_1$. Comme α_0 est isotope à α_1 et $\beta_0 = f(\alpha_0)$ est isotope à β_1 , on en déduit que α_0 est isotope à $\beta_0 = f(\alpha_0)$. Ce qu'on voulait montrer. \square

CHAPITRE 6

LAMINATIONS GÉODÉSIQUES

Comme dans le chapitre précédent, on considère ici une surface compacte sans bord S de genre $g \geq 2$. On munit S d'une métrique riemannienne à courbure -1 , et on identifie le revêtement universel de S au disque de Poincaré \mathbb{H} . On rappelle qu'une lamination géodésique de S est un fermé non-vide de S que l'on peut écrire comme une union de géodésiques simples deux à deux disjointes. On note toujours $\Lambda(S)$ l'ensemble des laminations géodésiques de S .

Dans le chapitre précédent, nous avons défini une action f_* de f sur l'ensemble $\Lambda(S)$, montré que l'application $f_* : \Lambda(S) \rightarrow \Lambda(S)$ ne dépend que de la classe d'isotopie de f , et caractérise f à isotopie près. Nous allons maintenant étudier un peu plus précisément les laminations géodésiques de S :

- d'un point de vue individuel : à quoi ressemble une lamination géodésique, les composantes connexes de son complémentaire, etc.
- mais aussi d'un point de vue collectif : nous allons munir l'ensemble $\Lambda(S)$ d'une topologie, montrer qu'il est compact, caractériser ses points isolés, etc.

6.1. Laminations géodésiques : propriétés élémentaires

Le lemme suivant explicite un point technique évident mais fondamental dans l'étude des laminations géodésiques :

Lemme 6.1.1. — *Soit L un sous-ensemble de S que l'on peut écrire sous la forme $L = \bigcup_{x \in L} \gamma_x$, où γ_x est une géodésique de S passant par x , et où les géodésiques γ_x et γ_y sont soit disjointes soit confondues⁽¹⁾. Alors la direction de la géodésique γ_x au point x dépend continument de x .*

Démonstration. — Voir [1, lemme 3.1]. □

Lemme 6.1.2. — *Si L une union non-vide de géodésiques simples deux à deux disjointes de S , alors l'adhérence de L est une lamination géodésique.*

Démonstration. — Voir [1, lemme 3.2]. □

Proposition 6.1.3. — *Une lamination géodésique est toujours d'intérieur vide dans S .*

⁽¹⁾Ces hypothèses sont par exemple satisfaites si L est une lamination géodésique, mais on n'a pas besoin que L soit fermé pour le lemme.

Démonstration. — Voir [1, lemme 3.3]. □

Une des conséquence de cette proposition est que, si L est une lamination géodésique, alors chaque composante connexe par arc de L est une géodésique. Comme corollaire immédiat, on obtient :

Corollaire 6.1.4. — *Une lamination géodésique ne peut s'écrire comme union de géodésiques que d'une seule manière.*

Démonstration. — Voir [1, lemme 3.3]. □

6.2. Topologie de l'ensemble des laminations géodésiques

Toute lamination géodésique est par définition est sous-ensemble fermé, donc compact de la surface S . On peut donc voir l'ensemble $\Lambda(S)$ des laminations géodésiques de S est donc un sous-ensemble $\mathcal{K}(S)$ de tous les compacts de S . La topologie de Hausdorff⁽²⁾ sur $\mathcal{K}(S)$ induit alors une topologie sur $\Lambda(S)$; nous allons étudier un peu cet espace topologique résultant. En particulier, nous allons montrer le théorème suivant qui est l'un des points clés de la preuve du théorème de classification de Nielsen-Thurston 4.1.1 :

Théorème 6.2.1. — *L'espace $\Lambda(S)$ des laminations géodésiques de S muni de la topologie de Hausdorff est compact.*

Démonstration. — Voir [1, théorème 3.4]. □

Définition 6.2.2. — Une lamination géodésique *simple* est une lamination constituée d'une union finie de géodésiques fermées simples deux à deux disjointes.

Remarque 6.2.3. — Les laminations géodésiques simples jouent un rôle fondamental dans de nombreux contextes. La raison en est qu'une lamination simple est un objet beaucoup plus facile à appréhender qu'une lamination géodésique quelconque, et que l'ensemble des laminations simples est dense dans $\Lambda(S)$ (nous ne démontrerons pas, et n'utiliserons pas ce résultat). il arrive donc souvent qu'on démontre une certaine propriété pour les laminations simples, puis qu'on utilise un argument de densité pour obtenir la même propriété pour les laminations géodésiques quelconques.

Proposition 6.2.4. — *Toute lamination géodésique simple est un point isolé de $\Lambda(S)$.*

Démonstration. — Voir [1, lemme 3.6]. □

Remarque 6.2.5. — Les laminations géodésiques simples ne sont pas les seuls points isolés de $\Lambda(S)$.

6.3. Structure d'une lamination géodésique et de son complémentaire

Dans cette partie, on considère une lamination géodésique L dans la surface hyperbolique compacte S . On va tenter de comprendre un peu à quoi peut ressembler la lamination L et son complémentaire $S \setminus L$.

⁽²⁾On rappelle que la *distance de Hausdorff* entre deux compacts K_1, K_2 de S est l'infimum des réels $r > 0$ tels que tout point de K_1 est situé à distance inférieure à r d'un point de K_2 , et tout point de K_2 est situé à distance inférieure à r d'un point de K_1 . La *topologie de Hausdorff* est celle induite par cette distance.

a. Surface hyperboliques d'aire finie. — Pour comprendre la topologie du complémentaire de la lamination géodésique L , on aura besoin d'informations sur les surfaces hyperboliques d'aire finie (c'est-à-dire les surfaces munie d'une métrique riemannienne complète à courbure constante -1 et qui ont une aire finie pour la forme d'aire associée à cette métrique). Le théorème 6.3.1 ci-dessous et son corollaire 6.3.2 fournissent une description complète de ces surfaces :

Théorème 6.3.1. — *Toute surface F hyperbolique sans bord complète d'aire finie est homéomorphe à une surface compacte sans bord privée d'un nombre fini de points. L'aire d'une telle surface F est $-2\pi \cdot \chi(F)$.*

Démonstration. — Voir [1, théorème 2.10]. □

Corollaire 6.3.2. — *Toute surface F hyperbolique à bord géodésique complète d'aire finie est homéomorphe à une surface compacte à bord privée d'un nombre fini de points⁽³⁾. L'aire d'une telle surface F est $-2\pi \cdot \chi(F) + \pi \cdot \chi(\partial F)$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème 6.3.1 au double G de la surface F , de noter que $\text{aire}(G) = 2 \cdot \text{aire}(F)$ et que $\chi(G) = 2 \cdot \chi(F) - \chi(\partial F)$. □

b. Complémentaire d'une lamination géodésique. — Nous allons maintenant essayer de comprendre un peu la topologie et la géométrie du complémentaire de la lamination L dans la surface S . Le point clé dans cette étude sera que chaque composante connexe de $S \setminus L$ est isométrique à l'intérieur d'une surface hyperbolique à bord géodésique complète d'aire finie.

Définition 6.3.3. — Soit U une composante connexe du complémentaire de L . Une *feuille bord* de U est une feuille γ de L telle que, pour tout $x \in \gamma$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que U contient au moins l'une des deux composantes connexes de $B(x, \varepsilon) \setminus \sigma$ où σ est le segment de γ centré en x de longueur 2ε .

L'ensemble des *feuilles bord* de L est la réunion des ensemble des feuilles bord de toutes les composantes connexes du complémentaire de L .

Remarque 6.3.4. — Attention, étant donnée une composante connexe U de $S \setminus L$, la frontière topologique de U dans S n'est pas égale à l'union des feuilles bord de U . En effet, l'union des feuilles bord de U n'est presque jamais fermée (voir la proposition 6.3.5 ci-dessous).

Par contre, si \tilde{U} est un relevé de U dans \mathbb{H} (i.e. une composante connexe de $p^{-1}(U)$), alors chaque feuille bord de U admet un relevé (et un seul) qui est dans la frontière de \tilde{U} , et la frontière de \tilde{U} est égale à l'union des relevés des feuilles bord de U qui sont dans la frontière de \tilde{U} .

Proposition 6.3.5. — *L'union des feuilles bord de L est dense dans L .*

Démonstration. — Voir [1, lemme 4.2]. □

⁽³⁾Ces peuvent être situés aussi bien sur le bord que dans l'intérieur de la surface compacte à bord considérée

Lemme 6.3.6. — Soit U une composante connexe de $S \setminus L$, et $\tilde{U} \subset \mathbb{H}$ un relevé de U dans \mathbb{H} (i.e. une composante connexe de $p^{-1}(U)$). On note $\tilde{\tilde{U}}$ l'adhérence de \tilde{U} dans \mathbb{H} . Alors $\tilde{\tilde{U}}$ (muni de la restriction de la métrique de \mathbb{H}) est une surface hyperbolique contractible à bord géodésique.

Démonstration. — Voir [1, lemme 4.1]. □

Ce lemme permet de voir chaque composante connexe de $S \setminus L$ comme l'intérieur d'une surface hyperbolique à bord géodésique complète. En effet, considérons une composante connexe U de $S \setminus L$. L'adhérence de U dans S est un ensemble compliqué qui n'a pas la topologie d'une surface à bord. Cependant, si on considère une composante connexe \tilde{U} de $p^{-1}(U)$, le lemme 6.3.6 montre que $p : \tilde{U} \rightarrow U$ est un revêtement universel de U , et $\tilde{\tilde{U}}$ est une surface hyperbolique à bord géodésique. Si on note Γ_U le sous-groupe du groupe Γ des automorphismes du revêtement $p : \mathbb{H} \rightarrow S$ qui préservent U , alors $F_U := \Gamma_U \backslash \tilde{\tilde{U}}$ est une surface hyperbolique à bord géodésique dont l'intérieur $\Gamma_U \backslash \tilde{U}$ est isométrique à U . Il est clair qu'à isométrie près, la surface F_U ne dépend pas du choix du relevé \tilde{U} de U .

Proposition 6.3.7. — Le complémentaire de la lamination L dans S n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et qu'un nombre fini de feuille bords.

Démonstration. — Voir [1, lemme 4.3]. □

Définition 6.3.8. — Une couronne à k branches est une surface hyperbolique complète d'aire finie à bord géodésique, qui est homéomorphe à $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \setminus A$ où A est un sous-ensemble fini de cardinal k de $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$.

Proposition 6.3.9. — Supposons que la lamination L ne possède pas de feuille fermée, et considérons une composante connexe U de $S \setminus L$. Alors :

- soit U est isométrique à l'intérieur d'un polygone hyperbolique idéal (i.e. l'enveloppe convexe dans \mathbb{H} d'un nombre fini de points du cercle \mathbb{S}_∞),
- soit il existe un unique compact U_0 de U tel que $U \setminus U_0$ est isométrique à l'intérieur d'une union finie de couronnes deux à deux disjointes.

Définition 6.3.10. — Dans le second cas, le compact U_0 s'appelle le cœur de U .

Démonstration du lemme ??. — Voir [1, lemme 4.4]. □

c. Laminations dérivées et sous-laminations. — Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés au complémentaire d'une lamination géodésique L dans S , c'est-à-dire, en quelque sorte, à la façon dont L est plongée dans la surface S . Nous allons maintenant étudier des propriétés plus intrinsèques des laminations géodésiques de S ; en particulier, nous allons nous intéresser à la manière dont les feuilles de d'une lamination géodésique s'accumulent les unes sur les autres.

Lemme 6.3.11. — Soit L une lamination géodésique de S et $\tilde{L} := p^{-1}(L)$. Si L n'a pas de feuille fermée, alors chaque point du cercle \mathbb{S}_∞ est l'extrémité d'au plus un nombre fini de feuilles de L .

Démonstration. — Voir [1, lemme 4.5] □

Un concept important dans ce cadre est la notion de *lamination dérivée* :

Définition 6.3.12. — Soit L une lamination géodésique de S . La *lamination dérivée* de L , notée L' , est égale à la lamination L privée ses feuilles isolées.

Lemme 6.3.13. — Soit L une lamination géodésique de S . La lamination dérivée L' est vide si et seulement si L est une lamination simple.

Démonstration. — Si L est simple, alors clairement $L' = \emptyset$. Si $L' = \emptyset$ alors L est une union fermée de courbes simples, deux à deux disjointes, isolées les unes des autres. Chacune des courbes constituant L est donc fermée. \square

Lemme 6.3.14. — Si L est une lamination géodésique de S , alors chaque feuille fermée C de L possède un voisinage V tel que $V \cap L'$ est soit égale à C , soit vide.

Démonstration. — Voir [1, lemme 4.6] \square

Théorème 6.3.15. — Soit L une lamination géodésique de S , et L_1 une sous-lamination de L . Alors $L_1 \cap L'$ est une union de composantes connexes de L' .

Démonstration. — Voir [1, théorème 4.7]. \square

Corollaire 6.3.16. — Pour toute lamination géodésique L de S , on a $L''' = L''$. De plus, si L ne possède aucune feuille fermée, alors $L'' = L'$.

Démonstration. — D'après la proposition 6.3.7, la lamination L' n'a qu'un nombre fini de feuilles bords, et d'après la proposition 6.3.5, chaque composante connexe de L' contient une feuille bord. Par conséquent, la lamination L' n'a qu'un nombre fini de composantes connexes qu'on notera K_1, \dots, K_r . On a donc $L'' = K'_1 \cup \dots \cup K'_r$. Par ailleurs, puisque L'' est une sous-lamination de L , le théorème 6.3.15 affirme que $L'' \cap L' = L'''$ est une union de composantes connexes de L' , c'est-à-dire quitte à renuméroter, $L''' = K_1 \cup \dots \cup K_s$ pour un certain $s \leq r$. On en déduit que $K_i = K'_i$ pour $i \leq s$ et $K'_i = \emptyset$ pour $s < i$. Par suite, $L''' = K'_1 \cup \dots \cup K'_s = K_1 \cup \dots \cup K_s = L''$. De plus, si $L'' \neq L'$, alors $s < r$ et $K'_i = \emptyset$ pour $s < i \leq r$. D'après le lemme 6.3.13, ceci implique que K_i est une union de géodésiques fermées pour $s < i \leq r$; en particulier, L possède au moins une feuille fermée. \square

Corollaire 6.3.17. — Toute feuille de L est dense dans L si et seulement si L est connexe et parfaite (i.e. $L' = L$), ou L est une géodésique fermée.

Démonstration. — Si toute feuille de L est dense dans L , alors bien sûr L est connexe, et soit L est constituée d'une seule feuille (qui est alors automatiquement une géodésique fermée), soit aucune feuille de L n'est isolée (c'est-à-dire $L' = L$).

Réciproquement, supposons que L est connexe et parfaite ($L' = L$), et considérons une feuille γ de L . D'après le lemme 6.1.2, l'adhérence de la feuille γ est une sous-lamination de L , qu'on notera L_1 . D'après le théorème 6.3.15, $L_1 \cap L' = L_1 \cap L = L_1$ est une union de composantes connexes de $L' = L$. Donc, comme L est connexe $L_1 = L$, c'est-à-dire que γ est dense dans L . \square

CHAPITRE 7

PREUVE DU THÉORÈME DE CLASSIFICATION DE NIELSEN-THURSTON

Comme dans les chapitre précédents, on considère une surface compactes sans bord S de caractéristique d'Euler négative, on choisit une métrique hyperbolique sur S , et on identifie le revêtement universel de S au disque de Poincaré \mathbb{H} . Par ailleurs, on considère un homéomorphisme $f : S \rightarrow S$, et on suppose que :

1. f^n n'est isotope à l'identité pour aucun entier $n \neq 0$;
2. f n'est isotope à aucun homéomorphisme réductible.

Notre but est de montrer le théorème ??, c'est-à-dire de montrer que f est isotope à un homéomorphisme $f_0 : S \rightarrow S$ de type pseudo-Anosov. La construction de l'homéomorphisme f_0 se fait en plusieurs étapes.

- Nous allons tout d'abord construire deux laminations géodésiques L^s et L^u sur S telles que $f_*(L^s) = L^s$ et $f_*(L^u) = L^u$. L'existence de ces laminations est une conséquence assez directe de la compacité de l'espace $\Lambda(S)$ des laminations géodésiques sur S .
- Nous entreprendrons alors de décrire la mieux possible de la dynamique des relevés des puissances de f en restriction au cercle \mathbb{S}_∞ . La connaissance de cette dynamique nous permettra de donner un sens au fait que les laminations géodésiques L^s et L^u sont respectivement *répulsive* et *attractive*.
- Nous construirons ensuite un homéomorphisme $f_1 : S \rightarrow S$ isotope à f qui laisse globalement invariantes les laminations L^s et L^u .
- Puis nous écraserons l'adhérence de chaque composante connexe de $S \setminus (L^s \cup L^u)$ sur un point. Cette opération transforme les laminations L^s et L^u en des feuilletages singuliers \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , et transforme l'homéomorphisme f_1 en un homéomorphisme f_0 isotope à f_1 (donc aussi à f) qui laisse invariants les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u .
- Pour montrer que f_0 est de type pseudo-Anosov, il nous restera alors à construire des mesures transverses aux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u qui seront respectivement contractée et dilatés par f_0 . L'existence de ces mesures transverses découlera des propriétés d'attractivité et de répulsivité des laminations L^s et L^u .

7.1. Propriété des laminations géodésiques fixées par f_*

Proposition 7.1.1. — Si $L \in \Lambda(S)$ est une lamination géodésique f_* -invariante, alors L n'a aucune feuille fermée.

