Cours de Systèmes Dynamiques

F. Béguin, S. Lelièvre

Décalages et sous-décalages

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'ensemble $\Sigma_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{Z}}$ que l'on munit de la topologie produit. On vérifie très facilement que Σ_n est un ensemble de Cantor. On définit alors le *décalage* $\sigma : \Sigma_n \to \Sigma_n$ comme suit : si $y = \sigma(x)$ alors $y_k = x_{k+1}$ pour tout k (autrement dit, les termes de la suite $\sigma(x)$ sont les mêmes que ceux de la suite x, mais ils sont décalés d'un cran vers la gauche). Clairement σ est un homéomorphisme de Σ_n dans lui-même. On dit que $\sigma : \Sigma_n \to \Sigma_n$ est le *décalage (bilatère) complet sur l'alphabet à n symboles.*

Soit maintenant $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ une matrice de taille $n \times n$ dont chaque coefficient est égal à 0 ou 1. On définit un sous-ensemble Σ_A de Σ_n comme suit :

$$\Sigma_A := \{x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{Z}} \mid a_{x_k, x_{k+1}} = 1 \text{ pour tout } n\}.$$

Ce sous-ensemble Σ_A est σ-invariant ; on peut donc considèrer la restriction de σ à Σ_A. On dit que $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ est le *sous-décalage (bilatère) de type fini associé à la matrice A.* Notons que $\Sigma_A = \Sigma_n$ si A est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Il est souvent commode d'associer à la matrice A son *graphe d'incidence G_A*. Par définition, c'est le graphe orienté dont les sommets sont les entiers $0, 1, \ldots, n-1$ tel qu'il existe une arrête allant du sommet i vers le sommet j si et seulement si $a_{i,j} = 1$. L'espace Σ_A s'identifie alors naturellement à l'espace des chemins orientés bi-infinis sur le graphe G_A.

Pour tout entier $n \geq 2$, on peut aussi considérer l'ensemble $\Sigma_n^+ := \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}}$ que l'on munit de la topologie produit. C'est aussi un ensemble de Cantor. On définit le décalage $\sigma : \Sigma_n^+ \to \Sigma_n^+$ de manière similaire à ci-dessus. On remarquera que $\sigma : \Sigma_n^+ \to \Sigma_n^+$ est une application continue surjective, mais n'est pas inversible : pour tout $x \in \Sigma_n^+$, la fibre $\sigma^{-1}(\{x\})$ est constitué d'exactement n points. On dit que $\sigma : \Sigma_n^+ \to \Sigma_n^+$ est le *décalage unilatère complet sur l'alphabet à n symboles.*

Bien sûr, si A une matrice de taille $n \times n$ dont chaque coefficient est égal à 0 ou 1, on peut définir comme ci-dessus un sous-ensemble Σ_A^+ de Σ_n^+, et considèrer le décalage $\sigma : \Sigma_A^+ \to \Sigma_A^+$.

Dynamique du décalage complet $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$

1. Combien le décalage $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ possède-t-il de points périodiques de plus petite période n ? Montrer que l'ensemble de tous les points périodiques de σ sont denses dans Σ_2.

2. Construire un point $x \in \Sigma_2$ dont l'orbite positive par σ soit dense dans Σ_2.

3. Montrer que $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ est *topologiquement mélangeant*, c'est-à-dire que, si U et V sont des ouverts non-vides de Σ_2, alors $\sigma^n(U)$ intersecte V pour tout n assez grand.

4. Pour tout $x \in \Sigma_2$, on appelle *variété stable* de x, et on note $W^s(x)$ l'ensemble

$$W^s(x) := \left\{ y \in \Sigma_2 \mid d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

De même, on appelle *variété instable* de x, et on note $W^u(x)$ l'ensemble

$$W^u(x) := \left\{ y \in \Sigma_2 \mid d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Montrer que, quel que soit le point $x \in \Sigma_2$, la variété stable et la variété instable de x sont denses dans Σ_2. Mieux : montrer que, quels que soient les points x, y dans Σ_2, l'ensemble des points d'intersection de la variété stable de x avec la variété instable de y est dense dans Σ_2.

