Examen du 12 décembre 2008

Documents et calculatrices interdits. Les quatre exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barême fourni est seulement indicatif.

Exercice E.1.— Champs de tangentes et tracés de solutions (4,5 points)
On considère l'équation différentielle

$$y' = yx - y^3. \tag{1}$$

1. Déterminer et tracer :
- l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est nulle,
- l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est positive,
- l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est négative.

2. Que peut-on dire de la solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$?

3. Esquisser l'allure du graphe de la solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 3$.

Exercice E.2.— Équations à variables séparables (4,5 points)
On considère l'équation différentielle

$$y' = y^2 \sin(x). \tag{2}$$

1. Une solution de cette équation différentielle peut-elle s'annuler ?

2. Déterminer la solution de cette équation qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$?

3. Quel est l'intervalle de vie de cette solution ? Tracez son graphe.

Exercice E.3.— Équations linéaires du premier ordre (4 points)
Résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle

$$xy' - y - x^3 = 0. \tag{3}$$

Tournez SVP

Exercice E.4.— Étude qualitative et utilisation de barrières (7 points)
On considère, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation différentielle

$$y' = -\frac{y^3}{2} - \frac{e^y}{x^3}. \tag{4}$$

On note f la solution de cette équation différentielle qui satisfait la condition initiale $f(1) = 1$; on note $]a, b[$ l'intervalle de définition de f.

1. Montrer que f est strictement positive. En déduire que f est strictement décroissante.

2. Montrer que $b = +\infty$.

3. Soit g la solution maximale de l'équation différentielle

$$y' = -\frac{y^3}{2}. \tag{4bis}$$

qui vérifie la condition initiale $g(1) = 1$. Calculer g.

4. Montrer que g est une sur-solution pour l'équation différentielle (4), et en déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$