Démonstration. — Supposons que L ait des feuilles fermées. Ces feuilles sont en nombre fini (en effet, dans une surface compacte de genre g , on ne peut mettre qu'au plus $2g - 1$

courbes fermées simples, non-homotopes à 0, deux à deux non-homotopes et deux à deux disjointes). Notons $L_1 = C_1 \cup \dots \cup C_n$ la réunion des feuilles fermées de L . Puisque L est f_* -invariante, L_1 l'est aussi. Il existe donc une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ tel que $f_*(C_i) = C_{\sigma(i)}$ pour tout i . D'après la proposition 5.2.4, ceci signifie que, pour tout i , la courbe $f(C_i)$ est isotope à la géodésique $C_{\sigma(i)}$. En appliquant le théorème d'Epstein, on en déduit qu'il existe un homéomorphisme g isotope à f tel que $g(C_i) = C_{\sigma(i)}$ pour tout i . En particulier, f est isotope à un homéomorphisme qui permute un nombre fini de courbes fermées essentielles deux à deux disjointes, i.e. à un homéomorphisme qui est périodique ou réductible, ce qui contredit notre hypothèse. \square

Proposition 7.1.2. — *Si $L \in \Lambda(S)$ est une lamination géodésique f_* -invariante, alors toute composante connexe de $S \setminus L$ isométrique à l'intérieur d'un polygone hyperbolique idéal.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, L ne possède aucune feuille fermée. On peut donc appliquer la proposition 6.3.9 : chaque composante connexe U de $S \setminus L$ qui n'est pas isométrique à l'intérieur d'un polygone hyperbolique idéal possède un cœur U_0 bien défini et non-vide. Soit V_0 l'union des cœurs de toutes les composantes connexes de $S \setminus L$ qui ne sont pas isométriques à des intérieurs de polygones hyperboliques idéaux. Si V_0 était non-vide, alors le bord de V_0 serait une lamination élémentaire invariante par f_* , ce qui contredirait la proposition 7.1.1. Par conséquent, V_0 est vide, c'est-à-dire que toute composante connexe de $S \setminus L$ est isométrique à l'intérieur d'un polygone hyperbolique idéal. \square

Corollaire 7.1.3. — *Si $L \in \Lambda(S)$ est une lamination géodésique f_* -invariante, alors toute géodésique fermée C de S intersecte L transversalement.*

Démonstration. — D'après la proposition 7.1.2, chaque composante connexe du complémentaire de L dans S est simplement connexe. Comme une géodésique fermée d'une surface hyperbolique n'est jamais homotope à un point (sinon elle se relèverait en une géodésique fermée de \mathbb{H} , ce qui n'existe bien sûr pas), on en déduit que la géodésique fermée C doit intersecter la lamination L . Par ailleurs, C ne peut être une feuille de L d'après la proposition 7.1.1. Donc C intersecte L transversalement. \square

Corollaire 7.1.4. — *Si $L \in \Lambda(S)$ est une lamination géodésique f_* -invariante, alors il n'existe qu'un nombre fini de lamination géodésiques contenant L , et toute lamination géodésique contenant L est la réunion de L et d'un nombre fini de géodésiques isolées.*

Démonstration. — Si L_1 est une lamination géodésique contenant L , alors toute feuille de L_1 est une géodésique de S contenue dans une composante connexe de $S \setminus L$. D'après la proposition 6.3.7, $S \setminus L$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. De plus, d'après la proposition 7.1.2, toute composante connexe U de $S \setminus L$ est isométrique à un polygone idéal dans \mathbb{H} ; les seules géodésiques de L contenues dans U sont donc les diagonales du polygone idéal U ; en particulier, U ne contient qu'un nombre fini de géodésiques de S . Le corollaire 7.1.4 en découle immédiatement. \square

Proposition 7.1.5. — *Si $L \in \Lambda(S)$ est une lamination géodésique f_* -invariante, alors L est connexe.*

Démonstration. — Soit U une composante connexe de $S \setminus L$. Nous allons montrer que toutes les feuilles bord de U sont dans une même composante connexe de L . Pour cela, notons $\tilde{L} := p^{-1}(L)$, choisissons une composante connexe \tilde{U} de $\mathbb{H} \setminus \tilde{L}$ qui se projette sur U . D'après la proposition 7.1.2, \tilde{U} est un polygone idéal dans \mathbb{H} . Notons $\{a_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}_\infty$ les sommets de ce polygone (ordonnés cycliquement par l'ordre de \mathbb{S}_∞), et $\{\tilde{\gamma}_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ ses côtés (indexés de telles sorte que a_i est l'extrémité commune des côtés $\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\gamma}_{i+1}$). Les projections $\{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ des feuilles $\{\tilde{\gamma}_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ sont bien sûr les feuilles bord de U . Fixons i_0 . Comme S est compacte et comme γ_{i_0} n'est pas une géodésique fermée (L ne possède aucune feuille fermée, voir la preuve de la proposition 7.1.2), on peut trouver une suite $(\tilde{x}_{i_0}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\tilde{\gamma}_{i_0}$ qui tend vers a_{i_0} , telle que la suite $(x_{i_0}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des projetés des $\tilde{x}_{i_0}^n$ converge vers un point z de S . Comme γ_{i_0} et γ_{i_0+1} sont deux côtés adjacents d'un polygone idéal dans \mathbb{H} , il existe une suite $(\tilde{x}_{i_0+1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points sur $\tilde{\gamma}_{i_0+1}$ tels que la distance hyperbolique $d(\tilde{x}_{i_0}^n, \tilde{x}_{i_0+1}^n)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Par conséquent, la suite $(x_{i_0+1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des projetés des $\tilde{x}_{i_0+1}^n$ est une suite de points de la feuille γ_{i_0+1} qui tend vers le point z . Donc les feuilles γ_{i_0} et γ_{i_0+1} accumulent un même point de S (donc de L puisque L est fermée). Donc les feuilles γ_{i_0} et γ_{i_0+1} sont dans la même composante connexe de L . De proche en proche, on montre ainsi que les feuilles $\{\gamma_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ sont toutes dans la même composante connexe de S .

Supposons maintenant que L possède au moins deux composantes connexes, choisissons une composante connexe C de L , et notons $D := L \setminus C$. Alors C et D sont deux compacts non-vides disjoints de S . Donc la distance entre C et D est bien définie, strictement positive, et est réalisée comme la longueur d'un arc α joignant C à D . L'intérieur de cet arc α est bien sûr contenu dans une composante connexe de $S \setminus (C \cup D) = S \setminus L$. L'arc α joint donc deux feuilles bords d'une même composante connexe de $S \setminus L$. Par suite, les deux extrémités de α sont situés dans une même composante connexe de L . Ce qui est bien sûr absurde puisque l'une des extrémités de α est dans C , et l'autre dans $D = S \setminus C$. \square

Proposition 7.1.6. — *Si $L \in \Lambda(S)$ est une lamination géodésique f_* -invariante, alors toute feuille de L est dense dans L' . En particulier, la lamination L' est minimale.*

Démonstration. — Soit maintenant γ une feuille de L , et $L_1 = \bar{\gamma}$. D'après le lemme 6.1.2, L_1 est une lamination géodésique. La lamination $L_1 \cap L'$ est non-vide car $L_1 \cap L' \supset L'_1$ qui est non-vide d'après le lemme 6.3.13. Par ailleurs, d'après la proposition 6.3.15, $L_1 \cap L'$ est une union de composantes connexes de L' . Et comme L' est connexe, la seule possibilité est que $L_1 \cap L' = L'$. Autrement dit, γ est dense dans L' .

On a ainsi montré que toute feuille de L est dense dans L' . En particulier, toute feuille de L' est dense dans L' . En particulier, aucune feuille de L' n'est isolée. \square

7.2. Construction des laminations L^s et L^u

Nous allons maintenant construire les laminations stables et instables L^s et L^u de f . En fait, il nous suffit de construire la lamination instable L^u . Commençons par un exercice :

Exercice 7.2.1. — On munit le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de la métrique plate induite par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^2 . On peut alors considérer l'ensemble $\Lambda(\mathbb{T}^2)$ des laminations géodésiques de \mathbb{T}^2 , et munir cet ensemble de la topologie de Hausdorff. On considère un difféomorphisme d'Anosov linéaire $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. On remarque que les feuilles des feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont des géodésiques de \mathbb{T}^2 ; ainsi les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u peuvent être vus comme des laminations géodésiques.

Montrer que, pour toute géodésique fermée C de \mathbb{T}^2 , la suite de géodésiques $(f^n(C))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\Lambda(\mathbb{T}^2)$ vers le feuilletage \mathcal{F}^u , et la suite de géodésiques $(f^{-n}(C))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\Lambda(\mathbb{T}^2)$ vers le feuilletage \mathcal{F}^s .

Ainsi le feuilletage instable (resp. stable) d'un difféomorphisme d'Anosov linéaire du tore \mathbb{T}^2 peut être obtenu comme limite de la suite des itérés positifs d'une géodésique fermée. Nous allons essayer de généraliser cette remarque pour obtenir les laminations stables et instables de notre homéomorphisme f_* . Soit C une géodésique fermée simple de la surface S . Par compacité l'espace des laminations géodésiques $\Lambda(S)$, il existe une suite strictement croissante d'entiers n_i tel que la suite de géodésiques $(f_*^{n_i}(C))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers une lamination géodésique K . Cette lamination K n'a hélas aucune raison d'être invariante par f_* . On peut certes obtenir un objet invariant en remplaçant K par $\overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} f_*^r(K)}$. Mais le fermé $\overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} f_*^r(K)}$ n'a aucune raison d'être une lamination géodésique puisque $f^i(K)$ pourrait intersecter transversalement $f^j(K)$ pour $i \neq j$. On peut résoudre ce problème en remplaçant lamination K par sa lamination dérivée K' : on verra que $L := \overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} f_*^r(K')}$ est une lamination géodésique (clairement f_* -invariante). Comme on veut une lamination parfaite, on posera $L^u = L'$.

Remarque 7.2.2. — En fait, on verra *a posteriori* (dans la section 7.4) que, pour toute géodésique fermée C de S , et pour toute valeur d'adhérence K de la suite de géodésiques $(f_*^n(C))_{n \in \mathbb{N}}$, on a $L^u = K'$. En particulier, la lamination géodésique K' est automatiquement f_* -invariante. Je ne pense pas qu'on puisse montrer ce dernier fait directement.

La lamination L^s sera obtenue de la même manière que la lamination L^u en remplaçant la suite de géodésiques fermées $(f^n(C))_{n \in \mathbb{N}}$ par la suite $(f^{-n}(C))_{n \in \mathbb{N}}$. Autrement dit, la lamination L^s sera obtenu comme L^u en remplaçant f par f^{-1} .

Proposition 7.2.3. — *Il existe une lamination géodésique f_* -invariante $L^u \in \Lambda(S)$ qui est minimale (toute feuille de L^u est dense dans L^u) et telle que la propriété suivante est satisfaite : il existe une géodésique fermée simple C dans S et une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, telles que la suite de géodésiques $(f_*^{n_i}(C))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers une lamination géodésique K qui n'a pas d'intersection transverse avec L^u .*

Nous verrons plus tard (théorème ??) qu'il n'existe qu'une seule lamination géodésique L^u satisfaisant les propriétés décrites ci-dessus. On dit que L^u est la *lamination instable* de l'homéomorphisme f .

Lemme 7.2.4. — *Il existe une géodésique fermée simple C telle que $f_*^n(C) \neq C$ pour tout $n \neq 0$.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Alors, pour toute géodésique fermée simple C , il existe un entier n_C tel que $f_*^{n_C}(C) = C$. Fixons un point base $x_0 \in S$. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ une famille finie de lacets simples, basés en x_0 , qui engendrent le groupe fondamental de S . D'après la proposition 5.1.4, les lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ sont isotopes à des géodésiques fermées simples C_1, \dots, C_r . Si on pose

$$n := n_{C_1} \cdot n_{C_2} \cdot \dots \cdot n_{C_r},$$

alors on a $f_*^n(C_i) = C_i$ pour tout $i \in \{1 \dots r\}$. D'après la proposition 5.2.4, ceci implique que $f^n(\gamma_i)$ est homotope à γ_i pour tout $i \in \{1 \dots r\}$. Comme les lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ engendrent le groupe fondamental de S , on en déduit que, pour toute courbe fermée γ dans

S , les courbes $f^n(\gamma)$ et γ sont homotopes. D'après le théorème d'Epstein, ceci implique que f^n est isotope à l'identité. \square

Démonstration de la proposition 7.2.3. — Le lemme 7.2.4 nous fournit une géodésique fermée simple C telle que $f_*^n(C) \neq C$ pour tout $n \neq 0$. Bien sûr, ceci implique que les termes de la suite de géodésiques $(f_*^n(C))_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux distincts.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit la géodésique $f_*^n(C)$ comme une lamination géodésique (élémentaire). Comme $\Lambda(S)$ est compact, la suite de laminations géodésiques $(f_*^n(C))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(f_*^{n_i}(C))_{n_i \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une lamination $K \in \Lambda(S)$. Puisque les éléments de la suite $(f_*^n(C))_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux distincts, la lamination K n'est pas un point isolé de $\Lambda(S)$. D'après la proposition 6.2.4 et le lemme 6.3.13, il en découle que la lamination dérivée K' de K n'est pas vide.

Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La suite $(f_*^{n_i+r}(C))_{n_i \in \mathbb{N}}$ converge vers la lamination $f_*^r(K)$. Posons $N_r := \text{Card}(f_*^r(C) \cap C)$. Si on avait $\text{Card}(f_*^r(K) \overset{\text{T}}{\cap} K) > N_r$, alors pour i assez grand, on aurait $\text{Card}(f_*^{n_i+r}(C) \cap f_*^{n_i}(C)) > N_r$. Mais, par ailleurs, on a $\text{Card}(f_*^{n_i+r}(C) \cap f_*^{n_i}(C)) = \text{Card}(f_*^r(C) \cap C)$ pour tout i . Donc $\text{Card}(f_*^r(K) \overset{\text{T}}{\cap} K) \leq N_r$. En particulier, $\text{Card}(f_*^r(K) \overset{\text{T}}{\cap} K)$ est fini. On en déduit que l'ensemble $f_*^r(K') \overset{\text{T}}{\cap} K'$ est vide.

Ceci montre que, pour tout $p \neq q$, la lamination géodésique $f_*^p(K')$ n'a pas d'intersection transverse avec la lamination géodésique $f_*^q(K')$. On en déduit que l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_*^n(K')$ est une union de géodésiques simples deux à deux disjointes. Par suite, $\widehat{K} := \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_*^n(K')}$ est une lamination géodésique (voir le lemme 6.1.2). Cette lamination est clairement invariante par f_* . On pose $L^u := (\widehat{K})'$. Puisque \widehat{K} est f_* -invariante, L^u l'est aussi.

Notons que la lamination L^u n'est pas vide. En effet, comme $L^u = (\widehat{K})'$, si L^u était vide, alors, d'après le lemme 6.3.13, \widehat{K} serait une lamination géodésique élémentaire (*i.e.* une union finie de géodésiques fermées simples deux à deux disjointes). Ceci est bien sûr impossible puisque \widehat{K} est f_* -invariante, ce qui implique qu'elle ne possède aucune feuille fermée d'après la proposition 7.1.1.

La lamination L^u est par construction la lamination dérivée d'une lamination \widehat{K} qui est f_* -invariante. Le lemme 7.1.6 implique donc que toute feuille de L^u est dense dans L^u .

Reste à montrer que K n'a pas d'intersection transverse avec L^u . Nous avons vu ci-dessus que $\text{Card}(K \overset{\text{T}}{\cap} f^r(K))$ est fini pour tout $r \neq 0$. Par conséquent, quel que soit $r \neq 0$, les laminations K et $f^r(K) = (f^r(K))'$ n'ont pas d'intersection transverses. Il en résulte que K n'a pas d'intersection transverse avec $\widehat{K} = \overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} f^r(K')}$. En particulier, K n'a pas d'intersection transverse avec $(\widehat{K})' = L^u$. \square

Si dans la preuve de la proposition 7.2.3, on remplace la suite de géodésiques $(f_*^n(C))_{n \in \mathbb{N}}$ par la suite $(f_*^{-n}(C))_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient l'énoncé suivant :

Proposition 7.2.5. — *Il existe une lamination géodésique f_* -invariante $L^s \in \Lambda(S)$ qui est minimale et telle que la propriété suivante est satisfaite : il existe une géodésique fermée simple C dans S et une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, telles que la suite de géodésiques $(f_*^{-n_i}(C))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers une lamination géodésique J qui n'a pas d'intersection transverse avec L^s .*

Remarque 7.2.6. — Comme le suggère les notations, on peut prendre la même géodésique C et la même suite d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans les propositions 7.2.3 et 7.2.5.

On dit que L^s est la *lamination stable* de l'homéomorphisme f .

7.3. Dynamique sur \mathbb{S}_∞ des relevés des puissances de f

Nous allons maintenant étudier la dynamique des relevés des puissance positives de f , en restriction au cercle \mathbb{S}_∞ . Rappelons que, si $\tilde{k} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est un relevé d'une puissance de f^n de f , alors on peut étendre (de manière unique) \tilde{k} en un homéomorphisme de $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$. C'est en ce sens qu'on peut parler de la restriction de \tilde{k} au cercle \mathbb{S}_∞ .

Proposition 7.3.1. — *Si \tilde{k} est un relevé d'une puissance strictement positive $k = f^n$ de f , alors la restriction de \tilde{k} au cercle \mathbb{S}_∞ n'a qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points fixes, qui sont alternativement attractifs et répulsifs.*

Définition 7.3.2. — Un intervalle compact I du cercle \mathbb{S}_∞ est dit \tilde{L}^u -stabilisé si, pour tout intervalle compact $J \subset \text{int}(I)$, il existe une feuille $\tilde{\gamma}$ de la lamination \tilde{L}^u qui a une extrémité dans chacune des deux composantes connexes de $\text{int}(I) \setminus J$.

Remarque 7.3.3. — Si I est un intervalle \tilde{L}^u -stabilisé, alors les extrémités de I sont les extrémités d'une feuille de la lamination \tilde{L}^u . En effet, puisque I est \tilde{L}^u stabilisé, on peut trouver une suite $(\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de feuilles de \tilde{L}^u tel que les extrémités de $\tilde{\gamma}_n$ tendent donc vers les extrémités de I . Et comme \tilde{L}^u est fermée, ceci implique que la géodésique de \mathbb{H} qui joint les extrémités de I est une feuille de \tilde{L}^u .

Proposition 7.3.4. — *Soit \tilde{k} un relevé d'une puissance strictement positive $k = f^p$ de f . Soit I un intervalle compact de \mathbb{S}_∞ , qui est invariant par \tilde{k} et \tilde{L}^u -stabilisé. Alors la restriction de \tilde{k} à I possède un point fixe $s \in \text{Int}(I)$ tel que, pour tout $x \in I \setminus \{s\}$, l'orbite $\tilde{k}^n(x)$ tend vers l'une des deux extrémités de I lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Remarque 7.3.5. — En particulier, dans la situation de la proposition 7.3.4, la restriction de \tilde{k} à I possède exactement trois points fixes : le point r qui est répulsif, et les deux extrémités de I qui sont attractives. Attention, les extrémités de I ne sont *a priori* attractives que pour la restriction de \tilde{k} à I : la proposition ne dit rien sur la dynamique de \tilde{k} sur l'intervalle compact $\mathbb{S}_\infty \setminus \text{int}(I)$.

Démonstration de la proposition 7.3.4. — Nous noterons q et r les extrémités de l'intervalle I . La démonstration se fait en trois étapes.

Première étape : l'une des extrémités de I (disons p) est un point attractif pour la restriction de \tilde{k} à I . Puisque I est un intervalle \tilde{L}^u -stabilisé, les extrémités de I sont aussi les extrémités d'une feuille $\tilde{\gamma}$ de \tilde{L}^u (voir la remarque 7.3.3). Soit $\gamma := p(\tilde{\gamma})$. Soit C la géodésique fermée qui a servi à construire la lamination L^u . D'après le corollaire 7.1.3, la géodésique C intersecte transversalement la lamination L^u . Comme L^u est minimale (voir la proposition 7.1.6), γ est dense dans L^u . Par conséquent C intersecte transversalement γ . Par conséquent, il existe un relevé \tilde{C} de C qui intersecte transversalement $\tilde{\gamma}$. Ceci implique que l'une des deux extrémités de \tilde{C} (que nous noterons a) est située dans $\text{int}(I)$, alors que l'autre extrémité (que nous noterons b) est située dans $\mathbb{S}_\infty \setminus I$. Comme \tilde{k} préserve l'intervalle I , ceci implique que la suite de points $(\tilde{k}^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $a_\infty \in I$, alors que la suite de points $(\tilde{k}^n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $b_\infty \in \mathbb{S}_\infty \setminus \text{int}(I)$.

