Master Math. Fonda. et appliquées — Orsay 2007–2008
U4 : Analyse 1er semestre

Feuille d'exercices n°2

Convolutions - Apporximations de l'unité

Exercice 1 - Un calcul explicite avec une approximation de l'unité

Étant donné un réel $h > 0$, on note $\phi_h = \frac{1}{2h} 1_{[-h,h]}$ le fonction indicatrice de l'intervalle $[-h, h]$.

a - Calculer $\phi_h * \phi_1$ pour tout $h \leq 1$, et étudier le comportement, en tout point $x \in \mathbb{R}$, de $\phi_h * \phi_1$ lorsque $h \to 0^+$.

Exercice 2 - $L^p * L^q$ pour des exposants p et q conjugués.

a - Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^p_{2\pi}$). On note $\tau_h f(x) = f(x + h)$. Montrer que $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^p_{2\pi}$) quand $h \to 0$.

Indication. Utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (resp. de $C(\mathbb{R})$ dans $L^p_{2\pi}$).

b - Soient p et $q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^p_{2\pi}$), $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^q_{2\pi}$). Montrer que $f * g$ est bien définie partout, est uniformément continue et bornée.

c - Si de plus $p, q > 1$, montrer que $f * g$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}^n$ de fonctions de $C_c(\mathbb{R}^n)$. En déduire que $f * g$ tend vers 0 quand $\|x\| \to +\infty$.

Exercice 3 - Approximation d'une fonction par ses moyennes.

Dans $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme, on note $C = \lambda(B(0, 1))$ la mesure de Lebesgue de la boule unité. Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $h > 0$, on considère

$$F_h(x) = \frac{1}{Ch^d} \int_{B(x,h)} f(y)dy.$$

a - Montrer que F_h est continue.

b - On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'on a $F_h \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque $h \to 0^+$. On pourra chercher à écrire F_h comme un produit de convolution.

Exercice 4 - Noyau de Cauchy et approximation par des fonctions analytiques.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < +\infty$. Pour $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on pose

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt.$$

a - Montrer que la fonction F est bien définie, et holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On rappellera précisément les résultats utilisés.

b - On note $G_y(x) = F(x + iy) - F(x - iy)$. Vérifier que $G_y(x) = (f * P_y)(x)$ avec

$$P_y(x) = \frac{2iy}{x^2 + y^2}.$$

c - En déduire que $G_y \to 2i\pi f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ lorsque $y \to 0^+$.

Exercice 5 - Noyaux de Dirichlet et de Fejer
On rappelle que le noyau de Dirichlet $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est défini par la formule

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

et que le noyau de Fejer $K_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est défini par la formule

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x).$$

Montrer que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des noyaux de Dirichlet n'est pas une approximation de l'unité, mais que la suite $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des noyaux de Fejer en est une.

Exercice 6 - Fonctions L^1 à coefficients de Fourier positifs
On considère une fonction $f \in L^1_{2\pi}$ continue en 0 et dont tous les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont positifs. On veut montrer que f est égale presque partout à une fonction continue. On note K_N le noyau de Féjer.

a - Montrer que $\lim_{N\to+\infty}(K_N * f)(0) = f(0)$.

b - Exprimer $(K_N * f)(0)$ en fonction des coefficients de Fourier de f puis montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge.

c - Conclure i.e. montrer que f est égale presque partout à une fonction continue.

Exercice 7 - Densité des polynômes trigonométriques
Pour tout $n \geq 0$, on considère le polynôme trigonométrique Q_n défini par

$$Q_n(t) = a_n \cos^{2n}(\pi t) = \frac{a_n}{2^n}(1 + \cos(2\pi t))^n$$

où a_n est choisit de tel manière que $\int_{-1/2}^{1/2} Q_n(t)dt = 1$.

a - Montrer que $\frac{c_n}{n}$ est borné indépendamment de n.

b - Montrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

c - En utilisant la convolution avec les polynômes Q_n, montrer que toute fonction f de période 1 est limite uniforme de poynômes trigonométriques.

Exercice 8 - Résolution d'une équation aux dérivées partielles à l'aide de la convolution
On considère une barre métallique (de longueur infinie !). On note $u(x,t)$ la température de la barre au point d'abscisse x à l'instant t. La chaleur se propageant librement, la température $u(x,t)$ satisfait l'équation de la chaleur

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On suppose par ailleurs que l'on connait la température de la barre en chaque point à l'instant $t = 0$: autrement dit, on a

$$u(x,0) = f(x)$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction connue. On se propose de trouver la fonction u (ou plutôt une fonction u possible puisqu'on ne va pas montrer de résultat d'unicité). Pour ce faire, on pose

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

a - Montrer que la famille $(\phi_t)_{t>0}$ forme une approximation de l'unité lorsque $t \to 0^+$.

b - Montrer que $\phi(x,t) = \phi_t(x)$ satisfait l'équation de la chaleur.

c - On suppose f continue et bornée. Montrer que la fonction $u_f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ définie par

$$u(x,t) = (f * \phi_t)(x)$$

vérifie l'équation de la chaleur et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$.

Indication. La seule difficulté est de montrer que $\frac{\partial u}{\partial t} = f * \frac{\partial \phi}{\partial t}$.