Cours de Systèmes Dynamiques

F. Béguin, S. Lelièvre

Automorphismes linéaires du tore $\mathbb{T}^2$

Soit A une matrice dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. On peut bien sûr voir A comme un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$. De plus, cet automorphisme "passe au quotient" en un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, que l'on notera f_A. Par abus de langage, on dit que f_A est un *automorphisme linéaire* du tore $\mathbb{T}^2$.

Remarque. On aurait pu prendre $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ au lieu de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Cela n'apporte cependant pas grand chose, et il est plus commode de travailler avec des automorphismes qui préserve l'orientation.

---

1. Automorphismes périodiques

Supposons que $|\mathrm{Tr}(A)| = 0$ ou 1. Montrer que l'automorphisme f_A est alors périodique ; plus précisément, il existe $n \leq 12$ tel que $f_A^n = \mathrm{Id}$.

Retenons que, lorsque $|\mathrm{Tr}(A)| = 0$ ou 1, la dynamique de l'automorphisme f_A est donc "triviale".

---

2. Twists de Dehn

Supposons maintenant que $|\mathrm{Tr}(A)| = 2$. Montrer que le l'automorphisme f_A préserve feuille à feuille un feuilletage en cercles du tore $\mathbb{T}^2$, et agit par rotation sur chacun de ces cercles. On dit que f_A est un *twist de Dehn.*

Retenons que, lorsque $|\mathrm{Tr}(A)| = 2$, la dynamique de f_A n'est guère compliquée : en gros, elle n'est "pas plus compliquée que la dynamique d'une rotation du cercle".

---

3. Automorphismes d'Anosov

Supposons enfin $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$.

a. Montrer que A admet deux valeurs propres réelles distinctes λ, λ^{-1} avec $|\lambda| > 1$, et que les vecteurs propres associés ont des pentes irrationnelles.

b. En déduire que :

- l'automorphisme f_A préserve globalement deux feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ de $\mathbb{T}^2$;
- chaque feuille de $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ étant dense dans $\mathbb{T}^2$;
- la différentielle de f_A multiplie par λ la norme des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}^u$, et par λ^{-1} la norme des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}^s$.

On dit que f_A est un *automorphisme d'Anosov*.

Nous allons voir que les automorphismes d'Anosov ont une dynamique très riche, et que tous difféomorphisme proche d'un automorphisme d'Anosov a lui aussi une dynamique très riche.

Dans toute la suite, nous supposons que f_A est un automorphisme d'Anosov. Nous notons λ, λ^{-1} les valeurs propres de A (avec $|\lambda| > 1$). Nous notons $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ les feuilletages invariants de f_A (tels que la norme des vecteurs de tangents aux feuilles de $\mathcal{F}^u$ est dilatée par la différentielle de f_A, alors que celle des vecteurs de tangents aux feuilles de $\mathcal{F}^s$ est contractée.) On notera $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ les feuilletages en droites de $\mathbb{R}^2$ obtenus en relevant $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$.

---

4. Densité des points périodiques et transitivité

Montrer que l'ensemble des points dont l'orbite par f_A est périodique sont denses dans $\mathbb{T}^2$. Remarquer que ceci implique en fait que tout ouvert non-vide de $\mathbb{T}^2$ contient des points périodiques de périodes arbitrairement grandes.

Indication. Considérer l'action de f_A sur $\left(\frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)^2/\mathbb{Z}^2$.

---

5. Variétés invariantes

Pour $x \in \mathbb{T}^2$, on appelle *variété stable* de x (pour l'automorphisme f_A) l'ensemble

$$W^s(x) := \{y \in \mathbb{T}^2 \mid \mathrm{dist}(f_A^n(x)\,,\, f_A^n(y)) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\},$$

et on appelle *variété instable* de x l'ensemble

$$W^u(y) := \{y \in \mathbb{T}^2 \mid \mathrm{dist}(f_A^n(x)\,,\, f_A^n(y)) \to 0 \text{ quand } n \to -\infty\}.$$

a. Identifier la variété stable et la variété instable d'un point x quelconque.

b. Montrer que, si x et y sont deux points fixes de f_A, alors l'ensemble des points z tels que $f^n(z)$ tend vers x quand $n \to -\infty$ et tend vers y quand $n \to +\infty$ est dense dans $\mathbb{T}^2$.