Si $a_\infty \in \text{int}(I)$, alors il existe une feuille $\tilde{\delta}$ de \tilde{L}^u telle que $\tilde{\delta}$ sépare a_∞ des extrémités de I . Mais, pour tout $l \in \mathbb{N}$, les points $\tilde{k}^l(a)$ et $\tilde{k}^l(b)$ sont les extrémités d'un relevé de la géodésique $k_*^l(C) = f_*^{lp}(C)$. Rappelons qu'il existe une suite d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tels que la suite de géodésiques $(f_*^{n_i}(C))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers la lamination K . Il doit exister un entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que le reste de n_i modulo p est égal à r pour une infinité de valeurs de i . Par conséquent, il existe une suite d'entiers $(l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que la suite de géodésiques $(f_*^{pl_i}(C))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers la lamination $f_*^r(K)$. On en déduit que les points a_∞ et b_∞ sont les extrémités d'une feuille de la lamination $\widetilde{f_*^r(K)}$. On en déduit de $\widetilde{f_*^r(K)}$ intersecte transversalement $\tilde{\delta}$, et donc en particulier, intersecte transversalement \tilde{L}^u . Ceci est absurde : en effet K n'intersecte pas transversalement L^u , et L^u est f_* -invariante, donc $f_*^r(K)$ n'intersecte pas L^u . Par conséquent, $a_\infty \in I \setminus \text{int}(I)$, c'est-à-dire que a_∞ est l'une des deux extrémités de I . Quitte à échanger les noms des extrémités, on peut supposer que $a_\infty = q$. Puisqu'il existe un point $a \in \text{int}(I)$ tel que l'orbite par \tilde{k} de a tend vers $q = a_\infty$, le point q est attractif pour la restriction de \tilde{k} à I .

Deuxième étape : il existe un point $s \in \text{int}(I)$ qui est un point fixe répulsif pour la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ . De plus, \tilde{k} ne fixe aucun point situé entre q et s dans I .

Soit a le point de I qui a servi dans la première étape, et U le sous-intervalle de I d'extrémités a et q . D'après la preuve de la première étape, la suite $(\tilde{k}^n(a))$ tend vers q , donc l'homéomorphe déplace les points de U en direction de q . Il existe un voisinage V de l'autre extrémité de I tel que V et $\tilde{k}(V)$ sont tous deux disjoints de U . Puisque I est un intervalle \tilde{L}^u -stabilisé, il existe une feuille $\tilde{\delta}$ de \tilde{L}^u qui a une extrémité (que nous noterons c) dans U et l'autre (que nous noterons d) dans V . Puisque c est dans U , le point $\tilde{k}(c)$ sépare c de q . Puisque les géodésiques $\tilde{k}(\tilde{\gamma})$ et $\tilde{\gamma}$ ne s'intersectent pas transversalement, la seule possibilité est donc que les points $\tilde{k}(c)$ et $\tilde{k}(d)$ sépare les points c et d des extrémités q et r de I . Notons c_∞ et d_∞ les limites des suites de points $(\tilde{k}^{-n}(c))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{k}^{-n}(d))_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $c_\infty \neq d_\infty$, notons J l'intervalle fermé d'extrémités c_∞ et d_∞ qui n'est pas contenu dans I . Alors J est un intervalle \tilde{L}^u -stabilisé, et les deux extrémités de J sont des points fixes attractifs pour la restriction de \tilde{k}^{-1} à J (et donc répulsifs pour la restriction de \tilde{k}). Ceci est absurde : en effet, si on remplace I par J dans la première étape de notre preuve, on voit que l'une au moins des deux extrémités de J est un point fixe attractif pour la restriction de \tilde{k} à J . Par conséquent $c_\infty = d_\infty$.

On pose $s = c_\infty = d_\infty$. Il existe des \tilde{k} -orbites négatives $(\tilde{k}^{-n}(c))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{k}^{-n}(d))_{n \in \mathbb{N}}$ situées de part et d'autre de s qui tendent vers s . Donc s est un point fixe répulsif pour la restriction de \tilde{k} à I . De plus, puisque c est située dans U , la \tilde{k} -orbites positives $(\tilde{k}^n(c))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers q . Par conséquent, \tilde{k} ne fixe aucun point situé entre q et s dans I .

Troisième étape : \tilde{k} n'a pas d'autre point fixe que r dans l'intérieur de I .

On raisonne par l'absurde : on suppose que \tilde{k} fixe un point $t \in I$ tel que $t \neq r, q, s$. Notons que t est nécessairement situé entre r et s dans I (puisque \tilde{k} ne fixe aucun point de I situé entre s et q). Puisque I est \tilde{L}^u -stabilisé, il existe une feuille $\tilde{\gamma}$ de \tilde{L}^u dont une extrémité (notée c) est située entre q et s , et l'autre (notée d) est située entre t et r . Les suites de points $(\tilde{k}^{-n}(c))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{k}^{-n}(d))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent alors vers s (car l'orbite passée de tout point situé entre q et s tend vers s) et vers un point d_∞ situé entre t et r . On note U l'intervalle de \mathbb{S}_∞ , d'extrémités s et d_∞ , qui n'est pas contenu dans I . Alors U est invariant par \tilde{k} et \tilde{L}^u -stabilisé. Mais ses deux extrémités sont des points fixes répulsifs

de la restriction de \tilde{k} à U . Ceci contredit la première étape (tout intervalle \tilde{k} -invariant et \tilde{L}^u -stabilisé a une extrémité attractive), et termine la preuve de la troisième étape.

La preuve de la proposition est maintenant terminée. En effet, nous avons montré que \tilde{k} possède exactement trois points fixes dans I : les deux extrémités p et q de I , et un point fixe répulsif r situé dans l'intérieur de I . Pour tout point $x \in I \setminus \{r\}$, l'orbite de x par \tilde{k} doit tendre vers un point fixe de \tilde{k} lorsque $n \rightarrow \infty$. Ce point ne peut être r , puisque r est répulsif. Par conséquent, l'orbite de x par \tilde{k} tend vers une des extrémités de I . \square

Démonstration de la proposition 7.3.1. — La preuve se divise en trois cas.

Premier cas : \tilde{k} fixe les deux extrémités d'une feuille bord $\tilde{\gamma}_0$ de \tilde{L}^u . Puisque L^u est minimale, \tilde{L}^u n'a pas de feuille isolée. Donc $\tilde{\gamma}_0$ n'est pas dans le bord que d'une seule composante connexe de $\mathbb{H} \setminus \tilde{L}$; soit \tilde{U} cette composante connexe. D'après la proposition 7.1.2, \tilde{U} est un polygone idéal. La géodésique $\tilde{\gamma}_i$ est l'un des côtés de ce polygone; notons $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ les autres côtés. Pour $i = 0, \dots, n$, notons I_i l'intervalle fermé de \mathbb{S}_∞ dont les extrémités sont les extrémités de la géodésique $\tilde{\gamma}_i$, et qui ne contient pas les autres sommets du polygone \tilde{U} . Puisque l'homéomorphisme \tilde{k} fixe les extrémités $\tilde{\gamma}_0$, il doit aussi fixer les autres sommets de \tilde{U} . Par conséquent, \tilde{k} fixe chacun des intervalles I_0, \dots, I_n .

Pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, considérons une suite $(\tilde{\gamma}_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de feuilles de \tilde{L}^u accumulant $\tilde{\gamma}_i$ (une telle suite existe puisqu'aucune feuille de \tilde{L}^u n'est isolée). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les extrémités des $\tilde{\gamma}_i^k$ sont situés dans l'intervalle I_i (sinon les $\tilde{\gamma}_i^k$ devraient intersecter $\tilde{\gamma}_{i-1}$ ou $\tilde{\gamma}_{i+1}$). De plus, les extrémités des $\tilde{\gamma}_i^k$ tendent vers les extrémités de l'intervalle I_i lorsque $k \rightarrow \infty$. Par conséquent, I_i est un intervalle \tilde{L}^u -stabilisé.

Nous avons donc montré que \mathbb{S}_∞ est recouvert par $n + 1$ intervalles qui sont fixes pour \tilde{k} et \tilde{L}^u -stabilisés. D'après la proposition 7.3.4, ceci implique que la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ possède exactement $2(n + 1)$ points fixes, alternativement attractifs et répulsifs.

Deuxième cas : \tilde{k} fixe les deux extrémités d'une feuille non-bord $\tilde{\gamma}_0$ de \tilde{L}^u . Soit alors I et I' les deux intervalles fermés de \mathbb{S}_∞ dont les extrémités sont les extrémités de $\tilde{\gamma}_0$. Alors I et I' sont clairement deux intervalles invariants. De plus, puisque la géodésique $\tilde{\gamma}_0$ est accumulés des deux côtés par des feuilles de \tilde{L}^u , les intervalles I et I' sont \tilde{L}^u -stabilisés. Par conséquent, \mathbb{S}_∞ est recouvert par 2 intervalles qui sont fixes pour \tilde{k} et \tilde{L}^u -stabilisés. On en déduit que la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ possède exactement 4 points fixes, alternativement attractifs et répulsifs.

Troisième cas : \tilde{k} ne fixe les deux extrémités d'aucune feuille de \tilde{L}^u . Si \tilde{k} ne fixe aucun point de \mathbb{S}_∞ , alors c'est terminé. Supposons donc que \tilde{k} fixe un point $x_0 \in \mathbb{S}_\infty$.

Affirmation 1 : Le point x_0 n'est une extrémité d'aucune feuille de \tilde{L}^u .

Supposons au contraire que x_0 est une extrémité d'un feuille $\tilde{\gamma}$ de \tilde{L}^u . Alors les géodésiques de la famille $\{\tilde{k}^n(\tilde{\gamma})\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux distinctes (car \tilde{k} ne fixe les deux extrémités d'aucune feuille de \tilde{L}^u), et ont toutes une extrémité en x_0 (puisque \tilde{k} fixe x_0). En particulier, x_0 est une extrémité d'une infinité de feuilles de \tilde{L}^u . Ceci est absurde d'après les propositions 7.1.1 et le lemme 6.3.11. On a donc prouvé l'affirmation 1.

Pour toute feuille $\tilde{\gamma}$ de \tilde{L}^u , on note $I_{\tilde{\gamma}}$ l'intervalle fermé de \mathbb{S}_∞ qui a les deux mêmes extrémités que $\tilde{\gamma}$ et qui ne contient pas le point x_0 .

Affirmation 2 : Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$ est un arc tel que $\alpha(0) = x_0$ et $\alpha(]0, 1]) \subset \mathbb{H}$, alors il existe une feuille de $\tilde{\gamma}$ de \tilde{L}^u telle que $\tilde{\gamma}$ sépare x_0 de $\alpha(1)$ dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{S}_\infty$.

En effet, rappelons que les composantes connexes de $\mathbb{H} \setminus \tilde{L}^u$ sont des polygones idéaux. En particulier, si $x \in \mathbb{S}_\infty$ est dans l'adhérence d'une composante connexe de $\mathbb{H} \setminus \tilde{L}^u$, alors il existe une feuille de \tilde{L}^u qui a une extrémité en x . Par conséquent, l'affirmation 1 implique que le point x_0 n'appartient à l'adhérence d'aucune composante connexe de $\mathbb{H} \setminus \tilde{L}^u$.
L'affirmation

Affirmation 3 : Il existe une feuille $\tilde{\gamma}_0$ de \tilde{L}^u telle qu'on a

$$I_{\tilde{\gamma}_0} \subset \text{int}(\tilde{k}(I_{\tilde{\gamma}_0})) \quad \text{ou} \quad \tilde{k}(I_{\tilde{\gamma}_0}) \subset \text{int}(I_{\tilde{\gamma}_0}).$$

Commençons par remarquer que, pour toute feuille $\tilde{\gamma}$ de \tilde{L}^u , soit les intervalles $I_{\tilde{\gamma}}$ et $\tilde{k}(I_{\tilde{\gamma}})$ sont disjoints, soit l'un de ces intervalles est inclus dans l'intérieur de l'autre. Ceci découle du fait que les extrémités des intervalles $I_{\tilde{\gamma}}$ et $\tilde{k}(I_{\tilde{\gamma}})$ sont les extrémités des géodésiques $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{k}_*(\tilde{\gamma})$, qui sont des feuilles de \tilde{L}^u , et donc sont disjointes. Il nous reste donc à trouver une feuille $\tilde{\gamma}_0$ de \tilde{L}^u telle que les intervalles $I_{\tilde{\gamma}_0}$ et $\tilde{k}(I_{\tilde{\gamma}_0})$ ne sont pas disjoints. Pour ce faire, notons que, si U est un voisinage U assez petit du point x dans \mathbb{S}_∞ tel que $\tilde{k}(\mathbb{S}_\infty \setminus U) \cap (\mathbb{S}_\infty \setminus U) \neq \emptyset$. Soit U_0 un tel voisinage (que l'on peut choisir connexe pour simplifier). Il nous suffit maintenant de montrer qu'il existe une feuille $\tilde{\gamma}_0$ tel que $I_{\tilde{\gamma}_0} \supset \mathbb{S}_\infty \setminus U_0$. Autrement dit, une feuille $\tilde{\gamma}_0$ telle que les deux extrémités de $\tilde{\gamma}_0$ sont dans U_0 , et sont situées de part et d'autre de x dans U_0 . L'existence d'une telle feuille $\tilde{\gamma}_0$ découle immédiatement de l'affirmation 2. On a donc terminé la preuve de l'affirmation 3.

Dans la fin de la preuve, nous supposons que $I_{\tilde{\gamma}_0} \subset \text{int}(\tilde{k}(I_{\tilde{\gamma}_0}))$ (l'autre cas se traite de manière entièrement similaire).

Affirmation 4 : il existe des points z^- et z^+ de \mathbb{S}_∞ , tels que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0}) = \mathbb{S}_\infty \setminus \{z^+\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0}) = \{z^-\}.$$

L'inclusion $I_{\tilde{\gamma}_0} \subset \text{int}(\tilde{k}(I_{\tilde{\gamma}_0}))$ implique que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0})$ est une union strictement croissante d'intervalles de \mathbb{S}_∞ . Deux cas sont alors possibles : soit il existe un point z_+ tel que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0}) = \mathbb{S}_\infty \setminus \{z^+\}$, soit l'adhérence de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0})$ est un intervalle compact de \mathbb{S}_∞ . Montrons par l'absurde que le second cas ne peut pas se produire. Supposons que l'adhérence de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0})$ est un intervalle compact I_∞ de \mathbb{S}_∞ . Alors \tilde{k} fixe les deux extrémités de I_∞ . Par ailleurs, les extrémités de I_∞ sont les extrémités d'une feuille de \tilde{L}^u . En effet, les extrémités de l'intervalle $I_{\tilde{\gamma}_0}$ sont les extrémités de la géodésique $\tilde{\gamma}$ qui est une feuille de \tilde{L}^u ; comme L^u est k_* -invariante, ceci implique que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les extrémités de l'intervalle $\tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0})$ sont les extrémités d'une feuille de \tilde{L}^u ; et comme \tilde{L}^u est fermée, ceci implique que les extrémités de I_∞ sont les extrémités d'une feuille de \tilde{L}^u . Par conséquent, \tilde{k} fixe les deux extrémités d'une feuille de \tilde{L}^u . Ceci contredit notre hypothèse de départ. Par conséquent, il existe un point z_+ tel que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0}) = \mathbb{S}_\infty \setminus \{z^+\}$; l'existence d'un point z^- tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^n(I_{\tilde{\gamma}_0}) = \{z^-\}$ se montre de même, ce qui termine la preuve de l'affirmation 3.

L'affirmation 4 implique que z^+ et z^- sont les seuls points fixes de \tilde{k} sur \mathbb{S}_∞ , que z_+ est attractif, et que z_- est répulsif. En particulier, \tilde{k} n'a que deux points fixes, l'un attractif, l'autre répulsif. Ceci termine la preuve de la proposition 7.3.1. \square

Corollaire 7.3.6. — Il existe un relevé \tilde{k} d'une puissance strictement positive f^n de f , tel que la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ possède au moins trois points fixes attractifs et trois points fixes répulsifs.

Démonstration. — Le complémentaire $S \setminus L^u$ de la lamination L^u ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes. L'application f_* permute ces composantes connexes. Donc il existe une puissance strictement positive f^n de f tel que $(f^n)_* = (f_*)^n$ fixe chaque composante connexe de $S \setminus L^u$. Soit U une composante connexe de $S \setminus L^u$, et \tilde{U} une composante connexe de $p^{-1}(U)$. Puisque f_*^n fixe U , il existe un relevé \tilde{h} de f^n tel que \tilde{h} fixe \tilde{U} . Rappelons maintenant que \tilde{U} est un polygone idéal dans \mathbb{H} . Par conséquent, la restriction de \tilde{h} à \mathbb{S}_∞ permute les sommets de \tilde{U} . Il existe donc une puissance strictement positive $\tilde{k} = \tilde{h}^r$ de \tilde{h} qui fixe chacun des sommets de \tilde{U} . Au cours de la preuve de la proposition 7.3.1 (voir le premier cas de la preuve), nous avons montré que ceci implique que les sommets de \tilde{U} sont tous des points fixes attractifs de la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ . Le polygone \tilde{U} possède au moins trois sommets. Par conséquent, la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ possède au moins trois points fixes attractifs. D'après la proposition 7.3.1, ceci implique que la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ possède également au moins trois points fixes répulsifs. Remarquons finalement que \tilde{k} est un relevé de la puissance strictement positive f^{nr} de f . \square

7.4. Propriétés des laminations L^s et L^u

Définition 7.4.1. — On dit qu'une lamination géodésique $L \in \Lambda(S)$ est *attractive pour f* si, pour tout relevé \tilde{k} d'une puissance strictement positive de f , chaque géodésique dont les extrémités sont deux points fixes attractifs consécutifs de la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ est une feuille de la lamination $\tilde{L} := p^{-1}(L)$.

Autrement dit : une lamination géodésique $L \in \Lambda(S)$ est *attractive pour f* si, pour tout relevé \tilde{k} d'une puissance strictement positive de f , les côtés du polygone idéal dont les sommets sont les points fixes attractifs de la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ sont des feuilles de la lamination $\tilde{L} := p^{-1}(L)$.

Théorème 7.4.2. — La lamination géodésique L^u est l'unique lamination géodésique qui est f_* -invariante, attractive (pour f), et minimale.

Démonstration. — Nous savons déjà que L^u est f_* -invariante et minimale (voir la proposition 7.2.3). Montrons que L^u est attractive pour f . Pour cela, il suffit de reprendre un à un les trois cas de la preuve de la proposition 7.3.1. Soit \tilde{k} un relevé d'une puissance strictement positive f^n de f . Dans le premier cas de la preuve de la proposition 7.3.1 (i.e. lorsque \tilde{k} fixe les extrémités d'une feuille bord de \tilde{L}^u), les points fixes attractifs de \tilde{k} sont les sommets d'un polygone idéal qui est une composante connexe de $\mathbb{H} \setminus \tilde{L}^u$. En particulier, les côtés de ce polygone sont des feuilles de \tilde{L}^u qui joignent deux points fixes attractifs consécutifs de \tilde{k} . Dans le deuxième cas (i.e. lorsque \tilde{k} fixe les extrémités d'une feuille non-bord $\tilde{\gamma}_0$ de \tilde{L}^u), la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ possède exactement deux points fixes attractifs, qui sont les extrémités de $\tilde{\gamma}_0$. En particulier, il existe une feuille de \tilde{L}^u qui joint les deux points fixes attractifs de $\tilde{k}|_{\mathbb{S}_\infty}$. Dans le troisième cas (i.e. lorsque \tilde{k} ne fixe les extrémités d'aucune feuille de \tilde{L}^u), la restriction de \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ ne possède qu'un seul point fixe attractif. La condition "deux points fixes attractifs consécutifs de \tilde{k} sont joints par une feuille de \tilde{L}^u " est donc vide.

