Tout homéomorphisme isotope à un pseudo-Anosov f a une dynamique au moins aussi “riche” que celle de f.

Tout au long de ce devoir, on considère une surface S compacte sans bord de caractéristique d'Euler strictement négative, un homéomorphisme $f : S \to S$ de type pseudo-Anosov, ainsi qu'un homéomorphisme $g : S \to S$ isotope à f. Le but du devoir est de montrer que “la dynamique de g est au moins aussi riche que celle de f”. Plus précisément, on veut montrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. *Pour tout entier $n \geq 1$, l'homéomorphisme g a au moins autant de points périodiques de plus petite période n que l'homéomorphisme f.*

Théorème 2. *Il existe un fermé g-invariant $Y \subset S$, et une application continue surjective $\pi : Y \to S$ (homotope à l'inclusion), tels que $f \circ \pi = \pi \circ g_{|Y}$.*

Ce second théorème affirme qu'il existe un ensemble g-invariant $Y \subset S$ tel que la dynamique de $g_{|Y}$ se projette surjectivement sur celle de f. On montrera que ce résultat est optimal au sens où on ne peut pas, en général, contrôler la dynamique de g sur la surface S tout entière :

Proposition 3. *Arbitrairement proche de f, on peut trouver un homéomorphisme $g_0 : S \to S$ tel qu'il n'existe aucune application continue surjective $\pi : S \to S$ telle que $\pi \circ g_0 = f \circ \pi$.*

Rappelons que, si g_0 est suffisament proche de f, alors g_0 est isotope à f (c'est une des conséquences du théorème d'Epstein). Le théorème 1 était sûrement connu de J. Nielsen. Le théorème 2 est beaucoup plus récent ; on le doit à M. Handel.

Notations. On fixe une fois pour toute une identification du revêtement universel de S au disque de Poincaré $\mathbb{H}$, les automorphismes de revêtements agissant par isométries. On note $p : \mathbb{H} \to S$ l'application de revêtement. On note d la distance hyperbolique sur $\mathbb{H}$. On note $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ les feuilletages stable et instables de l'homéomorphisme pseudo-Anosov f. On rappelle que ces feuilletages portent des mesures transverses μ^s et μ^u telles que $f_*\mu^s = \lambda.\mu^s$ et $f_*\mu^u = \lambda^{-1}.\mu^u$ pour une certaine constante λ avec $0 < \lambda < 1$.

A. Construction d'une distance à l'aide des mesures μ^s et μ^u

Les mesures transverses μ^s et μ^u se relèvent en des mesures $\widetilde{\mu}^s$ et $\widetilde{\mu}^u$ tranvserses respectivement au feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s := p^{-1}(\mathcal{F}^s)$ et au feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}^u := p^{-1}(\mathcal{F}^u)$. Pour tout relevé $\widetilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de f, on a bien sûr $\widetilde{f}_*\widetilde{\mu}^s = \lambda.\widetilde{\mu}^s$ et $\widetilde{f}_*\widetilde{\mu}^u = \lambda^{-1}.\widetilde{\mu}^u$. Pour $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{H}$, on note $\Gamma_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ est l'ensemble des arcs qui joignent $\widetilde{x}$ à $\widetilde{y}$ dans $\mathbb{H}$, et qui se décomposent en un nombre fini de sous-arcs dont chacun est tranvserse soit à $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, soit à $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. On pose alors

$$D(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \quad = \quad \inf_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{x},\widetilde{y}}} \left(\widetilde{\mu}^s(\gamma) + \widetilde{\mu}^u(\gamma)\right).$$

Montrer que D définit une distance sur $\mathbb{H}$ (en particulier, montrer que D est non-dégénrée, c'est-à-dire que $D(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > 0$ dès que $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$). Montrer que D est invariante par les automorphismes de revêtement ; en déduire que les distances d et D sont équivalentes.

B. Points périodiques : preuve du théorème 1

On choisit une fois pour toutes un relevé $\widetilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de f, et on note $\widetilde{g} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ le relevé de g obtenu à partir de $\widetilde{f}$ en relevant une isotopie de f à g. En particulier, les relevés $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont à distance finie l'un de l'autre.

On considère un entier $n \geq 1$, et un point $x \in S$ périodique pour f, de plus petite période n. On choisit un relevé $\widetilde{x} \in \mathbb{H}$ du point x. Il existe alors un automorphisme de revêtement ρ tel que l'homéomorphisme $\widetilde{k} := \rho \circ \widetilde{f}^n$ fixe $\widetilde{x}$. On note $\widetilde{\ell} := \rho \circ \widetilde{g}^n$, de sorte que $\widetilde{k}$ et $\widetilde{\ell}$ sont des relevés des homéomorphismes f^n et g^n, et sont à distance finie l'un de l'autre. Pour $r > 0$, on note C_r le cercle hyperbolique dans $\mathbb{H}$ centré en $\widetilde{x}$ de rayon r, paramétré dans le sens direct.

