Devoir n°2

Une version (très) simplifiée du théorème de Kolmogorov, Arnol'd et Moser

Première partie. Nombres de Liouville et nombres diophantiens.

Lorsqu'on approche un nombre irrationnel α par un nombre rationnel p/q, on peut considérer la taille des entiers p et q comme le "prix de l'approximation", et la distance $|\alpha - p/q|$ comme la "qualité de l'approximation". On peut alors essayer de trouver un nombre rationnel p/q qui maximise le rapport "qualité/prix". Le but de cette question est de séparer les nombres irrationnels en deux paquets : ceux qui peuvent être approchés par des rationnels avec un bon rapport "qualité/prix" (qu'on appelle *nombres de Liouville*), et ceux qui ne peuvent pas l'être (qu'on appelle *nombres diophantiens*).

1. Pour toute fonction $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, exhiber un nombre irrationnel α tel qu'il existe une infinité de rationnels p/q (avec $q > 0$) tels que $\|\alpha - p/q\| < \epsilon(q)$.
2. Montrer que, pour tout nombre irrationnel α, il existe une infinité de rationnels p/q (avec $q > 0$) tels que $\|\alpha - p/q\| < 1/q^2$.

On dit qu'un nombre irrationnel α est *diophantien* s'il existe une constante $C > 0$ et un exposant $r \geq 2$ tels que pour tout rationnel p/q (avec $q > 0$), on a $\|\alpha - p/q\| > C/q^r$. Sinon, on dit que c'est un *nombre de Liouville*.

3. Montrer que les nombres diophantiens est de mesure pleine dans $\mathbb{R}$, mais que c'est une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

Commentaire. Ceci montre que l'ensemble des nombres diophantiens est gros au sens de la mesure de Lebesgue, et petit au sens de Baire. Ce divorce entre théorie de la mesure et topologie est hélas loin d'être rare !

Seconde partie. Le théorème de Kolmogorov, Arnol'd et Moser.

Voici une question qui possède évidemment une grande importance en Physique. Considérons un système déterministe dont toutes les trajectoires sont périodiques (par exemple, un système constitué d'une étoile et d'une seule planète qui s'attirent selon les lois de Newton). Que se passe-t-il si on perturbe la loi d'évolution du système (par exemple, en introduisant d'autres planètes) ? Les trajectoires du système pertubé sont-elles toujours périodiques ? sont-elles bornées ?

Cette question n'admet pas de réponse simple. Il existe cependant un théorème, énoncé par Andréi Kolmogorov en 1954, et démontré par Vladimir Arnol'd et Jürgen Moser quelques années plus tard, qui affirme que, dans certains cas, les orbites du système perturbé sont *quasi-périodiques* (en particulier bornées). De manière un peu étonnante *a priori*, les nombres diophantiens jouent un rôle fondamental dans l'énoncé et la preuve du théorème de Kolmogorov, Arnol'd et Moser.

Le théorème de Kolmogorov, Arnol'd et Moser est beaucoup trop difficile pour que que nous puissons le démontrer (ou même l'énoncer précisément ici). Nous allons nous contenter d'en considérer un cas très particulier.

On se place sur le cylindre $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$. On considère un système dont les trajectoires sont les cercles $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \{y\}$ parcourus à vitesse α. Pour simplifier, on discrétise le temps ; les trajectoires du système sont donc les suites $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du cylindre $(\mathbb{R}/ZZ) \times \mathbb{R}$ qui satisfont la relation de récurrence

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n + \alpha, y_n)$$

On perturbe maintenant la loi d'évolution du système : on choisit une fonction

$$u : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R},$$

et considère le système perturbé dont les trajectoires sont les suites $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du cylindre $(\mathbb{R}/ZZ) \times \mathbb{R}$ qui vérifie la relation de récurrence

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n + \alpha, y_n + u(x_n)).$$

On voudrait savoir si les trajectoires du système pertubé sont bornées. Pour cela, il faut bien sûr que la fonction u soit d'intégrale nulle, ce que l'on supposera (physiquement, ceci traduit le fait que le système perturbé est encore conservatif).

4. Montrer que le système pertubé possède une trajectoire bornée si et seulement si il existe une fonction continue $v : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que

$$u(x) = v(x + \alpha) - v(x) \qquad (\star)$$

Indication. S'il existe une trajectoire bornée, montrer qu'il existe un compact non-vide de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times\mathbb{R}$ qui est invariant par g. Considérer alors un tel compact K qui soit minimal pour l'inclusion (parmi les compacts non-vide de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ qui est invariant par g). Montrer que K rencontre chaque verticale $\{\theta\} \times \mathbb{R}$ en un point et un seul. En déduire que K est le graphe d'une fonction v, puis montrer que v est continue et satisfait la relation $(\star)$.

Remarque. Ceci montre que le système pertubé possède une trajectoire est bornée si et seulement si toutes ses trajectoires sont bornées.

5. Montrer que, si α est diophantien, alors il existe une fonction v continue qui satisfait la relation $(\star)$. Réciproquement, montrer qu'on peut trouver des nombres irrationnels α tels qu'il n'existe pas de fonction v continue qui satisfait la relation $(\star)$.

Indication. Utiliser les développement en séries de Fourier de u et v.

Commentaires. On a montré que, si α est diophantien, les trajectoires de notre sytsème pertubé sont bornées. Ce résultat est typique de la situation générale. En simplifiant grossièrement, le théorème de Kolmogorov, Arnol'd et Moser affirme que, si on a un système mécanique dont toutes les trajectoires sont périodiques, lorsqu'on perturbe (un peu) ce système mécanique, alors toutes les trajectoires dont les périodes sont diophantiennes demeurent *quasi-périodiques* (en particulier bornées).