Il nous reste à montrer que toute lamination géodésique qui est f_* -invariante, attractive pour f et minimale coïncide avec L^u . Soit L une lamination géodésique f_* -invariante, attractive pour f , et minimale. D'après le corollaire 7.3.6, il existe un relevé \tilde{k} d'une puissance strictement positive $k = f^n$ de f dont la restriction à \mathbb{S}_∞ possède au moins trois points fixes attractifs. Choisissons deux points fixes attractifs consécutifs de \tilde{k} et notons $\tilde{\gamma}$ la géodésique de \mathbb{H} dont les extrémités sont ces deux points fixes, et $\gamma := p(\tilde{\gamma})$. Puisque L^u et L sont toutes deux attractive pour f , la géodésique γ est une feuille aussi bien de L^u que de L . Mais, puisque les laminations L et L^u sont toutes deux minimales, γ est dense aussi bien dans L^u que dans L . Autrement dit, les laminations L^u et L sont toutes deux égales à l'adhérence de γ . En particulier, $L = L^u$. \square

Remarque 7.4.3. — Si \tilde{k} est un relevé d'une puissance strictement positive de f , et si x et y sont deux points fixes *non-consécutifs* de \tilde{k} , alors la géodésique dont les extrémités sont x et y n'est pas une feuille de \tilde{L}^u .

Démonstration. — Soit U le polygone idéal (ouvert) dont les sommets sont les points fixes de \tilde{k} . Puisque L^u est attractive pour f , les côtés de U sont des feuilles de \tilde{L}^u . Donc toute feuille de \tilde{L}^u qui rencontrerait U serait une diagonale de U . Par conséquent, si la géodésique dont les extrémités sont x et y est une feuille de \tilde{L}^u , alors cette feuille est isolée dans \tilde{L}^u . Ceci est absurde puisque L^u est minimale. \square

En remplaçant l'homéomorphisme f par son inverse f^{-1} , et la lamination géodésique L^u par L^s dans les preuves de la propositions 7.3.1 et du théorème 7.4.2, on obtient le résultat suivant :

Théorème 7.4.4. — La lamination géodésique L^s est l'unique lamination géodésique qui est f_* -invariante, attractive pour f^{-1} , et minimale.

Remarque 7.4.5. — Dire que L^s est attractive pour f^{-1} revient à dire que, pour tout relevé \tilde{k} d'une puissance strictement négative de f , toute géodésique dont les extrémités sont deux points fixes attractifs consécutifs de la restriction \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ est une feuille de la lamination $\tilde{L}^s := p^{-1}(L^s)$. Autrement dit, pour tout relevé \tilde{k} d'une puissance strictement positive de f , toute géodésique dont les extrémités sont deux points fixes répulsifs consécutifs de la restriction \tilde{k} à \mathbb{S}_∞ est une feuille de la lamination $\tilde{L}^s := p^{-1}(L^s)$.

Proposition 7.4.6. — Les laminations L^s et L^u sont transverses.

Démonstration. — Considérons un relevé \tilde{k} d'une puissance positive de f qui possède n points fixes attractifs (et donc aussi n points répulsifs) avec $n \geq 2$. Comme les points fixes attractifs de \tilde{k} alternent avec les points fixes répulsifs sur le cercle \mathbb{S}_∞ , chaque géodésique dont les extrémités sont deux points fixes attractifs consécutifs de \tilde{k} intersecte deux géodésiques dont les extrémités sont des points fixes attractifs consécutifs de \tilde{k} (et vice-versa). On en déduit qu'il existe des feuilles de L^s qui intersectent transversalement des feuilles de L^u . En particulier, $L^s \neq L^u$.

Comme L^s et L^u sont minimales, ceci implique que L^s est transverse à L^u . En effet, si L^s et L^u n'étaient pas transverses, elles auraient une feuille γ en commun. Mais comme L^s et L^u sont minimales, on aurait alors $L^s = \tilde{\gamma} = L^u$. \square

Proposition 7.4.7. — Il existe un entier $p > 0$ tel que, pour toute géodésique fermée simple γ de S , la suite de géodésiques $(f_*^{np}(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans $\Lambda(S)$ quand $n \rightarrow +\infty$)

vers une lamination géodésique L_γ qui contient la lamination L^u (ce qui implique que L_γ est la réunion de L^u et d'un nombre fini de feuilles isolées, voir la proposition ??).

Pour montrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 7.4.8. — *Quel que soit la géodésique fermée simple γ de S , on a $f_*^i(\gamma) = f_*^j(\gamma)$ si et seulement si $i = j$.*

Remarque 7.4.9. — Les propositions 5.1.4 et 5.2.4 permettent de reformuler le lemme 7.4.8 sous la forme suivante : *quelle que soit la courbe fermée simple essentielle γ dans S , les courbes $f^i(\gamma)$ et $f^j(\gamma)$ sont homotopes si et seulement si $i = j$.*

Notons que ceci implique immédiatement qu'un homéomorphisme d'une surface hyperbolique compacte qui est isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov ne peut être également isotope à un homéomorphisme périodique ou réductible. Autrement dit, les différents cas du théorème de classification 4.1.1 (ou du théorème ??) sont mutuellement exclusifs.

Démonstration du lemme 7.4.8. — Raisonnons par l'absurde. Soit γ une géodésique fermée simple telle qu'il existe deux entiers i, j distincts tels que $f_*^i(\gamma) = f_*^j(\gamma)$. Alors $K_\gamma := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f_*^n(C)$ est une union finie de géodésiques fermées simples. En particulier, c'est un fermé de S . Par suite $\tilde{K}_\gamma := p^{-1}(K_\gamma)$ est un fermé de \mathbb{H} .

Soit $\tilde{\delta}$ une feuille de \tilde{L}^s dont les extrémités sont deux points fixes répulsifs consécutifs d'un relevé \tilde{k} d'une puissance strictement positive $k = f^p$ de f , et $\delta := p(\tilde{\delta})$. D'après le corollaire *intersecte-geod-fermee*, la géodésique fermée γ intersecte transversalement la lamination L^s . Comme δ est dense dans L^s (puisque L^s est minimale), on en déduit que γ intersecte transversalement δ . Par conséquent, il existe un relevé $\tilde{\gamma}$ de γ qui intersecte $\tilde{\delta}$.

Soient a et b les extrémités de $\tilde{\gamma}$. Puisque $\tilde{\gamma}$ est transverse à \tilde{L}^s , et puisque \tilde{L}^s est attractive pour f^{-1} , les points a et b ne peuvent être des points répulsifs de \tilde{k} . La proposition 7.3.1 implique donc que les suites de points $(\tilde{k}^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{k}^n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers deux points fixes attractifs a_∞ et b_∞ de \tilde{k} . Soit $\tilde{\gamma}_\infty$ la géodésique joignant a_∞ à b_∞ . D'une part, puisque L^u est attractive pour f , et d'après la remarque 7.4.3, soit $\tilde{\gamma}_\infty$ est une feuille de \tilde{L}^u , soit $\tilde{\gamma}_\infty$ est contenu dans une composante connexe de $\mathbb{H} \setminus \tilde{L}^u$. En particulier $\tilde{\gamma}_\infty$ n'intersecte pas \tilde{L}^u transversalement. D'autre part, puisque K_γ est un fermé f_* -invariant, la géodésique $\tilde{\gamma}_\infty$ est dans \tilde{K}_γ . Comme \tilde{K}_γ est une union finie de relevés de géodésiques fermées, il en résulte que $\tilde{\gamma}_\infty$ doit intersecter \tilde{L}^u transversalement (voir le corollaire ??). On a donc obtenu la contradiction recherchée. \square

Démonstration de la proposition 7.4.7. — Soit γ une géodésique fermée simple de S .

Soit $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers tels que la suite de géodésiques $(f_*^{n_i}(\gamma))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers une lamination géodésique $K_{\gamma, (n_i)}$. Le lemme 7.4.8 nous assure que les géodésiques de la suite $(f_*^{n_i}(\gamma))_{i \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux distinctes ; par suite, comme dans la preuve de la proposition ??, la lamination $K'_{\gamma, (n_i)}$ n'est pas vide, et

$$L_{\gamma, (n_i)} := \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} f_*^r(K'_{\gamma}) \right)',$$

est une lamination géodésique f_* -invariante, minimale, qui n'a pas d'intersection transverse avec $K_{\gamma, (n_i)}$. Par unicité de L^u , on a donc $L_{\gamma, (n_i)} = L^u$. En particulier, L^u contient une feuille de $K_{\gamma, (n_i)}$. Et comme L^u est minimale, ceci implique que $K_{\gamma, (n_i)} \supset L^u$.

Soit \mathcal{E} l'ensemble des laminations géodésiques de S contenant la lamination L^u . Rappelons que \mathcal{E} est un ensemble fini (voir la proposition ??). On a donc montré que, quel que soit la géodésique fermée simple γ , toutes les valeurs d'adhérences de la suite $(f_*^n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à l'ensemble fini \mathcal{E} . Par conséquent, si p est un entier tel que f_* laisse invariant chaque élément de \mathcal{E} , alors pour tout géodésique fermée simple γ , la suite $(f_*^{np}(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de \mathcal{E} . \square

Bien entendu, on a un résultat analogue à la proposition 7.4.7 avec la lamination stable L^s à la place de la lamination L^u :

Proposition 7.4.10. — *Il existe un entier $p > 0$ tel que, pour toute géodésique fermée simple γ de S , la suite de géodésiques $(f_*^{-np}(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans $\Lambda(S)$ quand $n \rightarrow +\infty$) vers une lamination géodésique L_γ qui contient la lamination L^s (ce qui implique que L_γ est la réunion de L^s et d'un nombre fini de feuilles isolées, voir la proposition ??).*

7.5. Construction d'un homéomorphisme isotope à f qui préserve L^s et L^u

Proposition 7.5.1. — *Il existe un homéomorphisme $f_1 : S \rightarrow S$ isotope à f qui laisse (globalement) invariante chacune des deux laminations L^s et L^u .*

Démonstration. — \square

7.6. Construction de mesures transverses aux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u

Rappelons que notre but est de montrer qu'il existe un homéomorphisme de type pseudo-Anosov dans la classe d'isotopie de f . Nous avons déjà un candidat : l'homéomorphisme f_0 défini dans la section précédente. Par construction, f_0 préserve deux feuilletages singuliers \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u . Pour montrer que f_0 est de type pseudo-Anosov, il nous reste donc à construire des mesures transverses aux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , notées μ^s et μ^u , et un réel $0 < \lambda < 1$, tels que $f_*\mu^s = \lambda \cdot \mu^s$ et $f_*\mu^u = \lambda^{-1} \cdot \mu^u$.

Remarque 7.6.1. — La notation $f_*\mu$ désigne la mesure transverse obtenu en poussant μ en avant par f , c'est-à-dire la mesure transverse définie par $f_*\mu^s(\alpha) = \mu^s(f^{-1}(\alpha))$. Bien entendu, tout cela, cette notation n'a rien à voir avec l'action f_* de f sur les laminations géodésiques de S .

Pour construire les mesures μ^s et μ^u , nous allons utiliser un outil très classique en système dynamique : une *partition de Markov* adaptée à l'homéomorphisme f_0 . Notons que l'existence d'une telle partition permet, outre de construire les mesures μ^s et μ^u , de montrer de nombreuses propriétés de la dynamique de l'homéomorphisme f_0 (entropie topologique positive, densité des orbites périodiques, etc.); voir [2, chapitre ???].

Commençons par définir la notion de partition de Markov :

Définition 7.6.2. — Un *rectangle* (pour f_0) est un ensemble $R \subset S$ tel que $R = h([0, 1]^2)$ où $h : [0, 1]^2 \hookrightarrow S$ est un plongement tel que :

- pour tout $t \in [0, 1]$, l'arc $h([0, 1] \times \{t\})$ est contenu dans une feuille de \mathcal{F}^s , ou dans la réunion d'une singularité et d'une feuille de \mathcal{F}^s aboutissant à cette singularité,
- pour tout $t \in [0, 1]$, l'arc $h(\{t\} \times [0, 1])$ est contenu dans une feuille de \mathcal{F}^u , ou dans la réunion d'une singularité et d'une feuille de \mathcal{F}^u aboutissant cette singularité.

L'ensemble $h([0, 1] \times \{0\}) \cup h([0, 1] \times \{1\})$ s'appelle le *bord horizontal* de R ; l'ensemble $h(\{0\} \times [0, 1]) \cup h(\{1\} \times [0, 1])$ s'appelle le *bord vertical* de R .

Définition 7.6.3. — Soit R un rectangle. Un *sous-rectangle horizontal* de R est un rectangle $H \subset R$ tel que le bord instable de H est inclus dans celui de R . Un *sous-rectangle horizontal* de R est un rectangle $V \subset R$ tel que le bord stable de V est inclus dans celui de R .

Le point important est que tout sous-rectangle horizontal de R a une intersection non-vide avec tout sous-rectangle vertical de R .

Définition 7.6.4. — Une *partition de Markov* adaptée à l'homéomorphisme f_0 est une collection finie de rectangles R_1, \dots, R_n dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, dont l'union recouvre S , et qui satisfont la propriété suivante : si on note $\partial^s R$ l'union des bords horizontaux des rectangles R_1, \dots, R_n , et $\partial^u R$ l'union des bords verticaux de ces rectangles, alors $f(\partial^s R) \subset \partial^s R$ et $f(\partial^u R) \supset \partial^u R$.

Remarque 7.6.5. — On vérifiera que la dernière condition de la définition ci-dessus est équivalente à la suivante : quels que soient $i, j \leq n$, toute composante connexe d'intérieur non-vide de $f_0(R_i) \cap R_j$ est à la fois un sous-rectangle vertical de R_j et l'image par f_0 d'une union finie de sous-rectangles horizontaux de R_j .

La propriété fondamentale d'une partition de Markov est la suivante :

Lemme 7.6.6. — Soit R_1, \dots, R_n partition de Markov adaptée à f_0 . Supposons que $f_0(R_i)$ intersecte l'intérieur de R_j et que $f_0(R_j)$ intersecte l'intérieur de R_k . Alors $f_0^2(R_i)$ intersecte l'intérieur de R_k .

Preuve. — Sous les hypothèses du lemme, $f_0(R_i) \cap R_j$ possède une composante connexe d'intérieur non-vide A , et $f_0(R_j) \cap R_k$ possède une composante connexe d'intérieur non-vide B . D'après la remarque ci-dessus, A est un sous-rectangle vertical de R_j , et $f_0^{-1}(B)$ est une union finie de sous-rectangles horizontaux de R_j . Par conséquent, A intersecte $f_0^{-1}(B)$. Ceci implique en particulier que $f_0(R_i)$ intersecte $f_0^{-1}(R_k)$. De manière équivalente, $f_0^2(R_i)$ intersecte R_k . \square

Proposition 7.6.7. — Il existe une partition de Markov $\{R_1, \dots, R_n\}$ adaptée à l'homéomorphisme f_0 .

Afin de montrer la proposition ??, il nous faut étudier un peu les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , et l'action de f_0 sur les feuilles de ces feuilletages.

Proposition 7.6.8. —

Démonstration. — \square

Démonstration de la proposition ??. — \square

Proposition 7.6.9. — Les feuilletages singuliers \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u admettent des mesures transverses μ^s et μ^u telles que

$$f_*\mu^s = \lambda.\mu^s \quad \text{et} \quad f_*\mu^u = \lambda^{-1}.\mu^u.$$

Au cours de la preuve de la proposition 7.6.9, nous aurons besoin du lemme très classique suivant :

Lemme 7.6.10. — Soit A une matrice carrée dont tous les coefficients sont des entiers positifs ou nuls. On suppose qu'il existe un entier p tel que tous les coefficients de A^p sont strictement positifs. Alors A admet un vecteur propre v dont toutes les coordonnées sont des réels strictement positives, associé à une valeur propre réelle $\lambda > 1$.

Démonstration. — □

Démonstration de la proposition 7.6.9. — On considère alors la matrice d'incidence de la partition de Markov $\{R_1, \dots, R_n\}$: par définition, c'est la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,j}$ est le nombre de composantes connexes d'intérieurs non-vides de $f_0(R_i) \cap R_j$. Clairement, les coefficients de la matrice

Le lemme ?? implique que la matrice A possède une vecteur propre v dont toutes les coordonnées sont des réels strictement positives, associé à une valeur propre réelle $\lambda > 1$. On définit alors la mesure transverse μ^u comme suit. Soit α un arc transverse au feuilletage \mathcal{F}^u . Pour $m \geq 0$ et $1 \leq i \leq n$, on note α_i le nombre de composantes connexes de $\alpha \cap f_0(R_i)$. On pose alors

$$\mu^u(\alpha) := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda^{-m} \alpha_{i,m} y_i.$$

□

La proposition 7.6.9 achève de montrer que l'homéomorphisme f_0 est de type pseudo-Anosov. Comme f_0 est isotope à f , ceci termine la preuve du théorème ??.

CHAPITRE 8

THÉORIE DE BROUWER

Un *homéomorphisme de Brouwer* est un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, et sans point fixe.⁽¹⁾ Ces objets sont étudiés à la fois pour eux-mêmes et pour leur utilité dans la compréhension de dynamiques de surfaces plus riches. En effet :

- On trouve dans les homéomorphismes de Brouwer un mélange de complexité et de rigidité, l'impossibilité d'une classification malgré une dynamique très structurée.
- Partons d'un homéomorphisme f préservant l'orientation sur une surface quelconque, et supposons que le complémentaire O des points fixes est connexe. Alors le revêtement universel de O est homéomorphe au plan, et les relevés de f à \tilde{O} n'ont pas de point fixe : ce sont des homéomorphismes de Brouwer. Ainsi, ces objets apparaissent comme “ce qu'il reste de la dynamique lorsqu'on a enlevé les points fixes et la topologie de la surface”.

Le premier résultat de la théorie est l'absence de point périodique : nous démontrons ceci dans la section 8.3. De ce résultat, on peut déduire le *théorème des translations planes*, qui permet de voir tout homéomorphisme de Brouwer comme étant obtenu en recollant des translations.

8.1. Exemples

L'exemple le plus simple est la translation (“la” et non pas “les” car toutes les translations sont conjuguées). Y a-t-il d'autres homéomorphismes de Brouwer ?

a. Construction par restriction. — Considérons l'homéomorphisme linéaire hyperbolique selle $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$. Ce n'est pas un homéomorphisme de Brouwer. Enlevons le quart-de-plan $x \leq 0, y \leq 0$: la restriction R aux trois-quarts de plan complémentaire O est un homéomorphisme sans point fixe d'un ouvert simplement connexe du plan. D'après le théorème de l'application conforme de Riemann, O est (analytiquement) homéomorphe au plan, et R est donc (conjugué à) un homéomorphisme de Brouwer. Notons que ceci donne en fait un difféomorphisme analytique réel. On l'appelle l'*homéomorphisme de Reeb*.

Exercice 8.1.1. — Montrer que R n'est pas conjugué à une translation du plan. Aide : trouver un ensemble compact K qui rencontre tous ses itérés $R^n(K)$.

⁽¹⁾La notion d'orientation est précisée en section 8.7.

Cet homéomorphisme R préserve d'autres ouverts simplement connexes : par exemple, enlevons encore la demi-droite $y = 1, x \leq 0$ ainsi que tous ses itérés. Soit $O' \subset O$ l'ouvert obtenu, la restriction R' de R à O' donne un nouvel exemple d'homéomorphisme de Brouwer

Exercice 8.1.2. — Montrer que R' n'est pas plongeable dans un flot : il n'existe aucun sous-groupe à un paramètre $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'homéomorphismes de O' tel que $\varphi_1 = R'$. En particulier, R' ne peut pas être obtenu en intégrant un champ de vecteurs. Aide : considérer le point $x = (0, 3/4)$ et montrer que toute courbe contenant x et invariante par R' doit s'accumuler sur la demi-droite $x \geq 0, y = 0$. Une telle courbe n'est pas une orbite d'un flot.

En fait, on peut montrer que R' n'a pas de racine carrée (il n'existe aucun R'' tel que $R''^2 = R'$). On en déduit qu'il existe une infinité dénombrable d'homéomorphismes de Brouwer deux à deux non conjugués (considérer les puissances de R'). En réalité, les classes de conjugaison d'homéomorphismes de Brouwer ne sont pas dénombrables.

