Feuille d'exercices n°3

Espaces compacts

1 - Minimisation d'une fonctionnelle d'action.

On travaille dans $\mathbb{R}^2$ euclidien. Pour $m_1 = (x_1, y_1)$, $m_2 = (x_2, y_2)$ et $L \geq d(m_1, m_2)$, on considère

$$\mathcal{C} = \{\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2 \mid \gamma(0) = m_1, \gamma(L) = m_2 \text{ et } \gamma \text{ est } 1\text{−lipschitzienne}\}.$$

On définit $E : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ par $E(\gamma) = \int_0^L y(t)dt$ où $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Montrer que E est minoré sur $\mathcal{C}$ et qu'il existe une fonction $\gamma_0 \in \mathcal{C}$ telle que $E(\gamma_0) = \inf\limits_{\mathcal{C}} E$.

---

2 - Cube de Hilbert.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que

$$C_a = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } |u_n| \leq a_n \text{ pour tout } n\}$$

est un sous-ensemble compact de $l^\infty(\mathbb{N})$.

2. Montrer que

$$C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } u_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty\}$$

n'est pas un sous-ensemble compact de $l^\infty(\mathbb{N})$.

---

3 - Espace de Sobolev discret.

On considère l'espace $(\ell^2(\mathbb{N}), \|.\|_2)$ des suites réelles $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carré sommable, muni de la norme $\|a\|_2 = (\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2)^{1/2}$. On note

$$B := \left\{ a \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n^2)|a_n|^2 \leq 1 \right\}.$$

Montrer que B est une partie compacte de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Indication. Étant donnée une suite $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B, on pourra commencer par montrer que $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(a^{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement, montrer que la limite a de cette sous-suite est dans B, puis montrer que $(a^{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en fait vers a au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.

4 - Familles de fonction relativement compactes ou non.

1. Dans $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup, on considère pour $k \geq 0$, l'espace F des fonctions C^1 avec $\|f'\|_\infty \leq k$ et $f(0) = 0$. F est-il relativement compact dans E? compact?

2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = f(nt)$. Montrer que la famille de fonctions $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte dans $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup si et seulement si f est constante. Qu'en est-il avec la famille $\{g_n \in E \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $g_n(t) = f(t/n)$?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$. Montrer que la famille de fonctions $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue sur $\mathbb{R}$. Est-elle relativement compacte (pour la norme du sup)?

---

5 - Distance de Hausdorff.

Soit (X,d) un espace métrique compact non vide. On note $\mathcal{F} = \{\text{parties fermées non vides de X}\}$. Pour $A \in \mathcal{F}$, on pose $\phi(A) : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(A)(x) = d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

Pour $A, B \in \mathcal{F}$, on note $\delta(A,B) = \|\phi(A) - \phi(B)\|_\infty = \sup_{x \in X} |\phi(A)(x) - \phi(B)(x)|$.

1. Vérifier que δ est une distance sur $\mathcal{F}$ (appelée distance de Hausdorff).

2. On suppose que $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de $\mathcal{F}$ telle que $\phi(A_n) \to f$ uniformément sur X, quand $n \to +\infty$, pour une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue. On note $A = f^{-1}(\{0\})$.

a) Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe $a_n \in A_n$ avec $\phi(A_n)(x) = d(x, a_n)$. En déduire qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) = f(x)$.

b) Montrer que f est 1-lipschitzienne, et en déduire que $f \leq \phi(A)$.

c) Conclure que $f = \phi(A)$.

3. En déduire, à l'aide du théorème d'Ascoli, que $(\mathcal{F}, \delta)$ est compact.

---

6 - Opérateurs à noyaux continus.

On note $E = C([0,1],\mathbb{C})$ que l'on munit de la norme du sup. Pour $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ continue et $f \in E$, on pose

$$K(f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$$

(k s'appelle le noyau de K).

1. Vérifier que K définit une application linéaire continue de E dans E.

2. Montrer, à l'aide du théorème d'Ascoli, que l'image par K de $\overline{B}_E(0,1)$, la boule unité fermée de E, est relativement compacte dans E. (On dit que K est un opérateur compact.)

3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $E_\lambda = \ker(K - \lambda \mathrm{Id})$. Montrer, à l'aide du théorème de Riesz, que E_λ est de dimension finie si $\lambda \neq 0$.

---

7 - Fonctions presques périodiques.

Soit $E = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme du sup. Pour $f \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $\tau_a f(x) = f(x+a)$. On dit que $f \in E$ est presque périodique si la famille de fonctions $A_f = \{\tau_a f \mid a \in \mathbb{R}\}$ est relativement compacte dans E.

1. Montrer que les fonctions périodiques sont presque périodiques. *Indication.* Considérer l'application $\tau : a \to \tau_a f$ et remarquer que $A_f = \tau([0,T])$ si f est T-périodique.

2. Montrer que l'espace des fonctions presque périodiques est un sous-espace vectoriel fermé de E. Est-il réduit aux fonctions périodiques?

3. Soit $f \in E$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer en considérant les $(\tau_n f)_{n \in \mathbb{N}}$, que f n'est pas presque périodique, bien que la famille A_f soit équicontinue.

4. Montrer que f est presque périodique ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists l_\varepsilon > 0$, tel que tout intervalle de longueur l_ε contienne un p tel que $\|\tau_p f - f\|_\infty \leq \varepsilon$ (p s'appelle une presque période). (Utiliser la précompacité de $(T_n f)_{n \in \mathbb{Z}}$.)

---

8 - Applications propres

Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$. On dit que f est propre si $f^{-1}(K)$ est compact pour tout compact $K \subset Y$.

1. a) Montrer que si f est continue et X est compact, elle est automatiquement propre. Donner un exemple d'application continue non propre avec $X = Y = \mathbb{R}$.

b) Montrer que si f est continue et propre, alors elle est fermée (l'image d'un fermé est un fermé).

c) Montrer que si f est continue injective et propre, alors elle induit un homéomorphisme de X sur $f(X)$.

2. Applications :

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t + \cos(2t), \sin(2t))$. Montrer que la courbe $f(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (et en donner son allure)(à comparer avec l'ex 2 2c).

b) Soit $f : U = (\mathbb{R}^{*+})^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Montrer que $\inf\limits_U f$ existe et est atteint. Le déterminer (à l'aide d'un cours de calcul différentiel).

---

9 - Ensemble de Cantor

On considère l'ensemble de Cantor "abstrait" $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $(= \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\})$ des suites de 0 et de 1. On munit X, de sa topologie produit.

1) Montrer que X est compact.

2) Montrer que X est homéomorphe à l'ensemble de Cantor triadique

$$K = \left\{\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \mid a_n \in \{0,2\}\right\} \subset [0,1]\,.$$

(on pourra utiliser l'exercice précédent).

---

10 - Une caractérisation des parties relativement compactes

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et K une partie non vide de E.

1. On suppose que K est relativement compacte. Montrer, en utilisant la précompacité qu'il existe une suite de compacts non vides $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(K_n)$ est de dimension finie,
- la suite de fonctions $(d(.,K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur K.

2. On suppose dans cette question que E est complet, et qu'il existe une suite de compacts non vides $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions précédentes. Montrer que K est relativement compacte.

3. *Application.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. En utilisant la question 2, montrer que

$$C_a = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } |u_n| \leq a_n \text{ pour tout } n\}$$

est un sous-ensemble compact de $l^\infty(\mathbb{N})$.