5. Un sous-ensemble σ-invariant de Σ_2 est dit *apériodique* s'il ne contient aucune orbite périodique pour σ. Construire un sous-ensemble fermé σ-invariant apériodique de Σ_2. En déduire qu'il existe des sous-ensembles fermés σ-invariants *minimaux* de Σ_2 qui ne sont pas réduits à des orbites périodiques. Montrer que la réunion de tous les sous-ensembles fermé σ-invariants apériodiques de Σ_2 est dense dans Σ_2.

Dynamique des sous-décalages de types finis

Soit A une matrice de taille $n \times n$ dont chaque coefficient est égal à 0 ou 1. On dit que A est *irréductible* s'il existe un entier ℓ tel que tous les coefficients de A^ℓ sont strictement positifs. On dit que A est irréductible et *apériodique* s'il existe un entier ℓ_0 tel que, pour tout $\ell \geq \ell_0$, tous les coefficients de A^ℓ sont strictement positifs.

6. Montrer que $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ est transitif si et seulement si A est irréductible. Montrer que $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ est topologiquement mélangeant si et seulement si A est irréductible et apériodique.

7. Supposons A irréductible et apériodique. Montrer le théorème de Perron-Frobenius : A admet un unique vecteur propre v à coordonnées strictement positives ; la valeur propre associée λ est simple et strictement plus grande que 1 ; toutes autres valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à celui de λ. On pourra considérer l'action de l'application $x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|}$ sur le simplexe $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$.

8. On supose encore A irréductible et apériodique. Pour tout k, notons $N(A, k)$ le nombre points périodiques de période divisant k pour σ_A. Montrer que

$$N(A, k) = \mathrm{Tr}(A^k).$$

En déduire que

$$\frac{N(A, k)}{r^k} \underset{k\to\infty}{\to} 1,$$

où r désigne le rayon spectral (*i.e.* le module de la plus grande valeur propre) de A.

Conjugaisons topologiques

On dit que deux systèmes dynamiques continus $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$ sont *topologiquement conjugués* s'il existe un homéomorphisme $h : X \to Y$ qui conjugue f à g, c'est-à-dire qui satisfait $h \circ f = g \circ h$, ou encore $f = h^{-1} \circ g \circ h$. La notion de conjugaison topologique est la notion d'isomorphisme naturelle pour les systèmes dynamiques continus : si f et g sont topologiquement conjugués, on peut penser que f et g sont les mêmes systèmes, à changement de coordonnées (continu) près. Notons que, si $h : X \to Y$ est un homéomorphisme qui conjugue $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$, alors h envoie une orbite périodique de f sur une orbite périodique de g, une orbite dense de f sur une orbite dense de g, etc.

On dit qu'un système dynamique continu $f : X \to X$ est semi-conjugué à un système dynamique continu $g : Y \to Y$ si existe une surjection continue $\pi : X \to Y$ telle que $h \circ f = g \circ h$.

9. Montrer que le décalage $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ n'est pas topologiquement conjugué au décalage $\sigma : \Sigma_3 \to \Sigma_3$. Y a-t-il des semi-conjugaisons ?

10. Soient A et B deux matrices carrées, de taille respectives $n \times n$ et $p \times p$, à coefficients dans $\{0, 1\}$. Pour tout $k \geq 1$, on note $W(A, k)$ le sous-ensemble de $\{0, \dots, n-1\}^k$ constitué des mots de taille k sur l'alphabet $\{0, \dots, n-1\}$ qui apparaissent comme sous-mots des éléments de Σ_A (autrement dit, ce sont les chemins de longueur k sur le graphe d'incidence G_A). De même en remplaçant A par B, et n par p. Soit $\ell \geq 1$ un entier, et $\phi_0 : W(A, l) \to \{0, \dots, p-1\}$ une application.