Exercice 8.1.3. — Notons $p_2 : (x, y) \mapsto y$. Soit C l'espace des courbes de Jordan $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui ont la propriété suivante : il n'existe aucun intervalle non trivial du cercle sur lequel la restriction de $p_2 \circ \gamma$ soit monotone (notamment, γ n'est topologiquement transverse au feuilletage en droites verticales en aucun point).

1) Montrer que C est un G_δ dense de l'espace des courbes de Jordan (muni de la topologie de la convergence uniforme).⁽²⁾

Soit X un champ de vecteurs vertical, suffisamment régulier, défini sur le domaine de Jordan bordé par γ , ne s'annulant en aucun point de l'intérieur du domaine et nul sur γ . Soit $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot obtenu en intégrant X , et $f = \Phi_1$. En identifiant l'intérieur du domaine au plan, on obtient un homéomorphisme de Brouwer.

2) Montrer que f a la propriété suivante : pour tout disque euclidien D , il existe un disque euclidien D' qui rencontre une infinité d'itérés de D .

On dit que f a un ensemble singulier dense dans le plan.

3) Comparer à la situation pour la translation et pour l'homéomorphisme de Reeb (à chaque fois, identifier l'ensemble des points x qui sont dans un disque D comme ci-dessus).

b. Constructions par revêtement. — On peut aussi construire un exemple ayant un ensemble singulier dense par un procédé de revêtement...

c. Construction par modification libre. — A ECRIRE.

d. Construction par composition. — A ECRIRE.

8.2. L'indice le long d'une courbe

Nous définissons successivement l'indice d'un champ de vecteurs n'ayant pas de zéro sur la courbe, puis l'indice d'une transformation n'ayant pas de point fixe sur la courbe, et enfin l'indice d'un point fixe isolé.

⁽²⁾Variante : montrer qu'avec probabilité 1, le mouvement brownien auto-évitant possède cette propriété...

a. Indice d'un champ de vecteurs. — Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Si \vec{v} est un champ de vecteurs continu défini sur γ et ne s'y annulant pas, on appelle indice de \vec{v} le long de γ , et on note $\text{Ind}(\vec{v}, \gamma)$, la variation angulaire de \vec{v} quand on parcourt γ : plus précisément, soit φ le revêtement universel du cercle unité du plan :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \theta &\longmapsto \exp(2i\pi\theta). \end{aligned}$$

L'application

$$f = \frac{\vec{v} \circ \gamma}{\|\vec{v} \circ \gamma\|} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

se relève par φ en une application $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (on a $\varphi \circ F = f$), et on pose

$$\text{Ind}(\vec{v}, \gamma) = F(1) - F(0).$$

Remarquons que si γ est une courbe fermée (c'est-à-dire si $\gamma(0) = \gamma(1)$), l'indice est un nombre entier.

b. Indice d'une application. — Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue définie sur un ouvert U du plan, et E l'ensemble des points fixes de g ; on peut considérer sur $U \setminus E$ le champ de vecteurs sans zéro

$$\vec{g}_x = \frac{g(x) - x}{\|g(x) - x\|}.$$

Si maintenant γ est une courbe dans $U \setminus E$, on pose $\text{Ind}(g, \gamma) = \text{Ind}(\vec{g}, \gamma)$.

Si γ est une courbe fermée, l'entier $\text{Ind}(g, \gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ (en tant que courbe fermée) dans le complémentaire des points fixes de g : en particulier, une courbe qui y est homotope à une courbe constante est d'indice nul. Ceci donne donc un moyen de détecter la présence de points fixes : il suffit de trouver une courbe fermée simple d'indice non nul.

Proposition 8.2.1. — *Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini sur un ouvert simplement connexe du plan. Si l'indice de g le long d'une courbe fermée γ n'est pas nul, alors g a des points fixes.*

L'indice est un invariant de conjugaison, c'est-à-dire que pour tout homéomorphisme φ isotope à l'identité, on a

$$\text{Ind}(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(\gamma)) = \text{Ind}(g, \gamma).$$

le nombre $\text{Ind}(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(\gamma))$ est un entier qui dépend continûment de φ , il est donc constant sur les classes d'isotopie.

c. Indice d'un point fixe. — Soit g comme ci-dessus, et x_0 un point fixe isolé de g , c'est-à-dire un point isolé de l'ensemble E . On définit alors l'indice de x_0 comme l'indice de n'importe quel cercle γ dans U qui entoure x_0 mais n'entoure aucun autre point fixe (γ est orientée dans le sens trigonométrique). Ce nombre ne dépend pas du cercle γ choisi, et ne dépend que de la classe de conjugaison du germe de g en x_0 .

On a alors la formule suivante, qui précise la proposition 8.2.1 : l'indice le long d'une courbe de Jordan γ qui n'entoure qu'un nombre fini de points fixes de g est égal à la somme des indices de ces points fixes.

8.3. Absence de récurrence, lemme de Franks

Soit f un homéomorphisme de Brouwer. Dans cette section, nous démontrons que f n'admet aucune orbite périodique. La preuve produit un résultat plus général, et très intéressant, le *lemme de Franks*, qui peut être vu comme une absence de “pseudo-orbites périodiques”.

a. Énoncé. — On appellera *disque topologique ouvert* toute partie du plan homéomorphe au disque unité ouvert. Un ensemble E est dit *libre* s'il est disjoint de son image ($f(E) \cap E = \emptyset$).

Définition 8.3.1. — Une *chaîne périodique (de disques ouverts)* est une suite (D_1, \dots, D_k) de disques topologiques ouverts

- deux à deux disjoints,
- libres,
- tels que pour tout $i = 1, \dots, k$, $f(D_i)$ rencontre D_{i+1} (l'indice i est considéré modulo k).

Le nombre k est appelé *période* de la chaîne.

DESSIN.

Théorème 8.3.2 (“lemme de Franks”). — *Un homéomorphisme de Brouwer n'admet aucune chaîne périodique de disques ouverts.*

On en déduit facilement le :

Corollaire 8.3.3. — *Un homéomorphisme de Brouwer f n'admet aucune orbite périodique. Mieux : toute orbite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ tend vers l'infini (sort de tout compact).*

Démonstration. — Soit D un disque ouvert libre. Alors il est disjoint de tous ses itérés positifs : sans quoi, si n était le plus petit entier > 0 tel que $f^n(D)$ rencontre D , la suite $(D, f(D), \dots, f^{n-1}(D))$ formerait une chaîne périodique de disques.

Comme tout point est dans un disque ouvert libre (le choisir assez petit !), on en déduit que tout point est *errant*, c'est-à-dire possède un voisinage disjoint de tous ses itérés.

En particulier, f n'a aucun point ω -limite : aucun point du plan n'est valeur d'adhérence d'une orbite (c'est un fait général et facile qu'un point ω -limite n'est pas errant).

Étant donné un point x et un compact K , il n'existe donc qu'un nombre fini d'entiers n tels que $f^n(x) \in K$. Autrement dit, toute orbite tend vers l'infini. \square

b. Stratégie. — Pour démontrer le lemme de Franks, on part d'un homéomorphisme de Brouwer f ; on raisonne par l'absurde, en supposant que f admet une chaîne périodique de disques ouverts.

Lemme 8.3.4. — *S'il existe un homéomorphisme de Brouwer f qui admet une chaîne périodique de disques ouverts de période n , alors il existe un autre homéomorphisme de Brouwer f' qui admet une orbite périodique de période n .*

Lemme 8.3.5. — *Si un homéomorphisme de Brouwer f' admet une orbite périodique de période n , alors f' admet une chaîne périodique de disques ouverts de période 2.*

On applique alors à nouveau le premier lemme : on obtient un nouvel homéomorphisme de Brouwer f'' qui admet une orbite périodique de période 2. On conclut avec un dernier lemme.

Lemme 8.3.6. — *Si f'' est un homéomorphisme de Brouwer, alors f'' n'a pas d'orbite périodique de période 2.*

Notons que toute la difficulté “technique” est concentrée dans la preuve du deuxième lemme.

c. Preuves des lemmes. — On peut commencer par lire la preuve du dernier lemme, qui explique pourquoi un homéomorphisme de Brouwer n'a pas d'orbite périodique de période 2.

Preuve du premier lemme. — Commençons par une remarque simple : si l'on compose f par un homéomorphisme à support⁽³⁾ dans un ensemble libre, alors le résultat est encore un homéomorphisme sans point fixe, donc de Brouwer (une telle opération est baptisée *modification libre* par Morton Brown).

Soit (D_i) une chaîne périodique de période n . Par définition, on peut trouver pour tout i un point $x_i \in D_i$ tel que $f(x_i) \in D_{i+1}$. Soit φ_i un homéomorphisme à support dans D_i tel que $\varphi_i(f(x_{i-1})) = x_i$. Puisque les disques sont deux à deux disjoints, les φ_i commutent deux à deux. Notons Φ le composé de tous les φ_i . Il est clair que la suite (x_1, \dots, x_n) est une orbite périodique de $h' = \Phi \circ h$. \square

On remarque qu'on a utilisé tacitement le fait que les homéomorphismes du disque ouvert à support compact agissent transitivement sur le disque : pour tous $x, y \in \text{Int}(\mathbb{D})$ il existe un homéomorphisme φ tel que $\varphi(x) = y$, et qui est l'identité hors d'un compact de $\text{Int}(\mathbb{D})$ (exercice).

La preuve du second lemme repose sur l'existence de *rectangles de translation*.

Définition 8.3.7. — Soit $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue injective (un plongement). Notons R l'image de φ , et supposons que

- R rencontre son image selon son “bord droit” : $f(R) \cap R = \varphi(\{1\} \times [0, 1])$,
- $\varphi\tau = f\varphi$ sur $\{0\} \times [0, 1]$.

On dira alors que R est un *rectangle de translation*. (DESSIN)

D'après le théorème de Schoenflies (voir section 8.6), pour construire un rectangle de translation il suffit de construire son bord, cad de trouver une courbe de Jordan J telle que

- $f(J) \cap J$ est un intervalle non trivial de J ,
- $f(J) \setminus J$ est situé dans la composante connexe non bornée du complémentaire de J .

Soit R un rectangle de translation, et notons $\text{Int}(R)$ l'intérieur du domaine de Jordan bordé par R (c'est-à-dire l'image par φ du carré ouvert). Soit n le *temps de retour* du rectangle $\text{Int}(R)$, c'est-à-dire le premier entier positif (éventuellement infini) tel que $f^n(\text{Int}(R)) \cap \text{Int}(R) \neq \emptyset$. On a $n \geq 2$ par définition d'un rectangle de translation. On peut alors étendre φ , d'une unique manière, en un plongement de $[0, n[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que

$$\varphi^{-1}f\varphi = \tau \text{ sur } [0, n-1[\times]0, 1[$$

⁽³⁾Le support est l'adhérence de l'ensemble des points non fixes.

où τ est a translation $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$. Autrement dit, f se comporte comme la translation sur $R \cup \dots \cup f^{n-2}(R)$.

Affirmation 8.3.8. — Soit f un homéomorphisme de Brouwer. Supposons que f n'a pas d'orbite périodique de période 2. Alors tout point x est dans l'intérieur d'un rectangle de translation.

Preuve de l'affirmation. — On considère un disque euclidien centré en x qui est critique pour f (“tangent à son image”) : plus précisément D rencontre $f(D)$ mais pas $f(\text{Int}(D))$. Un tel disque s'obtient en partant d'un petit disque qu'on fait grossir jusqu'au premier moment où il touche son image.

Par définition il existe un point y sur ∂D dont l'image est également sur ∂D . Soit \bar{J} une courbe de Jordan incluse dans D , entourant x , et telle que $\bar{J} \cap \partial D = \{y, f(y)\}$: pour fixer les idées, disons que J est la réunion de deux triangles ayant un bord en commun contenant x , un sommet en y pour le premier et en $f(y)$ pour le second). Puisque $f^2(y) \neq y$, et que D est critique, on a $\bar{J} \cap f(\bar{J}) = \{f(y)\}$, et $f(\bar{J})$ est à l'extérieur de \bar{J} : (\bar{J} est une sorte de “rectangle de translation pincé”).

On obtient J en modifiant \bar{J} dans un voisinage arbitrairement petit de $f(y)$, voici comment. Soit B un disque euclidien centré en $f(y)$ et assez petit. Le cercle-frontière de B rencontre \bar{J} en deux points z_1 et z_2 . En suivant ∂B depuis z_1 en s'éloignant de l'intérieur de \bar{J} , on rencontre un premier point z'_1 sur $f(\bar{J})$, on note γ_1 l'arc de cercle que l'on a parcouru de z_1 à z'_1 . On définit symétriquement z'_2 et γ_2 . Enfin, on note γ_3 la portion de la courbe \bar{J} qui va de z'_1 à z'_2 en passant par $f(y)$. On construit alors J en remplaçant dans \bar{J} l'arc $[z_1 f(y)] \cup [f(y) z_2]$ par l'arc $\gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \gamma_2$. On vérifie sans peine que J a les propriétés requises pour former le bord d'un rectangle de translation. \square

DESSINS!!!

Preuve du second lemme. — Soit f' un homéomorphisme de Brouwer ayant une orbite périodique de période n , construisons une chaîne périodique de période 2. On peut bien sûr supposer que f' n'a pas de d'orbite périodique de période 2, sans quoi il n'y a rien à faire. Soit x un point périodique, et R un rectangle contenant x dans son intérieur. Le temps de retour de R est alors un entier $n \geq 2$. On construit maintenant une chaîne de disques périodique (B_1, B_2) , voici comment. On commence par poser $B_2 = f^{n-1}(\text{Int}(R))$; par définition de n , on a $f(B_2) \cap R \neq \emptyset$. Il existe alors un disque topologique ouvert B_1 tel que :

- B_1 est inclus dans $R \cup \dots \cup f^{n-2}(R)$;
- B_1 rencontre $R \cap f(B_2)$ et $f^{n-2}(R)$;
- B_1 est libre.

Pour construire B_1 , il suffit de transporter la situation à l'aide du plongement φ associé comme ci-dessus au rectangle de translation R (partir d'un segment non horizontal $\gamma \subset]0, n-1[\times]0, 1[$ reliant un point de $]0, 1[\times]0, 1[\cap \varphi^{-1}(f^{n-2}(R))$ à n'importe quel point de $]n-2, n-1[\times]0, 1[$; ce segment est libre pour τ , donc un rectangle assez mince basé sur ce segment est encore libre, et on peut prendre pour B_1 l'image par φ d'un tel rectangle). Par construction B_1 est disjoint de B_2 , et (B_1, B_2) est une chaîne périodique de disques ouverts de période 2. \square

Preuve du dernier lemme, d'après Morton Brown. — Soit $(x, f(x))$ une orbite périodique pour un homéomorphisme de Brouwer f . Nous allons trouver une courbe fermée sur laquelle l'indice de f n'est pas nul, ce qui sera contradictoire. Cette courbe J est obtenue en mettant bout à bout n'importe quelle courbe γ reliant x à $f(x)$ et son image $h(\gamma)$. on va utiliser le fait que tout homéomorphisme du plan préservant l'orientation est isotope à l'identité.

Commençons par remarquer que comme $f^2(x) = x$, l'indice de f le long de γ est un demi entier p (faire un DESSIN).

Que vaut l'indice de f le long de $f(\gamma)$? Pour le savoir, nous considérons une isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$ reliant l'identité à f (pour savoir pourquoi f est isotope à l'identité, voir la section 8.8. Pour tout t , conjugurons la situation par f_t : le point $f_t(x)$ est périodique de période 2 pour l'homéomorphisme de Brouwer $f' = f_t f f_t^{-1}$, la courbe $f_t(\gamma)$ relie ce point à son image par f' , l'indice de f_t le long de cette courbe est donc encore un demi-entier. Puisqu'il varie continûment lorsque t varie, il est constant. Pour $t = 0$ ce nombre vaut p , il vaut donc encore p pour $t = 1$, mais il s'agit alors précisément de l'indice de f le long de la courbe $f(\gamma)$.

L'indice de f le long de J vaut donc $2p$, où p est un demi-entier : c'est un entier impair. En particulier, il n'est pas nul, ce qui termine la preuve. \square

d. Énoncé plus fort. — La définition habituelle des chaînes périodiques de disques ouverts est plus générale : on remplace l'item 3 de la définition donnée ci-dessus par :

- tels que pour tout $i = 1, \dots, k$, il existe un entier $n_i > 0$ tel que $f^{n_i}(D_i)$ rencontre D_{i+1} .

Exercice 8.3.9. — Montrer qu'avec cette définition plus générale, le lemme de Franks est encore vérifié. Aide : s'il existe une chaîne pour la définition générale, il en existe aussi une pour la définition restreinte.

e. Adaptation pour une courbe d'indice 1. — A ECRIRE.

f. Petit théorème des translations planes. — En corollaire du lemme de Franks, on voit que le temps de retour d'un rectangle de translation, défini plus haut pour les besoins de la preuve, est toujours infini. L'application φ associée peut alors être prolongée à $\mathbb{R} \times]0, 1[$; son image est un ouvert connexe et simplement connexe, invariant par f , sur lequel la restriction de f est conjuguée à la translation $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ de la bande. Un tel ouvert s'appelle un *domaine de translation*. En notant encore $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$, on a donc :

Théorème 8.3.10. — Soit f un homéomorphisme de Brouwer, tout point x du plan est dans l'image d'un plongement $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\Phi \tau \Phi^{-1} = f$ (en restriction à l'image de Φ).

Le "théorème des translations planes" de Brouwer affirme l'existence des domaines de Brouwer, qui sont des domaines de translation qui "vont à l'infini transversalement à la dynamique" ; il est l'objet de la section suivante.

8.4. Décompositions en briques, théorème des translations planes

a. Énoncés. —

Théorème 8.4.1 (théorème des translations planes, Brouwer)

Soit f un homéomorphisme de Brouwer, tout point x_0 du plan est dans l'image d'un plongement $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que

1. $\Phi\tau\Phi^{-1} = f$ (en restriction à l'image de Φ),
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, la restriction de Φ à la droite verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$ est propre.

L'image d'un plongement Φ comme dans l'énoncé s'appelle un *domaine de Brouwer*. Définissons et commentons la deuxième propriété. Une application $\varphi : X \rightarrow Y$ est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact est compact. Pour des espaces de départ et d'arrivée localement compacts, ceci revient à dire que l'application φ se prolonge continûment aux compactifiés d'Alexandroff en une application $\hat{\varphi} : X \cup \{\infty\} \rightarrow Y \cup \{\infty\}$ qui envoie l'infini de X sur l'infini de Y . Ainsi, la deuxième propriété du théorème dit que pour toute droite verticale Δ du plan, $\Phi(\Delta) \cup \{\infty\}$ est une courbe de Jordan dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. D'après le théorème de Schoenflies, il existe alors un homéomorphisme du plan qui envoie $\Phi(\Delta)$ sur une droite euclidienne. On appellera *droite topologique* toute partie du plan image de la droite réelle par un plongement propre (ou, de façon équivalente, image d'une droite euclidienne du plan par un homéomorphisme du plan).

Définition 8.4.2. — Une *droite de Brouwer* de f est une droite topologique Δ vérifiant

1. $\Delta \cap f(\Delta) = \emptyset$ (Δ est libre);
2. Δ sépare⁽⁴⁾ $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.

Soit Δ une droite topologique vérifiant le premier item (Δ est libre pour h). On peut alors orienter Δ de façon à ce que $f(\Delta)$ soit située à droite de la droite orientée $\vec{\Delta}$. Alors le second item revient alors à demander que $f^{-1}(\Delta)$ est situé à gauche de $\vec{\Delta}$, ou encore que Δ est à gauche de $f(\vec{\Delta})$. On pourrait dire que les droites “parallèles” $\vec{\Delta}$ et $f(\vec{\Delta})$ sont “orientées dans le même sens”.

