Université Paris Sud, Master Math. Fonda. et Appliquées, année 2006-07
Unité de valeur "Analyse et Mathématiques Fondamentales II"

Examen d'Analyse du 11 juin 2007

Exercice 1. On considère l'espace $(\ell^2(\mathbb{N}), \|.\|_2)$ des suites réelles $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carré sommable, muni de la norme $\|a\|_2 = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2)^{1/2}$. On note

$$B := \left\{ a \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n^2)|a_n|^2 \leq 1 \right\}.$$

Montrer que B est une partie compacte de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Indication. On pourra par exemple considérer une suite $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B, montrer que :

1. *$(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(a^{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement,*
2. *que la limite de cette sous-suite est dans B,*
3. *que $(a^{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en fait au sens de la norme $\|.\|_2$.*

Exercice 2. Dans cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$|f(x) - \sin(x)| \leq 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse aux solution de l'équation différentielle

$$(1) \qquad x' = f(x).$$

Montrer que toutes les solutions maximale de (1) sont définie sur $\mathbb{R}$ et bornées.

Exercice 3. Le but de l'exercice est d'étudier les solutions du système d'équations différentielles

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x - xy - x^2 \\ y' &=& -4y + 2xy \end{array} \right.$$

au voisinage du point $A = (1, 0)$.

1) Montrer que la point A est un point fixe du système (2). Que peut-on dire sur la nature de ce point fixe ?

2) Déterminer les isoclines I_0 et I_∞ du système (2). Qu'en déduit-on ?

3) On considère une solution maximale $(x(t), y(t))$ du système (2). On note $I =]T_*, T^*[$ l'intervalle de définition de cette solution maximale. Dans cette question, on suppose qu'il existe un instant $t_0 \in I$ tel que $(x(t_0), y(t_0)) \in U$, où

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 < x \leq 1, y \leq -x + 1\}.$$

a) Montrer que $(x(t), y(t)) \in U$ pour tout $t \in [t_0, T^*[$.

b) En déduire que $T^* = +\infty$ et que $(x(t), y(t)) \to A$ quand $t \to +\infty$.

4) On suppose maintenant qu'il existe un instant $t_0 \in I$ tel que $(x(t_0), y(t_0)) \in V$, où

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 < x \leq 2, y \geq -x + 1\}.$$

a) Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ décroissent tant que $(x(t), y(t))$ reste dans V.

b) En déduire que $T^* = +\infty$ et que $(x(t), y(t)) \to A$ quand $t \to +\infty$.

Remarque. *On montrerait de même que $T^* = +\infty$ et $(x(t), y(t)) \to A$ quand $t \to +\infty$ s'il existe un instant $t_0 \in I$ tel que $(x(t_0), y(t_0)) \in W$, où*

$$w := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 < x \leq 2, -1 < y \leq 0\}.$$