Examen du 29 juin 2009

Durée 2 heures. Documents et calculatrices interdits. Les quatre exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barême fourni est seulement indicatif.

Exercice E.1.— Champs de tangentes et tracés de solutions (6,5 points)
On considère l'équation différentielle

$$y' = (\sin(y) + 1)\cos(x). \tag{1}$$

On notera f la solution maximale de cette équation qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

1. (3 points) Déterminer et tracer :
- l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est nulle,
- l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est positive,
- l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est négative.

(on effectuera un dessin qui couvre au moins la région $-3\pi \leq x, y \leq 3\pi$)

2. (1 point) Existe-t-il des fonctions constantes qui sont solution de l'équation (1) ? Lesquelles ?

3. (1,5 point) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4. (1 point) Sur le dessin de la question 1, esquisser l'allure du graphe de f.

Exercice E.2.— Équations à variables séparables (4,5 points)
On considère l'équation différentielle

$$y' = y^3\cos(2x). \tag{2}$$

1. (1 point) Une solution de cette équation différentielle peut-elle s'annuler ?

2. (2 points) Déterminer la solution de cette équation qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$?

3. (1,5 point) Quel est l'intervalle de vie de cette solution ? Tracer son graphe.

Exercice E.3.— Équations linéaires du premier ordre (4 points)
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 2x(y + 3) \tag{3}$$

Tournez SVP

Exercice E.4.— Étude qualitative et utilisation de barrières (9 points)
On considère, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation différentielle

$$y' = -y^5\left(4+\cos^2(y)+e^{2x}\right). \tag{4}$$

On note f la solution de cette équation différentielle qui satisfait la condition initiale $f(1)=1$; on note $]a,b[$ l'intervalle de définition de f.

1. (1,5 point) Montrer que f est strictement positive.

2. (0,5 point) Déterminer le sens de variation de f sur $]a,b[$.

3. (1,5 point) Montrer que $b=+\infty$.

4. (1 point) Soit g la solution maximale de l'équation différentielle

$$y' = -4y^5. \tag{4bis}$$

qui vérifie la condition initiale $g(1)=1$. Calculer g.

5. (5 points) Montrer que g est une sur-solution pour l'équation différentielle (4). En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

En déduire également que $a>0$ et

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$