Définition 8.4.3. — Si Δ est une droite de Brouwer, on définit comme ci-dessus la *droite de Brouwer orientée* $\vec{\Delta}$.

Voici encore une définition équivalente. Soit $\vec{\Delta}$ une droite topologique orientée, et $D(\vec{\Delta})$ l'ouvert à droite de $\vec{\Delta}$. Alors $\vec{\Delta}$ est une droite de Brouwer orientée si et seulement si $D(\vec{\Delta})$ est un *attracteur strict*, au sens où $f(D(\vec{\Delta}) \cup \Delta) \subset D(\vec{\Delta})$.

On peut alors donner une forme équivalente du théorème.

Remarque 8.4.4. — Soit f un homéomorphisme de Brouwer. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. le théorème des translations planes;
2. tout point x_0 du plan est sur une droite de Brouwer;
3. pour tout point x_0 du plan il existe une droite de Brouwer Δ qui sépare x_0 et $f(x_0)$.

⁽⁴⁾Une partie E d'un espace topologique X sépare deux parties $A, B \subset X$ si A et B sont incluse dans deux composantes connexes distinctes de $X \setminus E$.

Preuve de l'équivalence entre les trois énoncés. — Nous montrons d'abord que l'item 1 implique les deux autres, puis que chacun des deux autres implique l'item 1.

Soit Φ un plongement comme dans l'énoncé du théorème 8.4.1. Quitte à composer Φ par une translation, on peut supposer que $x_0 = \Phi(0, 0)$. L'image par Φ d'une droite verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$ est une droite de Brouwer pour f : en effet, c'est une droite topologique, elle est libre pour f puisque la droite verticale est libre pour la translation τ , et *comme elle est propre*, elle sépare les ouverts connexes $\Phi(]-\infty, x[\times \mathbb{R})$ et $\Phi(]x, +\infty[\times \mathbb{R})$, qui contiennent respectivement $f^{-1}(\Delta)$ et $f(\Delta)$. La droite de Brouwer $\Delta = \Phi(\{0\} \times \mathbb{R})$ est solution du deuxième énoncé. La droite de Brouwer $\Delta' = \Phi(\{1/2\} \times \mathbb{R})$ est solution du troisième énoncé. Ainsi, l'item 1 implique chacun des deux autres.

On montre maintenant que l'item 2 implique l'item 1. Soit maintenant Δ une droite de Brouwer pour f , passant par x_0 . On peut définir, sur la réunion des deux droites verticales d'abscisses respectives 0 et 1, un plongement Φ d'image $\Delta \cup f(\Delta)$, et vérifiant $\Phi\tau\Phi^{-1} = f$ sur Δ . On utilise maintenant l'item 2 de la définition des droites de Brouwer : comme les droites $\vec{\Delta}$ et $f(\vec{\Delta})$ sont "orientées dans le même sens", on peut étendre Φ en un plongement propre de la bande $[0, 1] \times \mathbb{R}$, toujours noté Φ . Le fait que le plongement soit propre peut se traduire de la manière suivante : en considérant la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, Φ s'étend en envoyant ∞ sur ∞ (et est alors un homéomorphisme sur son image). Remarquons que la construction de l'extension Φ à la bande utilise le théorème de Schoenflies (plusieurs fois).

On peut maintenant étendre Φ en un plongement de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , vérifiant l'énoncé du théorème des translations planes, d'une unique façon (comme pour les rectangles de translation).

La même construction permet de montrer que l'item 3 implique l'item 1. □

Exercice 8.4.5. — Dessiner une image de \mathbb{R} par une application continue injective non propre 1) de façon à ce que l'image ne soit pas homéomorphe à \mathbb{R} , 2) de façon à ce que l'image soit homéomorphe à \mathbb{R} .

Exercice 8.4.6. — Dessiner une "fausse droite de Brouwer" pour τ , c'est-à-dire une droite topologique libre mais qui ne sépare pas son image de sa préimage ; dessiner les orientations de $\vec{\Delta}$ et $f(\vec{\Delta})$. Dessiner un domaine de Brouwer strictement plus petit que le plan.

Dessiner une droite de Brouwer pour l'homéomorphisme de Reeb. Dessiner un domaine de Brouwer.

Exercice 8.4.7. — Écrire les détails de la construction du plongement Φ dans la remarque 8.4.4, en explicitant les utilisations du théorème de Schoenflies.

b. Preuve du théorème des translations planes. — *Nous adaptons ici l'article de Patrice Le Calvez et Alain Sauzet, Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer. Exposition. Math. 14 (1996), no. 3, 277–287.*

Soit f un homéomorphisme de Brouwer. Nous allons construire une "décomposition en briques", qui est une sorte de triangulation du plan est adaptée à la dynamique, au sens où les triangles sont libres pour f . On a alors une procédure dynamique pour construire un attracteur qui est une réunion de triangles. On trouve enfin une droite de Brouwer dans le bord de cet attracteur.

Plutôt que de donner une définition des décompositions en briques, on commence par en construire une. On spécifie un point x_0 du plan, celui pour lequel on cherche un domaine de Brouwer.

Affirmation 8.4.8. — Quitte à conjuguer f , on peut supposer qu'il existe trois carrés R_{-1}, R_0, R_1 adjacents (R_0 a un côté commun avec R_{-1} , et le côté opposé commun avec R_1) vérifiant :

- ces trois carrés sont libres ;
- $f(R_{-1})$ rencontre R_0 , $f(R_0)$ rencontre R_1 ;
- R_0 contient x_0 .

En effet, d'après la section précédente, x_0 est dans l'intérieur d'un rectangle de translation R , et donc dans l'intérieur d'un domaine de translation : soit Φ le plongement fourni par le théorème 8.3.10. Pour la translation, on peut certainement trouver trois carrés vérifiant les propriétés voulues ; on obtient R_{-1}, R_0, R_1 comme les images de ces trois carrés par le plongement Φ . Nos trois ensembles ne sont pas des carrés, mais on peut trouver un homéomorphisme Ψ du plan qui les envoie sur trois vrais carrés, et $\Psi f \Psi^{-1}$ aura les propriétés voulues.

Les trois carrés R_{-1}, R_0, R_1 fournis par l'affirmation sont les premières briques de notre décomposition. On recouvre maintenant le plan par une famille localement finie de rectangles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, en respectant la façon dont le maçon ajuste ses briques : *trois rectangles de la famille n'ont jamais un coin en commun.*

Quitte à redécouper chaque brique un nombre fini de fois en conservant la propriété du maçon, on peut supposer de plus que chaque brique est libre. Résumons la construction par une définition et un lemme.

Définition 8.4.9. — On peut définir une *décomposition en briques pour f* comme une famille localement finie de disques topologiques fermés appelés *briques* qui recouvrent le plan, qui sont libres pour f , la réunion des bords des briques ne contenant aucun ensemble homéomorphe à une croix (propriété du maçon). La décomposition est *adaptée au point x_0* si ce point est dans l'intérieur d'une brique R_0 dont l'image $f(R_0)$ rencontre une brique R_1 adjacente à R_0 , et dont la préimage $f^{-1}(R_0)$ rencontre une brique R_{-1} adjacente à R_0 .⁽⁵⁾

Lemme 8.4.10. — *Pour tout homéomorphisme de Brouwer f et tout point x_0 du plan, il existe une décomposition en briques pour f adaptée au point x_0 .*

La principale propriété dynamique de la décomposition est une adaptation du lemme de Franks. Disons qu'une suite finie (B_1, \dots, B_n) est une *chaîne de briques* si $f(B_i)$ rencontre B_{i+1} pour tout $i = 1, \dots, n - 1$; si $f(B_n)$ rencontre B_1 , nous dirons que la chaîne est *périodique*.

Lemme 8.4.11. — *Il n'existe pas de chaîne de briques périodique.*

Démonstration. — Si, pour tout i , $f(B_i)$ rencontre l'intérieur de B_{i+1} , alors la suite $(\text{Int}(B_i))$ forme une chaîne périodique de disques ouverts, et il suffit d'appliquer le lemme de Franks. La difficulté vient du fait que certaines transitions peuvent avoir lieu sur le bord des briques.

⁽⁵⁾La construction ci-dessus a quelques propriétés supplémentaires, par exemple l'intersection de deux briques est vide ou connexe.

Raisonnons par l'absurde, et considérons une chaîne de briques périodique (B_1, \dots, B_n) dont la période n est la plus petite possible. En particulier, les briques de la chaîne sont deux à deux distinctes. La minimalité de n entraîne aussi

$$f(B_i) \cap B_j \neq \emptyset \Leftrightarrow j = i + 1 \pmod{1}.$$

Choisissons pour chaque i un point x_i dans la brique B_i dont l'image est dans la brique B_{i+1} . Par minimalité ces n points sont tous distincts. De plus si on a $f(x_i) = x_j$, alors $f^2(x_i)$ est à la fois dans $f(B_{i+1})$ et dans B_{j+1} , et donc $j = i + 1 \pmod{1}$. Ceci montre que les n ensembles $\{f(x_i), x_{i+1}\}$ (paires ou singletons) sont deux à deux d'intersection vide.

Soit maintenant β_{i+1} un arc simple joignant $f(x_i)$ à x_{i+1} , dont l'intérieur est inclus dans l'intérieur de B_{i+1} . Ce qui précède montre que les arcs β_i sont deux à deux disjoints. Ils sont clairement libres. En épaississant légèrement β_i on trouve un disque topologique ouvert libre D_i le contenant, les D_i étant encore deux à deux disjoints, et on obtient ainsi une chaîne périodique de disques ouverts (D_i) . Ceci contredit le lemme de Franks. \square

Preuve du théorème des translations planes. — Nous considérons une décomposition en briques pour f adaptée au point x_0 . Soit $n \geq 1$. Considérons les chaînes de briques (non périodiques!) (B_0, \dots, B_n) , de longueur $n + 1$, commençant par $B_0 = R_0$. On définit l'ensemble A_n^+ comme la réunion des briques B_n ainsi obtenues, puis l'ensemble A^+ comme la réunion des ensembles A_n^+ pour $n \geq 1$. Autrement dit, A_1^+ est l'union des briques qui rencontrent $f(R_0)$, A_2^+ est l'union des briques qui rencontrent $f(A_1^+)$, etc.. Nous allons démontrer que A^+ possède les propriétés suivantes.

1. $f(A^+) \subset \text{Int}(A^+)$ (A^+ est un *attracteur strict*);
2. A^+ est connexe et non borné;
3. A^+ est une sous-variété à bord du plan : en particulier, son bord est une sous-variété sans bord de dimension 1, c'est-à-dire une réunion disjointe de cercles et de droites topologiques;
4. A^+ contient R_1 , mais ne contient pas R_0 .
Soit Δ une composante connexe de ∂A^+ qui rencontre R_0 . Alors :
5. Δ est une droite topologique;
6. Δ est une droite de Brouwer qui sépare x_0 et $f(x_0)$.

Si (B_1, \dots, B_n) est une chaîne de briques, et si B_{n+1} est une brique qui rencontre $f(B_n)$, alors $(B_1, \dots, B_n, B_{n+1})$ est encore une chaîne de briques. Donc la réunion des briques qui contiennent $f(A^+)$ est incluse dans A^+ . D'autre part tout point est dans l'intérieur de l'union des briques qui le contiennent. On en déduit la première propriété. Notons que A^+ est le plus petit ensemble qui est une réunion de briques, qui contient $f(R_0)$, et qui vérifie $f(A^+) \subset \text{Int}(A^+)$.

Pour la deuxième propriété, le point clé est que la décomposition est adaptée à x_0 . Tout d'abord, l'ensemble A_{n+1}^+ est la réunion des briques qui rencontrent $f(A_n^+)$; une récurrence immédiate montre que les ensembles A_n^+ sont connexes. Puisque $A_1^+ = R_1$ est adjacent à $R_2 \subset A_2^+$, la réunion de A_1^+ et de A_2^+ est connexe. Une récurrence immédiate montre maintenant que $A_n^+ \cup A_{n+1}^+$ est connexe pour tout n . On en déduit que A^+ est connexe. Il n'est pas borné car c'est un attracteur et les orbites tendent vers l'infini.

La troisième propriété vient simplement de la propriété du maçon. En effet, Grâce à elle, on peut vérifier que *toute réunion de briques est une sous-variété à bord de \mathbb{R}^2* . En

particulier, le bord d'une réunion de briques est une sous-variété de dimension 1 (sans bord), c'est-à-dire une réunion de courbes de Jordan et de droites topologiques.

L'attracteur A^+ contient R_1 puisque $f(R_0)$ rencontre R_1 ; elle ne contient pas R_0 car il n'existe pas de chaîne de briques périodique.

Remarquons maintenant que l'homéomorphisme f^{-1} vérifie des hypothèses symétriques. Ainsi, on peut définir le répulseur A^- comme l'union des briques B_{-n} telles qu'il existe une chaîne (B_{-n}, \dots, B_0) avec $n \geq 1$. Ce répulseur vérifie des propriétés analogues à celles de A^+ . De plus, comme il n'existe pas de chaîne périodique, les ensembles A^-, R_0 et A^+ ont leurs intérieurs deux à deux disjoints. Rappelons que A^+ contient R_1 , et A^- contient R_{-1} , qui rencontrent chacun R_0 .

Soit Δ une composante connexe de ∂A^+ qui rencontre R_0 . Puisque Δ est une droite topologique ou une courbe de Jordan, elle sépare le plan en deux ouverts : l'un, que l'on notera $d(\Delta)$, contient $\text{Int}(A^+)$, et l'autre, noté $g(\Delta)$, contient $A^- \cup \text{Int}(R_0)$. Puisque A^+ comme A^- sont non bornés, on voit que Δ ne peut pas être une courbe de Jordan : c'est donc une droite topologique. Puisque A^+ est un attracteur strict, la droite Δ est libre, et son image $f(\Delta)$ est incluse dans l'ouvert $d(\Delta)$. Quant à sa préimage $f^{-1}(\Delta)$, elle rencontre $f^{-1}(R_0)$ qui est inclus dans A^- , elle est donc incluse dans l'ouvert $g(\Delta)$. Autrement dit, la droite topologique libre Δ sépare son image de sa préimage : c'est une droite de Brouwer. Rappelons que $x_0 \in \text{Int}(R_0) \subset g(\Delta)$, et que $f(x_0) \in f(R_0) \subset \text{Int}(A^+)d(\Delta)$, autrement dit Δ sépare x_0 et $f(x_0)$. Ceci termine la preuve du théorème des translations planes. \square

8.5. Énoncé du théorème feuilleté équivariant

Dans cette section, nous décrivons la version feuilletée équivariante du théorème des translations planes, due à Patrice Le Calvez. Tout ce qui suit est fortement inspirée de l'introduction de l'article⁽⁶⁾. Cette version a de nombreuses applications à la dynamique topologique de surface : il s'agit probablement de l'outil le plus abouti dont dispose le chasseur d'orbites périodiques. Comme exemple d'application simple, nous démontrerons le théorème de Poincaré-Birkhoff. *Nous ne donnerons pas de preuve du théorème feuilleté équivariant* (la preuve est longue et difficile!).

Patrice Le Calvez a d'abord démontré une version feuilletée du théorème de Brouwer. Ce théorème n'a pas d'application, mais il s'agit d'un premier pas vers la version équivariante. Le théorème des translations planes affirmait que par chaque point du plan passe une droite de Brouwer ; il s'agit maintenant de recouvrir le plan par une famille cohérente de droites de Brouwer.

Théorème 8.5.1 (Théorème des translations planes feuilleté, P. Le Calvez)

Soit F un homéomorphisme de Brouwer. Il existe alors un feuilletage orienté \mathcal{F} du plan, dont chaque feuille est une droite de Brouwer orientée pour F .

Voici maintenant la version équivariante.

⁽⁶⁾Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **102** (2005), 1–98.

Théorème 8.5.2 (Théorème des translations planes feuilleté équivariant, Patrice Le Calvez)

Soit G un groupe discret d'homéomorphismes du plan préservant l'orientation, agissant librement et proprement. Soit F un homéomorphisme de Brouwer commutant avec les éléments de G . Il existe alors un feuilletage orienté du plan, invariant sous l'action de G , dont toute feuille est une droite de Brouwer orientée de F .

L'hypothèse sur l'action de G revient à demander que \mathbb{R}^2/G est une surface S . Traduisons alors hypothèse et conclusion du théorème sur la surface S . L'homéomorphisme F induit un homéomorphisme f de S qui est isotope à l'identité, notons $(f_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie. Pour tout $z \in S$, on définit l'arc $\gamma_z : t \mapsto f_t(z)$. L'hypothèse “ F est un homéomorphisme de Brouwer” se traduit de la façon suivante : elle revient à demander que f n'ait pas de point fixe z contractile, c'est-à-dire tel que γ_z soit un lacet homotope à 0 dans S . Traduire la conclusion est plus délicat. Tout d'abord, notons que le feuilletage \mathcal{F} se projette sur S en un feuilletage $\pi(\mathcal{F})$. Il faut maintenant traduire la notion de droite de Brouwer orientée. Pour ceci, commençons par la remarque suivante. On dit qu'un arc simple est *positivement transverse* au feuilletage si, il existe un homéomorphisme entre un voisinage de l'arc et un ouvert du plan, qui envoie les morceaux de feuilles orientées sur des segments verticaux orientés vers le haut, et qui envoie l'arc sur un segment de l'axe des abscisses parcouru vers la droite.

Affirmation 8.5.3. — Pour tout point z du plan, il existe un arc simple Γ'_z positivement transverse au feuilletage \mathcal{F} , joignant z à $F(z)$.

Démonstration. — Notons $\vec{\Delta}_z$ la feuille passant par z . Puisque $\vec{\Delta}_z$ est une droite de Brouwer orientée, $f(z)$ est inclus dans l'ouvert à droite de $\vec{\Delta}_z$. Soit W l'ensemble des points qui peuvent être joints depuis z par un arc positivement transverse au feuilletage. Il s'agit d'une partie ouverte, réunion de feuilles de \mathcal{F} . Pour toute feuille orientée $\vec{\Delta} \neq \vec{\Delta}_z$ du bord de W , W est inclus dans l'ouvert à droite de $\vec{\Delta}(\dots)$; en particulier, z est à droite de $\vec{\Delta}$. Si $f(z)$ n'était pas dans W , il serait donc à gauche d'une feuille $\vec{\Delta}$ du bord de W , mais dans ce cas z serait aussi à gauche de cette feuille (encore par définition des droites de Brouwer orientées), ce qui serait absurde. \square

L'arc Γ'_z se projette sur la surface S en un arc (pas forcément simple) qui est isotope à γ_z à extrémités fixées, et qu'on dira encore positivement transverse au feuilletage $\pi(\mathcal{F})$ ⁽⁷⁾. Pour simplifier, on dira simplement que l'isotopie (f_t) est positivement transverse au feuilletage $\pi(\mathcal{F})$. On peut maintenant donner un énoncé équivalent au théorème précédent.

Théorème 8.5.4 (feuilleté équivariant, deuxième version)

Soit f un homéomorphisme d'une surface S , isotope à l'identité, et (f_t) une isotopie de l'identité à f . Supposons que f n'ait pas de point fixe contractile. Il existe alors un feuilletage orienté \mathcal{F} de S , qui est transverse à l'isotopie (f_t) .

⁽⁷⁾On peut définir directement la notion d'arc (non simple) $\gamma' : [0,1] \rightarrow S$ positivement transverse à un feuilletage de S , en disant que $[0,1]$ est recouvert par des intervalles ouverts I sur lesquels la restriction de γ' est un arc simple positivement transverse, comme plus haut.

