Examen, deuxième session

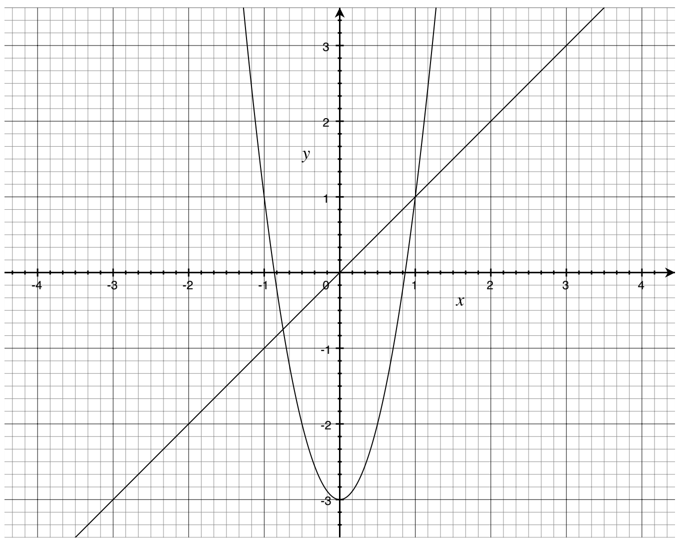
Dynamique de l'application $x \mapsto 4x^2 - 3$

Il vous est demandé de justifier le plus soigneusement possible vos réponses.

On s'intéresse au système dynamique discret sur $\mathbb{R}$ dont la loi d'évolution est l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x^2 - 3 \end{array}$$

dont le graphe est représenté ci-dessous.



1. Points fixes du système (environ 2 points)

Donner la liste des points fixes du système. Déterminer la nature (attractif, répulsif, etc.) de chacun de ces points fixes.

2. Bassin d'attraction de l'infini (environ 5 points)

a. Déterminer le comportement de l'orbite d'un point x_0, lorsque $x_0 > 1$ (démontrez soigneusement ce que vous affirmez). Même question lorsque $x_0 < -1$. Même question lorsque $x_0 \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

b. On considère les intervalles $I^- = \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $I^+ = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, et on note

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(I^- \cup I^+)$$

l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ dont l'orbite ne sort pas de $I^- \cup I^+$. Déterminer le comportement de l'orbite d'un point $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K$.

3. Orbites périodiques de période 2 (environ 5 points)

a. On note $z_0^2 = -1$, $z_3^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_4^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_7^2 = 1$. Montrer qu'il existe des points $z_1^2, z_2^2, z_5^2, z_6^2$ tels que
$$z_0^2 < z_1^2 < z_2^2 < z_3^2 < z_4^2 < z_5^2 < z_6^2 < z_7^2$$
et tels que
$$f(z_1^2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad f(z_2^2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad f(z_5^2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad f(z_6^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
En déduire que $f^2(z_i^2) = 1$ pour $i = 0, 3, 4, 7$ et $f^2(z_i^2) = -1$ pour $i = 1, 2, 5, 6$.

b. En déduire que f^2 possède au moins 4 points fixes.

c. Montrer que f^2 possède au plus 4 points fixes.

d. Combien le système possède-t-il de points périodiques de période primitive 2 ?

4. Conjugaison au décalage et orbites périodiques (environ 9 points)

On note Σ_2 l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (un élément de Σ_2 est donc une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont chaque terme vaut 0 ou 1). L'ensemble Σ_2 est muni de la distance d habituelle : si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de Σ_2, on a
$$d(a,b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|a_n - b_n|.$$
On note enfin σ le décalage à gauche sur Σ_2. Rappelons que, pour toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Σ_2, la suite $\sigma(a)$ est obtenu en décalant les termes de a d'un cran vers la gauche ; autrement dit, on a $(\sigma(a))_n = a_{n+1}$.

a. En utilisant les intervalles I^- et I^+ (définis en 2.*b*), montrer qu'il existe un homéomorphisme $h : K \to \Sigma_2$ tel que $h \circ f_{|K} = \sigma \circ h$. *On pourra citer (précisément) un théorème du cours ; dans tous les cas, on explicitera l'application h.*

b. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élement de Σ_2. À quelle condition portant sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'orbite de a par σ est-elle périodique de période (non-nécessairement primitive) n ?

c. Pour $n \geq 1$ fixé, combien σ possède-t-il de points périodiques de période (non-nécessairement primitive) n ? En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, σ possède au moins une orbite de période primitive n.

d. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élement de Σ_2. Expliciter une suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2$ tel que :

1. l'orbite de b par σ est périodique de période (non-nécessairement primitive) n,
2. la distance $d(a,b)$ est inférieure à $2^{-(n-1)}$.

En déduire que les orbites périodiques de σ sont denses dans Σ_2 (plus précisément, l'ensemble des points de Σ_2 dont les orbites par σ sont périodiques est dense dans Σ_2).

e. En déduire que le système dynamique considéré au départ (*i.e.* le système sur $\mathbb{R}$ de loi d'évolution f) a les propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système possède au moins une orbite de période primitive n,
2. les orbites périodiques du système sont denses dans l'ensemble K.