---

6. Mélange topologique et transitivité

a. Montrer que f_A est *topologiquement mélangeant*, c'est-à-dire que : pour tout couple U, V d'ouverts non-vides de $\mathbb{T}^2$, il existe un entier $N \geq 0$ tel que $f_A^n(U) \cap V \neq \emptyset$ pour tout $n \geq N$.

b. En déduire que la dynamique de f_A est *transitive* ; plus précisément : l'ensemble des points de $\mathbb{T}^2$ dont l'orbite par f_A est dense dans $\mathbb{T}^2$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

---

7. Entropie topologique

La notion d'*entropie topologique* permet de quantifier la "richesse" de la dynamique d'une application. Un peu plus précisément, la notion d'entropie topologique d'une application f permet de donner un sens précis et quantitatif au fait que "les orbites par f de deux points proches ne reste en général pas proche pendant bien longtemps" (et ont donc en général rapidement des comportements "complètement différents").

Définition. Considérons un espace métrique compact (X, d) et une application continue $f : X \to X$. Pour $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$, deux points $x, y \in X$ sont dits (n, ϵ)-séparés, s'il existe un entier j avec $0 \leq j \leq n$ tel que $d(f^i(x), f^j(y)) > \epsilon$. Notons $C(n, \epsilon)$ le cardinal maximal d'un ensemble de points de X deux-à-deux (n, ϵ)-séparés. L'*entropie topologique* de f est alors la quantité

$$h_{top}(f) := \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log C(n, \epsilon).$$

En particulier, f a une entropie topologique strictement positive s'il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout entier $n > 0$, il existe un ensemble fini E contenant plus de e^{Cn} points deux à deux (ε, n)-séparés. Sur la notion d'entropie topologique et ses liens avec d'autres quantités, on lira avec profit le chapitre 3 du livre d'A. Katok et B. Hasselblatt.

Nous allons minorer l'entropie topologique de l'automorphisme d'Anosov f_A.

a. Montrer que, quel que soit $n \geq 0$, deux points périodiques de période n pour f_A sont toujours $(n, \frac{1}{2})$-séparés.

b. Soit P un parallélogramme semi-ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont des points entiers,

$$P := \{tV_1 + sV_2, 0 \leq t < 1, 0 \leq s < 1\}$$

avec $V_1 = (\alpha, \beta)$ et $V_2 = (\gamma, \delta)$ dans $\mathbb{Z}^2$. Montrer que l'aire euclidienne de P est égal au nombre de points entiers qu'il contient, c'est à dire au cardinal de $P \cap \mathbb{Z}^2$.

Aide. On pourra se ramener au cas où $\beta = 0$ en utilisant un élément de $GL(2,\mathbb{Z})$, puis se ramener au cas où $\gamma = \delta = 0$ par découpage.

c. Montrer que le nombre de points périodiques dont de période n de f_A est exactement le nombre de points entiers dans le parallélogramme $(A^n - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})([0,1[^2)$.

d. Montrer que le volume du parallélogramme $(A^n - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})([0,1[^2)$ croit comme $k.\lambda^n$ quand $n \to \infty$ (pour une certaine constante $k > 0$).

e. Conclure que l'entropie topologique de f_A est supérieure ou égale à $\log(\lambda)$.

