Licence de Mathématiques — Université Paris-Sud
UV Math 321 : Systèmes dynamiques chaotiques — 2006-07

Devoir n$^{\text{o}}$ 1

Théorème de Sharkovskii

Le but de ce devoir est de montrer le théorème de Sharkovskii :

Théorème. *Soit un système dynamique sur un intervalle compact de loi d'évolution continue. Si ce système ci-dessus possède un orbite périodique de période primitive* 3*, alors il possède également une orbite périodique de période primitive* k *pour chaque* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

A. Préliminaires

1. Soit U un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $g : U \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $g(U) \supset U$. Montrer que g possède un point fixe dans U.

2. Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$, et $g : U \to \mathbb{R}$ une application continue. Soit V un intervalle compact de $\mathbb{R}$ tel que $g(U) \supset V$. Montrer *très soigneusement* qu'il existe un intervalle compact $W \subset U$ tel que $g(W) = U$.

B. Preuve du théorème de Sharkovskii

On considère maintenant un système dynamique sur un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$ de loi d'évolution continue $f : I \to I$. On suppose que f possède un point périodique a de période primitive 3.

3. À l'aide de l'orbite de a, montrer *soigneusement* l'existence de deux intervalles compacts $K, L \subset I$ tels que :
- les intérieurs des intervalles K et L sont disjoints, mais K et L on une extrémité en commun,
- $f(K) = L$ et $f(L) = K \cup L$.

4. Montrer que f possède un point fixe dans L.

5. Montrer que f^2 possède un point fixe dans K. Montrer *soigneusement* que ce point est un point périodique de période primitive 2 pour f (autrement dit, montrer que ce point n'est pas un point fixe de f).

6. On considère maintenant un entier $k \geq 4$. Montrer l'existence d'un intervalle compact $J \subset L$ tel que $f^{k-1}(J) = K$. Montrer l'existence d'un point fixe de f^k dans J. Montrer que ce point est un point périodique de période primitive k pour f (autrement dit, montrer que la période primitive de ce point ne peut être strictement plus petite que k).

C. Exemple

7. Construire un exemple de système dynamique sur l'intervalle $[0, 1]$ qui satisfait les hypothèses du théorème de Sharkovskii.

D. Contre-exemple à la réciproque au théorème.

On considère l'application $f : [1, 5] \to [1, 5]$ qui est affine sur les intervalles $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 5]$, et satisfait $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$ et $f(5) = 1$.

8. Tracer le graphe de f. Vérifier que le système dynamique sur $[1, 5]$ ayant f comme loi d'évolution admet une orbite périodique de période primitive 5. En calculant les images des intervalles $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ et $[4, 5]$ par f^3, montrer que f n'admet pas d'orbite périodique de période primitive 3.