Dans cet énoncé, le mot “surface” désigne une surface sans bord orientable connexe, pas nécessairement compacte. Le cas non compact est important pour les applications; en particulier, S sera souvent obtenu en partant d’un homéomorphisme agissant sur une surface compacte et en enlevant l’ensemble des points fixes.

a. Première application. — Pour les applications du théorème, la philosophie est la suivante. On se donne certaines hypothèses sur l’homéomorphisme f . On traduit ces hypothèses sur le feuilletage \mathcal{F} . On en déduit des propriétés dynamiques du feuilletage, qu’on retraduit en des résultats dynamiques sur l’homéomorphisme f . Un des points clé est que la dynamique des feuilletages de surface est beaucoup plus facile que la dynamique des homéomorphismes de surface.

Essayons avec l’un des plus anciens théorèmes d’existence d’orbites périodiques sur les surfaces, et qui sert de modèle à beaucoup de résultats plus récents.

Théorème 8.5.5 (Poincaré-Birkhoff⁽⁸⁾). — Soit f un homéomorphisme de l’anneau compact $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, isotope à l’identité. Soit F l’homéomorphisme de la bande $\mathbb{R} \times [0, 1]$ obtenu en relevant l’isotopie. On suppose que

1. f préserve la mesure de Lebesgue de l’anneau,
2. F pousse les points des deux bords dans des sens opposés.

Alors F a un point fixe.

L’homéomorphisme F préserve les deux bords de la bande; en identifiant naturellement chacun des bords à \mathbb{R} par la première coordonnée, la restriction de F s’identifie à deux homéomorphismes F_0 et F_1 de la droite réelle; Le sens précis de la deuxième hypothèse est alors : pour tout x réel, $F_0(x) < x$ et $F_1(x) > x$.

On en déduit facilement un résultat apparemment beaucoup plus fort.

Corollaire 8.5.6. — Soit f un homéomorphisme de l’anneau compact $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, isotope à l’identité. On suppose que

1. f préserve la mesure de Lebesgue de l’anneau,
 - 2bis. les nombres de rotations de f sur les deux cercles bords sont distincts,
- alors f a une infinité d’orbite périodique.

Preuve du corollaire. — Soit F n’importe quel relevé de f , alors les homéomorphismes de \mathbb{R} F_0 et F_1 sont des relevés d’homéomorphismes du cercle, de nombres de translation ρ_0 et ρ_1 distincts. Supposons par exemple $\rho_0 < \rho_1$, et choisissons un rationnel irréductible $\frac{p}{q}$ entre les deux. Alors l’homéomorphisme f^q et son relevé $\tau^{-p}F^q$ vérifient les hypothèses du premier théorème de Poincaré-Birkhoff. On en déduit que $\tau^{-p}F^q$ a un point fixe, et donc que f a une orbite périodique. On montre facilement que la période est exactement q . En appliquant ceci pour des rationnels de dénominateurs arbitrairement grand, on obtient le résultat. \square

Preuve du théorème de Poincaré-Birkhoff à partir du théorème feuilleté équivariant

On va montrer plus fort : si F n’a pas de point fixe, alors il existe une courbe fermée simple essentielle disjointe de son image, ou il existe un arc simple reliant les deux bords de la bande $\mathbb{R} \times [0, 1]$, disjoint de son image par F . Ceci implique le théorème.

Comme expliqué plus haut, chaque application du théorème feuilleté équivariant utilise un résultat sur les feuilletages, voici ce dont nous avons besoin ici. On considère le tore

obtenu à partir de l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [0, 2]$ en recollant les deux bords, qui contient l'anneau \mathbb{A} . Si \mathcal{F} est un feuilletage du tore, alors ou bien il existe une feuille fermée incluse dans \mathbb{A} (et isotope au bord), ou bien il existe une feuille qui traverse \mathbb{A} .

Admettons ce résultat auxiliaire sur les feuilletages. Pour se débarrasser du bord de \mathbb{A} (le théorème feuilleté est énoncé seulement sur les surfaces sans bord), on considère le tore obtenu en doublant \mathbb{A} , sur lequel f agit naturellement ; on note encore f l'homéomorphisme du tore ainsi obtenu. Supposons que F n'a pas de point fixe. Alors f n'a pas de point fixe contractile. On peut donc appliquer le théorème feuilleté équivariant, et obtenir un feuilletage orienté \mathcal{F} sur le tore, transverse à l'isotopie (f_t) . Si \mathcal{F} possède une feuille fermée dans \mathbb{A} (isotope au bord), comme \mathbb{A} est invariant par f , et que le feuilletage est transverse à l'isotopie, cette feuille est une courbe simple essentielle disjointe de son image, et c'est gagné. Sinon, d'après le résultat auxiliaire sur les feuilletages, il existe une feuille qui rencontre les deux bords de l'anneau. Là encore, cette feuille est disjointe de son image par F (pas nécessairement par f), ce que l'on voulait. \square

Exercice 8.5.7. — Démontrer le résultat auxiliaire sur les feuilletages. Aide : utiliser le théorème de Poincaré-Bendixson pour montrer que si une demi-feuille est entièrement incluse dans l'anneau alors l'anneau contient une feuille fermée.

8.6. Appendice 1 : le théorème de Schoenflies

On note \mathbb{D}^2 le disque unité fermé du plan. Un *plongement* est une application continue injective ; rappelons qu'un plongement d'un espace compact est un homéomorphisme sur son image.

Théorème. — *Tout plongement $\varphi : \partial\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s'étend en un homéomorphisme du plan.*

On trouvera de nombreuses références dans le texte de Siebenmann déjà cité (*The Osgood-Schoenflies theorem revisited*, Russain math. survey **60** (4), 2005.). Pour une preuve simple, voir l'article de Cairn ou le livre de Bing (S. S. Cairns, *An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 860-867. R. H. Bing, *The geometric topology of 3-manifolds*, (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 40) Amer. Math. Soc., Providence, RI 1983).

En dynamique, on peut souvent se contenter d'un énoncé plus faible, où l'on suppose que le plongement φ est *localement plat*, c'est-à-dire qu'il s'étend à un voisinage de $\partial\mathbb{D}^2$. Cette hypothèse rend la preuve plus facile. Rappelons le théorème de Schoenflies ne se généralise en dimension supérieure qu'en rajoutant cette hypothèse de platitude locale (sphères d'Alexander).

On a souvent besoin de la version à support compact.

Corollaire 8.6.1. — *Soient $D_1, D_2 \subset \text{Int}\mathbb{D}^2$ deux ensembles homéomorphes à \mathbb{D}^2 . Alors il existe un homéomorphisme Φ à support dans \mathbb{D}^2 tel que $\Phi(D_1) = D_2$.*

Ici encore, l'énoncé s'étend aux dimensions supérieures en rajoutant une hypothèse de platitude locale. Cependant, la preuve en est très délicate (ce résultat a été connu pendant longtemps sous le nom d'"annulus conjecture" ; le cas de la dimension 4, qui est traité à part, est particulièrement difficile). En dimension deux, voici un schéma de preuve possible. On trouve d'abord deux segments reliant chacun le bord de \mathbb{D}^2 au bord de D_1 . On découpe ainsi \mathbb{D}^2 en trois domaines, qui sont chacun homéomorphes au disque (d'après le théorème de Schoenflies). On conclut en faisant le même découpage pour D_2 .

Remarquons qu'il n'est pas vrai que tout plongement du bord de l'anneau $\mathbb{D}^2 \setminus \text{Int}(D_1)$ se prolonge à l'anneau (trouver deux types d'obstruction). De même, il faut noter que l'homéomorphisme fourni par le théorème de Schoenflies ne préserve pas nécessairement l'orientation.

8.7. Appendice 2 : orientation

On cherche à définir de façon élémentaire l'orientation du plan, et la notion d'homéomorphisme préservant l'orientation.

Soit \mathbb{S}^1 le cercle unité (orienté) du plan. Soit $x \in \mathbb{R}^2$, et C_x l'ensemble des applications continues de \mathbb{S}^1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, munie de la topologie de la convergence uniforme. L'ensemble des composantes connexes de C_x est indexé par \mathbb{Z} , un représentant de chaque composante connexe étant donné par une application $z \mapsto x + z^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si $t \mapsto x(t)$ est un chemin dans le plan, et $\gamma_0 \in C_{x(0)}$, il existe un chemin continu $t \mapsto \gamma(t)$, issu de γ_0 , tel qu'à chaque temps t on ait $\gamma(t) \in C_{x(t)}$ (par exemple, il suffit de translater γ_0 du vecteur envoyant $x(0)$ en $x(t)$). De plus, on montre que la composante connexe de $\gamma(1)$ dans $C_{x(1)}$ ne dépend que de γ_0 . On obtient ainsi une correspondance

canonique entre les composantes connexes de C_x et celles de $C_{x'}$ pour tous x, x' dans le plan. Notamment, si $R > d(x, x')$ alors les classes de $z \mapsto x + Rz^k$ dans C_x et dans $C_{x'}$ se correspondent. Ainsi, on a une bijection canonique $i \mapsto c_x(i)$ entre \mathbb{Z} et C_x , pour tout x .

Soit h un homéomorphisme du plan. Alors pour tout x , h induit un homéomorphisme de C_x sur $C_{h(x)}$. Cet homéomorphisme induit une application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $h(c_x(i)) = c_{h(x)}(\varphi(i))$. En utilisant l'inverse de h on montre que φ est la multiplication par 1 ou -1 . De plus, φ ne dépend pas du choix de x . On dira alors que h *préserve l'orientation* si $\varphi(i) = i$ pour tout i , que h *renverse l'orientation* sinon.

Il est clair que si h est isotope à l'identité alors h préserve l'orientation. La réciproque est plus délicate, et utilise le théorème de Schoenflies dans sa version à support compact.

8.8. Appendice 3 : l'espace des homéomorphismes du plan

On munit l'espace des $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ homéomorphismes du plan de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Théorème. — *L'espace $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ a exactement deux composantes connexes : tout homéomorphisme du plan est isotope soit à l'identité, soit à la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$.*

Commençons par le cas des homéomorphismes du disque, qui est bien plus facile.

Proposition 8.8.1. —

1. *L'espace $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2)$ des homéomorphismes du disque qui sont l'identité sur le bord est connexe par arcs.*
2. *L'espace $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2)$ des homéomorphismes du disque a deux composantes connexes, celle de l'identité et celle de la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$.*
3. *L'espace $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2)$ a deux composantes connexes, celle de l'identité et celle de la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$.*

Preuve de la proposition. — La preuve du premier point est appelé "astuce d'Alexander". Soit $h \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2)$. On voit \mathbb{D}^2 comme le disque unité du plan, et on commence par étendre h par l'identité hors de \mathbb{D}^2 . On définit alors un chemin (h_t) de h à l'identité dans $h \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2)$ en posant $h_0 = \text{Id}$ et

$$h_t(x) = th\left(\frac{x}{t}\right), t \in]0, 1].$$

(autrement dit, on conjugue h par l'homothétie de rapport t ; noter que h_t est à support dans le disque de rayon t).

Passons au deuxième point. Soit $h \in \text{Homeo}(\mathbb{D}^2)$. En composant éventuellement h par la symétrie, on se ramène à un homéomorphisme du disque qui préserve l'orientation sur le bord, et on doit montrer qu'un tel h est isotope à l'identité.

Soit Φ la restriction de h au bord du disque, vu comme un homéomorphisme du cercle \mathbb{S}^1 . Il est facile de voir que l'espace des homéomorphismes croissants du cercle est connexe par arcs. Soit (Φ_t) un chemin de l'identité à Φ dans cet espace; on définit alors un chemin (g_t) dans $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2)$, issu de l'identité, par

$$g_t(rz) = r\Phi_t(z) \quad (r \in [0, 1], z \in \mathbb{S}^1).$$

Puisque g_1 coïncide avec h sur le bord du disque, on en déduit un chemin de h à un homéomorphisme $h' = g_1^{-1} \circ h$ qui est l'identité sur le bord. On conclut à l'aide du premier point.

Pour le troisième point, on peut utiliser une construction complètement symétrique. Une autre possibilité est de remarquer que la conjugaison par l'inversion par rapport au cercle unité envoie l'espace $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2)$ sur l'espace $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2, 0)$ des homéomorphismes du disque qui fixent 0. On vérifie alors que toutes les déformations précédentes marchent aussi dans cet espace. \square

Exercice 8.8.2. — Vérifier que le chemin (h_t) de l'astuce d'Alexander est bien continu. Montrer que ce chemin donne en fait une déformation continue de tout l'espace sur l'identité.

Preuve du théorème. — Soit h un homéomorphisme du plan. Soit D_1 le disque unité, et D un autre disque euclidien dont l'intérieur contient D_1 et $h(D_1)$.

D'après le corollaire du théorème de Schonflies ("annulus conjecture"), il existe un homéomorphisme Φ à support dans D qui envoie D_1 sur $h(D_1)$. D'après l'astuce d'Alexander, Φ est isotope à l'identité. Notre homéomorphisme h est donc isotope à un homéomorphisme h' vérifiant $h'(D_1) = D_1$.

Quitte à composer par la symétrie, on peut maintenant supposer que h' préserve l'orientation sur le bord de D_1 . On cherche alors une isotopie de h' à l'identité.

D'après le deuxième point de la proposition 8.8.1, la restriction de h' au disque D_1 est isotope à l'identité parmi les homéomorphismes du disque; d'après le troisième point, la même chose est vraie sur le complémentaire du disque. En recollant ces deux isotopies on obtient une isotopie de h' à l'identité parmi les homéomorphismes du plan. Ceci termine la preuve. \square

CHAPITRE 9

ORBITES PÉRIODIQUES

9.1. Ensemble de rotation et orbites périodiques

Théorème 9.1.1 (Franks-Le Calvez). — Soit f un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, F un homéomorphisme du plan qui relève f . Supposons que F n'a pas de point fixe. Alors

1. le vecteur 0 n'est pas dans l'intérieur de l'ensemble $\rho(F)$;
2. aucune mesure ergodique n'a un vecteur de rotation nul, et en particulier 0 n'est pas un point extrémal de $\rho(F)$;
3. si $0 \in \partial\rho(F)$, alors sa droite d'appui a une pente irrationnelle.

Corollaire 9.1.2. — Soit f un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, F un homéomorphisme du plan qui relève f . Si $\vec{v} = (\frac{p}{q}, \frac{p'}{q})$ est dans l'intérieur de $\rho(F)$, ou bien est un point extrémal de $\rho(F)$, ou bien est dans le bord avec une droite d'appui de pente irrationnelle (avec p, p', q sans facteur commun) alors il existe un point \tilde{x} du plan tel que $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + (p, p')$ (et donc la projection de \tilde{x} dans le tore est un point périodique pour f , de période exactement q).

En particulier, un homéomorphisme du tore dont l'ensemble de rotation a de l'intérieur admet une infinité d'orbites périodiques.

La preuve utilise le théorème feuilleté équivariant, ainsi qu'une description des feuilletages du tore (sans singularités).

a. Exemple. — On peut montrer que le théorème est optimal : il existe un exemple sans point fixe pour lequel 0 est dans l'ensemble de rotation. Bien sûr, 0 n'est pas un point intérieur ni un point extrémal, et sa droite d'appui est rationnel.

(A ECRIRE).

b. Feuilletages du tore. — On admet le théorème suivant (voir Hector-Hirsh...).

Théorème. — Soit \mathcal{F} un feuilletage sans singularité sur \mathbb{T}^2 . Alors de deux choses l'une :

1. ou bien il existe une courbe fermée simple, transverse au feuilletage, et qui rencontre chaque feuille : autrement dit, \mathcal{F} est un feuilletage obtenu par suspension d'un homéomorphisme du cercle ;
2. ou bien \mathcal{F} admet une composante de Reeb.

Une *composante de Reeb* est un ensemble homéomorphe à l'anneau fermé $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, plongé de façon essentielle (non homotope à une constante), saturé par le feuilletage, en restriction duquel le feuilletage est homéomorphe au modèle du feuilletage de Reeb :

(DESSIN).

On munit l'espace des feuilletages d'une topologie de la façon suivante : étant donné une collection finie de plongements $\{\varphi_i : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{T}^2\}$, et $\varepsilon > 0$, on définit un ouvert de l'espace des feuilletages comme l'ensemble des feuilletages qui admettent pour chaque i une carte φ'_i telle que $d_{C^0}(\varphi'_i, \varphi_i) < \varepsilon$.

Remarque 9.1.3. — Soit (f_t) une isotopie sur le tore \mathbb{T}^2 et \mathcal{F} un feuilletage satisfaisant l'énoncé du théorème feuilleté équivariant de Patrice Le Calvez. Alors toute isotopie et tout feuilletage C^0 -proches satisfont encore l'énoncé. En particulier, la condition de transversalité est ouverte.

Cette remarque permettra de supposer que le feuilletage obtenu par le théorème feuilleté équivariant possède des propriétés supplémentaires, par exemple :

Corollaire 9.1.4. — *Tout feuilletage \mathcal{F} peut être perturbé arbitrairement peu en un feuilletage \mathcal{F}' admettant une feuille fermée : ou bien \mathcal{F}' admet une composante de Reeb, ou bien c'est un feuilletage obtenu par suspension d'un homéomorphisme du cercle ayant une orbite périodique.*

c. Preuve du théorème. — Nous adaptons là encore un texte de Patrice Le Calvez, *Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore*, Astérisque **204** (1991), SMF (section 2.6).

Soit f un homéomorphisme du tore isotope à l'identité, (f_t) une isotopie, F un homéomorphisme du plan qui relève f , obtenu en relevant l'isotopie. Supposons que F n'a pas de point fixe. On peut alors appliquer le théorème feuilleté équivariant : il existe un feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{T}^2 qui est transverse à l'isotopie. Quitte à perturber \mathcal{F} , on peut supposer qu'il possède une feuille fermée Δ .⁽¹⁾

Quitte à conjuguer par un élément de $SL(2, \mathbb{Z})$,⁽²⁾ on peut supposer que cette feuille fermée Δ est isotope à $\{0\} \times \mathbb{S}^1$. Le relevé $\tilde{\Delta}$ est une droite de Brouwer orientée pour F , elle est à distance bornée de la droite verticale $\{0\} \times \mathbb{R}$; on peut la supposer orientée vers le haut, elle est alors poussée "vers la droite". On en déduit facilement que l'ensemble de rotation de F est alors inclus dans le demi-plan fermé $\{x \geq 0\}$, ce qui prouve l'assertion 1 du théorème.⁽³⁾ Il ne reste plus qu'à prouver l'assertion 2 : en effet, sachant que 0 est sur le bord sans être un point extremal, sa droite d'appui sera forcément de pente rationnelle.

1) *Cas simple : le feuilletage contient une composante de Reeb.* — Lorsque le feuilletage admet une composante de Reeb, on a aussi une feuille fermée orientée en sens contraire, et les deux bandes bordées par la réunion de ces deux feuilles sont l'une attractive, l'autre repulsive. En particulier, on a $\rho(F) \subset \{0\} \times \mathbb{R}$.

⁽¹⁾ Si l'on ne veut pas perturber, on peut adapter l'argument qui suit dans le cas irrationnel.

⁽²⁾ Remarque que ceci ne change pas la notion de "droite de pente rationnelle".

⁽³⁾ Ecrire d'abord la preuve en supposant que $\tilde{\Delta}$ est une droite verticale, puis le cas général.