---

8. Mélange pour la mesure de Lebesgue

Nous appellons *mesure de Lebesgue* de $\mathbb{T}^2$, et nous notons Leb, l'image par la projection naturelle $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. C'est aussi le mesure de Haar de $\mathbb{T}^2$ vu comme groupe additif.

a. Montrer que l'automorphisme f_A est mélangeant pour la mesure de Lebesgue : quels que soient les fonctions continues $\varphi, \psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\int (\varphi \circ f_A^n).\psi \,\mathrm{d}\,\mathrm{Leb} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} . \left(\int \varphi \,\mathrm{d}\,\mathrm{Leb}\right) . \left(\int \psi \,\mathrm{d}\,\mathrm{Leb}\right).$$

Indication. Commencer par le cas où f et g sont des fonctions de la forme $(x,y) \mapsto e^{2i\pi(m_1x+m_2y)}$.

b. En déduire que Leb est une mesure ergodique pour f_A.

---

9. Pistage et semi-stabilité topologique

On veut montrer que tout homéomorphisme proche de f_A (en norme uniforme) a une dynamique "au moins aussi compliquée" que celle de f_A.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme qui est à distance finie de l'automorphisme linéaire A. Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on dit que la A-orbite de y *piste* la F-orbite de x si ces deux orbites restent à distance finie l'une de l'autre, c'est-à-dire si

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{d}(F^n(x), A^n(y)) < +\infty.$$

a. Montrer que, pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique point $y \in \mathbb{R}^2$ tel que la A-orbite de y piste la F-orbite de x.

On définit maintenant une application $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ comme suit : pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $\Pi(x) := y$ où y est l'unique point de $\mathbb{R}^2$ tel que la A-orbite de y piste la F-orbite de x.

b. Vérifie que l'application Π ainsi définie est continue, satisfait $\Pi \circ F = A \circ \Pi$, et commute aux translations entière.

c. On suppose maintenant que F préserve le réseau $\mathbb{Z}^2$, et on note $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$l'homéomorphisme induit par F. Montrer que Π induit une application $\pi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ (homotope à l'identité) qui est continue et satisfait $\pi \circ f = a \circ \pi$.

d. Montrer que π est surjective.

Indication. On utilisera le fait que π possède un relevé $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui est à distance finie de l'identité, et on montrera que, pour r assez grand, l'image par Π du disque centré en $(0,0)$ de rayon r contient $[0,1]^2$.

e. Conclure que : pour tout homéomorphisme $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ assez proche (en norme uniforme) de f_A, il existe une application continue surjective $\pi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, tel que $\pi \circ f_A = f \circ \pi$.

Dans le même ordre d'idées, on peut aussi montrer que, si $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homéomorphisme suffisament f_A, alors, pour tout $n > 0$, l'homéomorphisme f a au moins autant de points périodiques de période n que f_A.

---

10. Stabilité structurelle

Fixons une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^2$. La norme C^1 entre d'un difféomorphisme Φ de $\mathbb{R}^2$ est la quantité (éventuellement infinie)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|F(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, \|v\|=1} \|DF(x).v\|.$$

On définit de même la norme C^1 d'un difféomorphismes ϕ de $\mathbb{T}^2$.

Nous allons maintenant montrer que tout difféomorphisme de $\mathbb{T}^2$ suffisamment proche de f_A pour la distance C^1 a la même dynamique que f_A à conjugaison topologique près. On dit que f_A est *structurellement stable.*

a. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont deux difféomorphismes dont les normes C^1 sont plus petites que ϵ, alors il existe un homéomorphisme $\mathrm{Id} + \Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que

$$(A + \Phi_2) \circ (\mathrm{Id} + \Theta) = (\mathrm{Id} + \Theta) \circ (A + \Phi_1).$$

Indication. On projettera l'égalité ci-dessus sur les directions propres de A.

b. En déduire que, pour tout difféomorphisme f de $\mathbb{T}^2$ tel que la norme C^1 $f - f_A$ est suffisamment petite, il existe un homéomorphisme h de $\mathbb{T}^2$ qui conjugue f et f_A.