Master Math. Fonda. et appliquées — Orsay 2007–2008
U4 : Analyse 1er semestre

Examen du 22 janvier 2008

Le sujet est volontairement trop long pour 2 heures, et le barème prévisionnel totalise beaucoup plus de 20 points. Cela vous laisse un peu de choix quant aux questions que vous traitez.

Notations. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable (2π)-périodique. On note $c_n(f)$ le n^{ieme} coefficient de Fourier de f, et $S_N(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la N^{ieme} somme de Fourier de f. On rappelle que

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad \text{et} \qquad S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}.$$

Question de cours. Principe du maximum (environ 5 points).

Donner un énoncé (précis) du principe du maximum pour une fonction analytique, puis démontrer cet énoncé (environ 1,5 points pour l'énoncé et 3,5 points pour la preuve).

Vrai-faux : séries de Fourier et fonctions analytiques (environ 9,5 points).

Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier votre réponse (entre 1 et 2,5 points pour chaque affirmation).

1. Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, (2π)-périodique, telle que $\|S_N(f)\|_\infty \leq 1$ pour tout $N \geq 0$, et telle que $\|f\|_\infty > 1$.

2. Il existe une fonction non-nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, (2π)-périodique, telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$, et telle que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 2. \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.

3. Il existe une fonction analytique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

4. Il existe une fonction analytique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$.

5. Soit f la fonction définie sur le disque ouvert $D(0,1)$ par $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$. Il existe une fonction holomorphe F, définie sur $\mathbb{C}$, qui prolonge f.

6. Soit f la fonction définie sur le disque ouvert $D(0,1)$ par $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n z^n}{n}$. Il existe une fonction holomorphe F, définie sur $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |\mathrm{Re}(z)| < 1\}$, qui prolonge f.

Exercice 1 - Fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0 (environ 10 points).

1. (environ 1,5 points) Trouver une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ et une suite de réels strictement positifs $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ telles que les trois conditions suivantes sont satisfaites:

$$n_{k+1} > 3n_k \text{ pour tout } k \geq 1 \quad ; \quad \sum_1^\infty \alpha_k < +\infty \quad ; \quad \alpha_k \log n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. (environ 4 points) Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\sin(jx)}{j}.$$

Montrer que

$$\sup_{n\geq 1} \|G_n\|_\infty < +\infty.$$

Indication. On pourra écrire $G_n(x)$ comme somme de deux termes $I_n(x)$ et $J_n(x)$ avec

$$I_n(x) = \sum_{j=1}^{\min\left(E\left(\frac{1}{x}\right),n\right)} \frac{\sin(jx)}{j}$$

$$J_n(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=E\left(\frac{1}{x}\right)+1}^{n} \frac{\sin(jx)}{j} & \textit{si } E\left(\frac{1}{x}\right) < n \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

On majorera $|J_n(x)|$ grâce une transformation d'Abel, et on vérifiera que $|I_n(x)| \leq 1$.

3. (environ 1 point) Pour tout $k \geq 1$, on considère alors la fonction $P_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$P_k(x) = e^{2in_kx} G_{n_k}(x).$$

Dire pourquoi la formule

$$f(x) := \sum_{k=1}^\infty \alpha_k P_k(x)$$

définit bien une fonction continue (2π)-périodique.

4. (environ 3,5 points) Calculer le coefficient de Fourier $c_n(P_k)$ en fonction de n et de k. Montrer alors que

$$\begin{cases} c_n(f) = \alpha_k . c_n(P_k) \text{ s'il existe } k \text{ tel que } n_k \leq n \leq 3n_k \\ c_n(f) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

En déduire que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$S_{2n_k}(f)(0) = -\frac{\alpha_k}{2i} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{j}.$$

En déduire finalement que la série de Fourier de f en 0 diverge.

Exercice 2 - Prolongement de la fonction logarithme. (environ 5,5 points).

Soit $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction logarithme usuelle, définie comme la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

1. (environ 1,5 points) Montrer que la fonction ln est analytique sur $]0,+\infty[$. Quel est le rayon de convergence R_x de son développement en série entière en un point $x \in]0,+\infty[$?

2. (environ 2 points) Pour $x \in]0,+\infty[$, on note $D(x, R_x)$ est le disque ouvert de centre x de rayon R_x dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\bigcup_{x\in]0,+\infty[} D(x, R_x) = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid a > 0\}.$$

Expliquer pourquoi il existe une unique fonction holomorphe, définie sur $\{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid a > 0\}$, prolongeant la fonction $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. On note cette fonction log dans la suite.

3. (environ 2 points) Démontrer que, pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a

$$\log(1 + e^{i\theta}) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{e^{in\theta}}{n}.$$