Examen, première session

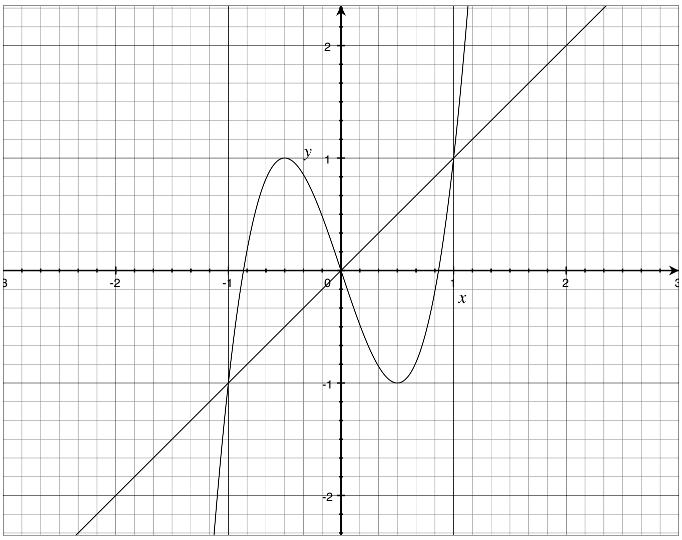
Dynamique de l'application $x \mapsto 4x^3 - 3x$

Il vous est demandé de justifier le plus soigneusement possible vos réponses.

On s'intéresse au système dynamique discret sur $\mathbb{R}$ dont la loi d'évolution est l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x^3 - 3x \end{array}$$

dont le graphe est représenté ci-dessous.



1. Points fixes du système (environ 1,5 points)

Donner la liste des points fixes du système. Déterminer la nature (attractif, répulsif, etc.) de chacun de ces points fixes.

2. Bassin d'attraction de l'infini (environ 2,5 points)

a. Déterminer le comportement de l'orbite d'un point x_0, lorsque $x_0 > 1$ (démontrez soigneusement ce que vous affirmez). Même question lorsque $x_0 < -1$.

b. Montrer que, si $x_0 \in [-1, 1]$, alors l'orbite de x_0 reste dans $[-1, 1]$.

3. Points périodiques (environ 10 points)

Le but de cette question est de montrer que, pour tout $n \geq 1$, le système dynamique étudié possède au moins un point périodique de période primitive n. L'étape cruciale consiste, pour tout $n \geq 1$, à montrer l'existence de $3^n + 1$ points $z_0^n < \ldots < z_{3^n}^n$ dans $[-1, 1]$ tels que

$$f^n(z_i^n) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

a. Donner explicitement les points $z_0^n, \ldots, z_{3^n}^n$ pour $n = 1$. Autrement dit, donner 4 points $z_0^1 < z_1^1 < z_2^1 < z_3^1$ tels que $f(z_i^1) = -1$ pour $i = 0, 2$, et $f(z_i^1) = 1$ pour $i = 1, 3$.

b. On cherche maintenant les points $z_0^n, \ldots, z_{3^n}^n$ pour $n = 2$. On définit les points $z_0^2, z_3^2, z_6^2, z_9^2$ en posant

$$z_0^2 := z_0^1 \quad , \quad z_3^2 := z_1^1 \quad , \quad z_6^2 := z_2^1 \quad , \quad z_9^2 := z_3^1.$$

Montrer qu'il existe des points z_1^2, z_2^2 tels que $z_0^2 < z_1^2 < z_2^2 < z_3^2$ et tels que

$$f(z_1^2) = -1/2 \quad \text{et} \quad f(z_2^2) = 1/2.$$

De même, montrer qu'il existe des points $z_4^2, z_5^2, z_7^2, z_8^2$ tels que $z_3^2 < z_4^2 < z_5^2 < z_6^2 < z_7^2 < z_8^2 < z_9^2$ et

$$f(z_5^2) = 1/2 \quad , \quad f(z_6^2) = -1/2 \quad , \quad f(z_7^2) = -1/2 \quad \text{et} \quad f(z_8^2) = 1/2.$$

Montrer que $f^2(z_i^2) = -1$ pour $i = 0, 2, 4, 6, 8$ et $f^2(z_i^2) = 1$ pour $i = 1, 3, 5, 7, 9$.

c. En généralisant la construction de la question précédente, montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe des points $z_0^n < \ldots < z_{3^n}^n$ dans $[-1, 1]$ tels que

$$f^n(z_i^n) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ \ \ 1 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

d. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, le système dynamique considéré possède au moins 3^n points périodiques de période n.

e. Inversement, montrer que, pour tout $n \geq 1$, le système possède au plus 3^n points périodiques de période n (on pourra utiliser le fait que f est un polynôme de degré 3).

f. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \geq 1$, le système considéré admet au moins un point périodique de période primitive n.

4. Sensibilité aux conditions initiales (environ 3 points)

a. En utilisant la question 3.c., montrer que, pour tout entier n, il existe au moins un point $x_0 \in [-1, 1]$ tel que l'application f^n envoie l'intervalle $I_0 = [x_0 - \frac{1}{3^n}, x_0 + \frac{1}{3^n}]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ en entier.

b. Supposons qu'on connait la position d'un point x_0 dans $[-1, 1]$ avec une erreur possible de $\pm 10^{-6}$. Quel renseignement cela nous donne-t-il sur la position du point $x_{15} = f^{15}(x_0)$?

5. Conjugaison à une application affine par morceaux (environ 3 points)

a. Montrer que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

b. Soit $h : [0, 1] \to [-1, 1]$ définie par $h(x) = \cos(\pi.x)$. Vérifier que h est un homéomorphisme.

c. Soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ l'application définie par

$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ -3x + 2 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 3x - 2 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Montrer que h conjugue $f_{|[-1,1]}$ à g.

6. Un peu de théorie ergodique (environ 4 points)

a. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ est invariante par g.

b. En déduire l'existence d'une fonction $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ (que l'on déterminera) tel que la mesure ϕ.Leb sur $[-1, 1]$ est invariante f.

c. En déduire que, pour presque tout point $x_0 \in [-1, 1]$ au sens de la mesure de Lebesgue, l'orbite de x_0 repasse arbitrairement près de x_0 une infinité de fois.