Soit Δ une feuille fermée. L'isotopie détermine une bande bordée par Δ et $f(\Delta)$, notons $U(\Delta)$ l'union des itérés de cette bande sous f .⁽⁴⁾ Comme le tore contient deux feuilles fermées disjointes poussées en sens contraire, les points de $U(\Delta)$ sont errants. En particulier, les mesures invariantes ont leurs supports disjoints de $U(\Delta)$.

On note $U(F)$ la réunion des ouverts $U(\Delta)$ pour toutes les feuilles fermées Δ . Il s'agit d'un ouvert du tore, invariant par f . Décrivons le complémentaire de $U(F)$.

Soit K la réunion des feuilles fermées de \mathcal{F} : c'est un ensemble compact non vide. Toute composante connexe du complémentaire de K est l'intérieur V d'un anneau fermé, bordé par deux feuilles fermées de \mathcal{F} . Notons $\text{Maxinv}(V)$ l'ensemble des points dont tous les itérés sont dans V . Alors il est clair que le complémentaire de $U(F)$ est la réunion des ensembles $\text{Maxinv}(V)$. Remarquons qu'en restriction à l'anneau fermé $\text{Adhe}(V)$, le feuilletage est ou bien le feuilletage de Reeb, ou bien la suspension d'un homéomorphisme de l'intervalle sans point fixe autre que les extrémités (dans les deux cas les feuilles de V s'accablent sur les feuilles du bord). Dans le premier cas, l'ensemble maximal invariant n'est pas vide, il peut être vide dans le second cas.

Soit μ une mesure ergodique pour f . Dans le cas d'un feuilletage avec composante de Reeb, l'assertion 2 du théorème découle de l'affirmation suivante.

Affirmation 9.1.5. — *Le vecteur de rotation $\rho(\mu)$ est un point non nul de la droite $\{x = 0\}$.*

Démontrons l'affirmation. Le support de μ est inclus dans l'un des ensemble compact invariant $\text{Maxinv}(V)$. Puisqu'on connaît complètement la topologie du feuilletage sur V (deux topologies possibles seulement, cf plus haut), on voit qu'il existe un homéomorphisme Φ du tore, isotope à l'identité, à support dans V , tel que le feuilletage $\Phi(\mathcal{F})$ est parfaitement horizontal sur un anneau $A' \subset V$ qui contient $\text{Maxinv}(V)$. Conjuguer la situation par Φ ne change pas l'ensemble de rotation. Mais dans la situation conjuguée il est clair que F pousse tous les relevés des points de $\text{Maxinv}(V)$ strictement vers le haut, ou bien tous vers le bas (selon l'orientation du feuilletage) : dans le premier cas par exemple, on a $p_2(F(\tilde{x})) > p_2(\tilde{x})$ pour tout $\tilde{x} \in \text{Maxinv}(V)$, et donc $\rho(\mu) \in \{x = 0, y > 0\}$. Ceci termine la preuve de l'affirmation.

2) *Cas d'une suspension.* — Cette fois-ci, toutes les feuilles fermées sont orientées vers le haut, et donc poussée "vers la droite", et le tore ne contient pas d'anneau attractif, et en général l'ensemble de rotation ne va pas être inclus dans la droite verticale, il peut avoir de l'intérieur. L'interprétation dynamique du feuilletage est plus délicat dans ce cas.

Comme avant, on peut définir les ensembles $U(\Delta)$ et $U(F)$. La différence est qu'ils peuvent maintenant contenir des points non-errants.⁽⁵⁾ Soit μ une mesure ergodique, ou bien le support de μ est disjoint de $U(F)$, ou bien il est inclus dans $U(F)$. La preuve se réduit maintenant à l'affirmation suivante.

Affirmation 9.1.6. — *Dans le premier cas, $\rho(\mu)$ est un point non nul de la droite $\{x = 0\}$. Dans le second cas, $\rho(\mu) \in \{x > 0\}$.*

⁽⁴⁾ $U(\Delta)$ peut être défini ainsi : soit $\tilde{\Delta}$ un relevé de Δ , $U(\tilde{\Delta})$ le domaine de Brouwer engendré par $\tilde{\Delta}$, alors $U(\Delta)$ est le projeté de $U(\tilde{\Delta})$.

⁽⁵⁾La projection de $U(\tilde{\Delta})$ dans le tore n'est plus nécessairement injective, les points de $U(\Delta)$ peuvent tourner autour du tore dans le sens horizontal.

2-a) *Cas d'une mesure ergodique dont le support est disjoint de $U(F)$.* — La description du complémentaire de $U(F)$ donnée précédemment doit être un peu modifiée. ⁽⁶⁾

Soit \tilde{V} un relevé d'un anneau V : il s'agit d'une bande bordée par deux droites de Brouwer pour F . Soit $\tilde{x} \in \tilde{V}$. De deux choses l'une : ou bien l'orbite de \tilde{x} sort de \tilde{V} , alors ce point est dans le domaine de Brouwer de l'une des deux droites de Brouwer bordant \tilde{V} ; ou bien l'orbite de \tilde{x} est incluse dans \tilde{V} : autrement dit, \tilde{x} est dans l'ensemble maximal invariant $\Xi(\tilde{V}) = \text{Maxinv}(\tilde{V})$. Le complémentaire de $U(F)$ est donc égal à la réunion des projection $\Xi(V)$ des ensembles (invariants) $\text{Maxinv}(\tilde{V})$. ⁽⁷⁾ Une mesure ergodique μ à support disjoint de $U(F)$ a son support inclus dans un ensemble $\Xi(V)$. On peut maintenant prouver le second point de l'affirmation en recopiant la preuve dans le cas d'un feuilletage avec composante de Reeb.

2-b) *Cas d'une mesure ergodique μ dont le support est inclus dans $U(F)$.* — La preuve utilise un peu de théorie ergodique.

La mesure μ charge un ensemble $U(\Delta)$. D'après Birkhoff, μ -presque tout x a pour nombre de rotation $\rho(x) = \rho(\mu)$, donc il suffit de montrer que pour un ensemble de points x de mesure positive, la première coordonnée de $\rho(x)$ est > 0 . Soit \tilde{E} un petit disque dans le domaine de Brouwer de \tilde{D} , dont le projeté E est de μ -mesure strictement positive. Si \tilde{E} est assez petit, il est errant, et disjoint de ses translatés par des translations entières (il se projette injectivement dans le tore). On définit sur E la fonction $\varphi(x) = p_1(F(\tilde{x})) - p_1(\tilde{x})$, première coordonnée du vecteur déplacement. μ -presque tout point de E revient dans E , donc la fonction temps de retour τ est définie μ -presque partout sur E . Le point clé est que puisque \tilde{E} est errant, et que $\tilde{\Delta}$ est poussée "vers la droite", pour tout point x de E qui revient dans E , le relevé \tilde{x} de \tilde{E} revient dans un relevé $\tilde{E} + (p, 0)$ avec $p > 0$: donc on a

$$\hat{\varphi}(x) := p_1(F^{\tau(x)}(\tilde{x})) - p_1(\tilde{x}) = \varphi(x) + \varphi(f(x)) + \cdots + \varphi(f^{\tau(x)-1}(x)) \geq 1.$$

Nous pouvons maintenant montrer que le vecteur $\rho(x)$ a sa première coordonnée strictement positive, pour μ -presque tout x de E : $\rho(x)$ est défini comme une limite de sommes de Birkhoff de f que l'on va "regrouper par paquets", en utilisant des sommes de Birkhoff de l'application de premier retour dans E . Détaillons ceci. Il est classique que la fonction τ est μ -intégrable sur E (son intégrale est $\mu(E)$, dessiner une "tour"). La fonction $\frac{\hat{\varphi}}{\tau}$ est bornée (par $\text{Sup}(\varphi)$). On en déduit que la fonction $\hat{\varphi}$ est aussi intégrable. L'application de premier retour sur E , $x \mapsto f^{\tau(x)}(x)$, préserve encore la mesure μ , on peut appliquer Birkhoff à $\hat{\varphi}$ et τ : les sommes de Birkhoff convergent pour μ p.t. point x de E . En écrivant les sommes de Birkhoff de φ comme des quotients d'une somme de Birkhoff de $\hat{\varphi}$ par une somme de Birkhoff de τ , on voit que la première coordonnée du nombre de rotation de x est > 0 . Ce qu'on voulait !

d. Autre preuve. — Voir les notes de cours de F. Béguin, *Ensembles de rotations des homéomorphismes du tore \mathbb{T}^2* , pour la preuve de J. Franks du point 1 du théorème.

⁽⁶⁾En effet, un point peut maintenant être à la fois dans un domaine $U(\Delta)$ et avoir tous ses itérés dans un anneau V : au revêtement universel, ceci correspond par exemple à un point \tilde{x} tel que $F^n(\tilde{x}) \in \tilde{V} + (n, 0)$ pour tout n .

⁽⁷⁾ $\Xi(V)$ est inclus dans le maximal invariant de V , en général plus petit.

9.2. Conjecture d'Arnol'd

Théorème 9.2.1 (Le Calvez-Matsumoto). — *Soit f un homéomorphisme d'une surface compacte de genre ≥ 1 , préservant une mesure de probabilité μ de support total. On suppose que f est isotope à l'identité, et qu'il existe une isotopie (f_t) pour laquelle le vecteur de rotation de la mesure μ est nul.*

Alors f possède au moins trois points fixes (contractiles).

CHAPITRE 10

ENSEMBLE DE ROTATION ET ENTROPIE

Théorème 10.0.2 (Llibre, MacKay). — Soit f un homéomorphisme du tore \mathbb{T}^2 isotope à l'identité. On suppose que l'ensemble de rotation de f est d'intérieur non-vide⁽¹⁾. Alors l'entropie topologique de f est strictement positive.

Nous démontrons le théorème seulement dans le cas où f est un difféomorphisme. La preuve est basée sur la théorie de Thurston, et plus précisément sur le corollaire suivant.

Corollaire 10.0.3. — Soit f un homéomorphisme d'une surface compacte S (éventuellement à bord). On suppose que pour toute courbe fermée simple γ essentielle non-périphérique et tout entier n non nul, la courbe $f^n(\gamma)$ n'est pas homotope à γ . Alors l'entropie topologique de f est strictement positive.

10.1. Éclatement

Soit f un homéomorphisme du plan qui fixe 0. Supposons que f est différentiable en 0, on peut alors "éclater" 0, au sens suivant. Les coordonnées polaires permettent d'identifier $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ à l'anneau ouvert $]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$. Dans ces coordonnées, grâce à la différentiabilité en 0, l'homéomorphisme f se prolonge continûment en un homéomorphisme \hat{f} de l'anneau semi-ouvert $[0, +\infty \times \mathbb{S}^1$. Cet homéomorphisme est appelé *éclaté de f au point 0*.

Cette construction étant de nature locale, on peut l'effectuer sur n'importe quelle surface. Soit f est un homéomorphisme d'une surface S qui fixe les points d'un ensemble fini Z , et qui est différentiable à chaque point de Z . Soit $\hat{S} \subset S$ la surface compacte à bord obtenue en enlevant à S la réunion des petits disques D_i ouverts de rayon $\varepsilon > 0$ centrés en chaque point z_i de Z . Il existe alors une application continue $P : \hat{S} \rightarrow S$, qui envoie chaque cercle ∂D_i sur z_i , et qui est un homéomorphisme de $\hat{S} \setminus \cup \partial D_i \rightarrow S \setminus Z$, et un homéomorphisme \hat{f} de \hat{S} , dit *éclaté de f en Z* , tel que $P\hat{f} = fP$. Remarquons que \hat{f} se prolonge en un homéomorphisme de S (fixant chaque disque D_i).

Remarquons que l'entropie topologique de la restriction de \hat{f} au bord de \hat{S} est nulle (l'entropie topologique d'un homéomorphisme du cercle est toujours nulle). En appliquant un théorème de Bowen,⁽²⁾ on en déduit que f et \hat{f} ont la même entropie topologique.

⁽¹⁾plus précisément, si F est un relevé de f , alors l'ensemble de rotation de F est d'intérieur non-vide; mais cette propriété ne dépend bien sûr pas du choix du relevé.

⁽²⁾Voir par exemple le livre de De Melo et Van Strien sur la dynamique en dimension un.

10.2. Preuve du théorème

Soit f un difféomorphisme du tore \mathbb{T}^2 isotope à l'identité, F un relevé de f . On suppose que $\rho(F)$ a de l'intérieur, et on cherche à montrer que $h_{top}(f) > 0$.

L'intérieur de $\rho(F)$ contient trois vecteurs non alignés à coordonnées rationnelles. Puisque $\rho(F^n) = n\rho(F)$, il existe un entier n tel que l'intérieur de $\rho(F^n)$ contient trois vecteurs non alignés à coordonnées entières. Puisque $h_{top}(f^n) = nh_{top}(f)$, f a de l'entropie si et seulement si f^n en a. Quitte à remplacer F par F^n (et f par f^n), on peut donc supposer que *l'intérieur de $\rho(F)$ contient trois vecteurs (p_i, p'_i) non alignés à coordonnées entières.*

On applique le théorème de Franks-Le Calvez (9.1.1) (en fait, on utilise seulement le premier item du théorème, dû à Franks) : il existe trois points z_1, z_2, z_3 , fixes pour f , dont les vecteurs de rotation pour F sont respectivement (p_i, p'_i) .⁽³⁾

Soit $\hat{\mathbb{T}}^2$ la surface obtenue en éclatant les points z_1, z_2, z_3 , et \hat{f} l'éclaté de f .

On raisonne par l'absurde, en supposant que l'entropie topologique de f est nulle. Alors celle de \hat{f} l'est également. D'après le corollaire de la théorie de Thurston, il existe alors une courbe fermée simple γ essentielle dans $\hat{\mathbb{T}}^2$ (non homotope à une constante ni à une composante du bord de $\hat{\mathbb{T}}^2$), et un entier $n > 0$ tel que la courbe $f^n(\gamma)$ est homotope à γ dans $\hat{\mathbb{T}}^2$. Quitte à remplacer f par f^{2n} , on peut supposer que $n = 1$, et même que $f(\gamma)$ et γ sont homotopes dans $\hat{\mathbb{T}}^2$ en tant que courbes orientées.

Faisons un bilan provisoire : on a un homéomorphisme f de \mathbb{T}^2 qui possède trois points fixes z_1, z_2, z_3 de vecteurs de rotation non alignés, et une courbe fermée simple γ de $\mathbb{T}^2 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ homotope dans $\mathbb{T}^2 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ à son image $f(\gamma)$, en tant que courbe orientée. On cherche une contradiction. (On peut maintenant oublier la surface éclatée $\hat{\mathbb{T}}^2$, dont le rôle est terminé).

Montrons tout d'abord que *la courbe γ est essentielle non seulement dans $\mathbb{T}^2 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, mais aussi dans le tore \mathbb{T}^2 .* Pour cela, on raisonne (encore !) par l'absurde. Dans le cas contraire, elle borde un disque topologique D dans le tore, notons \tilde{D} l'un des disques topologiques relevant D (composante connexe de $\pi^{-1}(D)$). Puisque γ est essentielle dans $\mathbb{T}^2 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, D contient au moins deux des trois points z_1, z_2, z_3 , disons z_1 et z_2 . Notons Z_1, Z_2 les relevés de ces points dans \tilde{D} . Puisque $f(\gamma)$ est homotope à γ dans $\mathbb{T}^2 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, il existe (q, q') tel que $F(\partial\tilde{D})$ est homotope à $\partial\tilde{D} + (q, q')$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \pi^{-1}(\{z_1, z_2, z_3\})$. En particulier, on a

$$F(\tilde{D}) \cap \pi^{-1}(\{z_1, z_2, z_3\}) = (\tilde{D} + (q, q')) \cap \pi^{-1}(\{z_1, z_2, z_3\}).$$

Ceci entraîne que $F(Z_1) = Z_1 + (q, q')$ (en effet puisque z_1 est fixe pour f , on a $F(Z_1) = Z_1$ modulo \mathbb{Z}^2 , mais le seul point de $(\tilde{D} + (q, q')) \cap \pi^{-1}(\{z_1, z_2, z_3\})$ qui est égal à Z_1 modulo \mathbb{Z}^2 est $Z_1 + (q, q')$ car le disque \tilde{D} se projette injectivement sur D). De même, $F(Z_2) = Z_2 + (q, q')$. Ceci contredit le fait que les vecteurs de rotations des trois points fixes ne sont pas alignés (Z_1 et Z_2 n'ont pas les mêmes vecteurs de rotation). On a montré que γ est essentielle dans le tore \mathbb{T}^2 .

Nous allons maintenant conclure en montrant que les vecteurs de rotations de nos trois points fixes sont alignés, ce qui sera encore absurde. Soyons plus précis. Quitte à conjuguer la situation par un élément de $SL(2, \mathbb{Z})$, on peut supposer que la courbe orientée γ est

⁽³⁾On obtient z_i en appliquant le théorème à $F - (p_i, p'_i)$.

homotope (dans le tore) à la courbe verticale $\{0\} \times \mathbb{S}^1$. Nous allons alors montrer que les vecteurs de rotation des z_1 sont alignés, et plus précisément qu'ils ont la même abscisse.

Ceci suit en effet du fait suivant (auquel on est ramené quitte à changer F en $F - (p, p')$). *On a un point fixe z de f , et une courbe γ dans $\mathbb{T}^2 \setminus \{z\}$ qui est homotope à $f(\gamma)$ dans $\mathbb{T}^2 \setminus \{z\}$ en tant que courbe orientée. On suppose que l'homotopie entre γ et $f(\gamma)$ se relève en une homotopie entre un relevé $\tilde{\gamma}$ et $F(\tilde{\gamma})$. Alors le vecteur de rotation de z est vertical (il vaut $(p, 0)$ pour un certain p entier).*

Prouvons ce fait. On considère la bande B entre $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma} + (1, 0)$. Soit \tilde{z} un relevé de z dans cette bande. Le point \tilde{z} est à droite de la courbe orientée $\tilde{\gamma}$. Comme F préserve l'orientation, $F(\tilde{z})$ est à droite de $F(\tilde{\gamma})$. D'après un résultat d'Epstein, il existe une homotopie (γ_t) entre $f(\gamma)$ et γ , dans $\mathbb{T}^2 \setminus \{z\}$, qui est faite de courbe fermée *simples*. En relevant cette isotopie, on voit que $F(\tilde{z})$ est aussi à droite de $\tilde{\gamma}$. De la même façon on montre que $F(\tilde{z})$ est à gauche de $\tilde{\gamma} + (1, 0)$, autrement dit $F(\tilde{z})$ est dans la bande B . Puisque z est fixe, $F(\tilde{z})$ est un relevé de z dans la bande B , donc il est de la forme $\tilde{z} + (p, 0)$, ce que l'on voulait. Ceci termine la preuve du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Casson, Adrew, Bleiler, Steven. Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston. *London Math. Soc. Student Text* **9** (1988), 1–105.
- [2] Fathi, Albert, Laudenbach, François et Poenaru, Valentin. Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque* **66-67** (1979), 1–286.
- [3] Handel, Michael, Thurston, William P. New proofs of some results of Nielsen. *Advances in Math.* **56** (1985), 173-191.
- [4] Katok, Anatole ; Hasselblatt, Boris. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] Nielsen, Jakob. Untersuchugen zur Topologie des geschlossenen zweiseitigen Flächen I. *Acta Math.* **50** (1927), 189–358.
- [6] Nielsen, Jakob. Untersuchugen zur Topologie des geschlossenen zweiseitigen Flächen II. *Acta Math.* **53** (1929), 1–76.
- [7] Nielsen, Jakob. Untersuchugen zur Topologie des geschlossenen zweiseitigen Flächen III. *Acta Math.* **58** (1931), 87–167.
- [8] Thurston, William P. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*. *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1988), 417–431.