À quelle condition (portant sur l'application ϕ_0 et les ensembles $W(A, \ell+1)$ et $W(B, 2)$) peut-on définir une application $\phi : \Sigma_A \to \Sigma_B$ par la formule :

$$(\phi(x))_i = \phi_0(x_i \dots x_{i+\ell-1}) \ ?$$

On dira alors que $\phi : \Sigma_A \to \Sigma_B$ est une application *définie via les ℓ-blocs*.

11. Si A et B sont deux matrices carrés à coefficients dans $\{0, 1\}$. Montrer que, pour tout homéomorphisme $h : \Sigma_A \to \Sigma_B$ qui conjugue $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ à $\sigma : \Sigma_B \to \Sigma_B$, il existe un entier ℓ tel que h est défini via les ℓ-blocs.

12. Montrer que le groupe des automorphismes de Σ_2 (*i.e.* le groupes des homéomorphismes de Σ_2 dans lui-même qui commutent au décalage σ) contient tous les groupes finis (*i.e.* tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe du groupe des automorphismes de Σ_2).

Codage de certains systèmes par des décalages

13. Considérons un espace métrique X, et une application continue $f : X \to X$. Supposons qu'il existe deux sous-ensembles compacts disjoints E_0 et E_1 de X tels que

$$f(E_0) \supset E_0 \cup E_1 \quad \text{et} \quad f(E_1) \supset E_0 \cup E_1.$$

Soit K^+ l'ensemble des points de X dont l'orbite positive par f reste dans $E_0 \cup E_1$:

$$K^+ := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(E_0 \cup E_1).$$

Pour tout $x \in K^+$, on appelle *itinéraire positif de x* la suite $\pi^+(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ définie comme suit : quel que soit k, on a $(\pi^+(x))_k = 0$ si $f^k(x) \in E_0$, et $(\pi^+(x))_k = 1$ si $f^k(x) \in E_1$

Montrer que l'application $\pi : K^+ \to \Sigma_2^+$ qui à x associe son itinéraire est continue, surjective, et satisfait $\pi^+ \circ f = \sigma \circ \pi^+$. Dans quel cas π^+ est-elle injective ? Montrer en particulier que π^+ est injective dès que f est uniformément dilatante en restriction à E_0 et E_1 : il existe une constante $\lambda > 1$ telle que, si x et y sont tous les deux dans E_0, ou tous les deux dans E_1, on a $\mathrm{dist}(f(x), f(y)) \geq \lambda.\mathrm{dist}(x, y)$.

Supposons maintenant que f est un homéomorphisme. Construire un sous-ensemble K de X, et une application $\pi : K \to \Sigma_2$ continue surjective qui satisfait $\pi \circ f = \sigma \circ \pi$. Dans quel cas π est-elle injective ?

Commentaires. La construction ci-dessus permet de coder certains systèmes dynamiques par un décalage. On verra deux exemples concrets ci-dessous. Cette construction admet, comme on l'imagine facilement, de nombreuses généralisations. Ces généralisations jouent un rôle fondamental en systèmes dynamiques. Ces procédures de *codage* confèrent une importance considérable aux décalages et sous-décalages. Dans la construction ci-dessus, la partition de l'ensemble $E = E_0 \cup E_1$ en deux ensembles E_0 et E_1 est l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle une *partition de Markov.*

14. Considérons l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) := z^2 + 16$. On note D le disque fermé centré à l'origine de rayon 10. Vérifier que pour tout point $z \in \mathbb{C} \setminus D$, l'orbite positive de z par f tend vers l'infini. Les seuls points dont l'orbite positive ne partent pas à l'infini sont donc les points de l'ensemble $K^+ := \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(D)$.

Montrer qu'il existe un homéomorphisme $h : K^+ \to \Sigma_2^+$ qui conjugue $f_{|K}$ à $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$.

15. Considérons l'*application tente* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases} .$$

Montrer qu'il existe une surjection continue $p : \Sigma_2^+ \to [0, 1]$ telle que $p \circ \sigma = f \circ p$. Montrer que p est "presque injective" : pour la "plupart" (à préciser) des points $x \in [0, 1]$, la fibre $p^{-1}(x)$ est constituée d'un seul point.