1. Indice de $\widetilde{k}$ le long d'une petite courbe entourant x. Déterminer l'indice $\mathrm{Ind}(\widetilde{k}, C_r)$ pour r assez petit. On distinguera différents cas, selon que $\widetilde{x}$ est un point régulier ou une singularité des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, et selon que $\widetilde{f}$ fixe les différentes séparatrices en $\widetilde{x}$ ou les permutent. Remarquer en particulier que, pour $r > 0$ petit, l'indice $\mathrm{Ind}(\widetilde{k}, C_r)$ n'est jamais nul.

Remarque. Écrire une preuve formelle de la valeur de l'indice $\mathrm{Ind}(\widetilde{k}, C_r)$ (en utilisant des modèles locaux définis par des formules explicites) est certainement inutilement fastidieux. Des arguments du genre "on voit bien sur un dessin" me semblent tout à fait suffisants.

2. Indice de $\widetilde{k}$ le long d'une courbe quelconque entourant $\widetilde{x}$. Montrer que $\widetilde{k}$ ne possède pas d'autre point fixe que $\widetilde{x}$. En déduire que, quel que soit le rayon $r > 0$ (y compris r grand), l'indice $\mathrm{Ind}(\widetilde{k}, C_r)$ n'est jamais nul.

Indication. Pour montrer que $\widetilde{k}$ n'admet qu'au plus un point fixe, on pourra utiliser la distance D, et les propriétés de contraction/dilatation de $\widetilde{f}$ vis-à-vis des mesures transverses $\widetilde{\mu}^s$ et $\widetilde{\mu}^u$.

3. Indice de $\widetilde{\ell}$ le long d'une "grande" courbe entourant x. Montrer que pour toute constante C, il existe un compact K de $\mathbb{H}^2$ tel que, pour tout $\widetilde{y} \in \mathbb{H}^2 \setminus K$, on a $d(\widetilde{k}(\widetilde{y}), \widetilde{y}) > C$. En déduire que pour r assez grand, les indices $\mathrm{Ind}(\widetilde{k}, C_r)$ et $\mathrm{Ind}(\widetilde{\ell}, C_r)$ sont égaux. En particulier, $\mathrm{Ind}(\widetilde{\ell}, C_r)$ n'est pas nul.

Indication. Pour montrer que la propriété sur la distance entre les points $\widetilde{k}(\widetilde{y})$ et $\widetilde{y}$, on raisonnera par l'absurde. Plus précisément, on supposera qu'il existe une suite $\widetilde{y}_i$ de points qui sort de tout compacts telle que $d(\widetilde{k}(\widetilde{y}_i), \widetilde{y}_i) < C$. On pourra alors se ramener au cas où les $\widetilde{y}_i$ sont tous des relevés d'un même point $\widetilde{y}_0$, et en déduire que $\widetilde{f}$ commute à un automorphisme de revêtement non-trivial. Pour l'égalité des indices, utiliser une homotopie entre $\widetilde{\ell}$ et $\widetilde{k}$.

4. Existence d'un point y périodique de période primitive n pour g. Déduire de la question précédente que $\widetilde{\ell}$ possède au moins un point fixe $\widetilde{y}$. Montrer que le projeté y de $\widetilde{y}$ dans S est un point périodique de plus petite période n pour g.

5. Conclusion. Terminer la preuve du théorème 1.

C. "Semi-conjugaison" : preuve du théorème 2

Définition. Soit $n \geq 1$ un entier, x un point fixe de f^n, et y un point fixe de g^n. On fixe un relevé $\widetilde{f}$ de f, et on note $\widetilde{g}$ le relevé de g obtenu à partir de $\widetilde{f}$ en relevant une isotopie de f à g. Pour tout relevé $\widetilde{x}$ de x, il existe un automorphisme de revêtement $\rho_{\widetilde{x}}$ tel que $\rho_{\widetilde{x}} \circ \widetilde{f}^n$ fixe $\widetilde{x}$. De même, pour tout relevé $\widetilde{y}$ de y, il existe un automorphisme de revêtement $\sigma_{\widetilde{y}}$ tel que $\sigma_{\widetilde{y}} \circ \widetilde{g}^n$ fixe $\widetilde{y}$. On dit que (f, x) et (g, y) sont Nielsen-équivalent s'il existe des relevés $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ de x et y tels que $\rho_{\widetilde{x}} = \sigma_{\widetilde{y}}$.

Définition. Soit x et y deux points de S. On fixe un relevé $\widetilde{f}$ de f, et on note $\widetilde{g}$ le relevé de g obtenu à partir de $\widetilde{f}$ en relevant une isotopie de f à g. On dit que la g-orbite de y est *K-pistée* par la f-orbite de x, s'il existe des relevés $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ de x et y tels que on a $d(\widetilde{f}^i(\widetilde{x}), \widetilde{g}^i(\widetilde{y})) \leq K$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (où d désigne la distance hyperbolique sur $\mathbb{H}$. On dit que la g-orbite de y est *pistée* par la f-orbite de x, si elle est K-pistée pour un certain $K > 0$.

Il est facile de vérifier que les définitions ci-dessus ne dépendent en fait pas du relevé $\widetilde{f}$ de f choisi. Nous noterons X l'ensemble des orbites de f qui pistent au moins une orbite de g, et Y l'ensemble des orbites de g qui sont pistées par une orbite de f.

1. Définition de l'application π. Montrer que deux orbites distinctes de f ne peuvent rester à distance finie l'une de l'autre.

Indication. On pourra utiliser la distance D.

On en d'eduit que , pour tout $y \in Y$, il n'existe qu'un seul point de $x \in X$ tel que la f-orbite de x piste la g-orbite de Y. Ceci permet de définir une application $\pi : Y \to X$ qui à un point Y associe l'unique point x tel que la f-orbite de x piste la g-orbite de y.

2. Densité de l'ensemble X. Soit x un point fixe de f^n. Dans la partie A, on a montré qu'il existe au moins un point fixe y un point fixe de g^n, tel que (f, x) et (g, y) sont Nielsen-équivalents. Montrer que la f-orbite de x piste la g-orbite de y. En utilisant une partition de Markov adaptée à f, montrer que les points périodiques de f sont denses dans S. En déduire que l'ensemble X est dense.

3. Les ensemble X et Y sont fermés. Montrer qu'il existe une constante K_0 telle que, pour tout $x, y \in S$, la f-orbite de x piste la g-orbite de y si et seulement si la f-orbite de x K_0-piste la g-orbite de y. En déduire que les ensembles X et Y sont fermés.

4. Conclusion. Terminer la preuve du théorème 2.

D. Dynamique globale de g : preuve de la proposition 3

Rappelons que, si on remplace la surface de caractéristique d'Euler strictement négative S par le tore $\mathbb{T}^2$ et l'homéomorphisme pseudo-Anosov f par un difféomorphisme d'Anosov linéaire, alors on a un résultat analogue au théorème 2 mais légèrement plus fort : l'application π est cette fois définie sur le tore $\mathbb{T}^2$ tout entier. C'est pourquoi il est légitime de se demander si le théorème 2 est optimal : ne peut-on pas montrer le même résultat avec en plus l'ensemble Y égal à la surface S tout entière ? La réponse est "non", comme le montre l'exemple ci-dessous.

1. Toute orbite de l'ensemble de définition de π est pistée. Montrer que, si $g_0 : S \to S$ est un homéomorphisme, si Z est un sous-ensemble de S, et si $\pi : Z \to S$ est une application continue telle que $f \circ \pi = \pi \circ g$, alors, pour tout point $z \in Z$, il existe un point $x \in S$ tel que la f-orbite de x piste la g_0-orbite de z.

2. Un exemple où certaines orbites de g ne sont pas pistées. Dans cette question, on va construire un homéomorphisme $g_0 : S \to S$ isotope à f tel qu'il existe au moins une orbite de g_0 qui n'est pas pistée par une orbite de f.

On considère une singularité x_0 des feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$. On note $k \geq 3$ le nombre de séparatrices de chacun des feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ en x_0. Pour simplifier, on supposera que f fixe chacune des séparatrices des feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ en s (je laisse au lecteur le soin de généraliser la construction de g_0 dans le cas où f induit une permutation non-triviale des séparatrices stables et instables de x_0). On choisit une séparatrice stable L^s de x_0. Cette séparatrice L^s est adajacente à exactement deux séparatrice instables de x_0 ; il existe donc au moins une séparatrice instable L^u de x_0 qui n'est pas adjacente à L^s. On construit un homéomorphisme $g_0 : S \to S$ de la manière suivante. Soit U un petit ouvert dont le bord est un $2k$-gone formé de segments de feuilles de $\mathcal{F}^s$ et de $\mathcal{F}^u$ alternativement[1]. On note L^s_U et L^u_U les composantes connexes de $L^s \cap U$ et $L^u \cap U$ qui contiennent x. On choisit un point $z^s \in L^s_U$ tel que $f^{-1}(z^s) \notin U$, et un point $z^u \in L^u_U$ tel que $f(z^u) \notin U$. On choisit un homéomorphisme ϕ à support dans U tel que $\phi(z^s) = z^u$. Finalement, on pose $g_0 = f \circ \phi$.

Montrer que la g_0-orbite du point z^s défini ci-dessus n'est pistée par aucune orbite de l'homéomorphisme pseudo-Anosov f.

3. Conclusion. Terminer la preuve de la proposition 3.

[1]En fait, la forme exacte de U nous importe peu. Le seul point important et que, U est simplement connexe et, si $\widetilde{U}$ est un relevé de U et $\widetilde{L}^s$ est un relevé de L^s, alors $\widetilde{L}^s$ une fois sortie de $\widetilde{U}$ n'y revient pas