Master Math. Fonda. et appliquées — Orsay 2007–2008
U4 : Analyse 1er semestre

Feuille d'exercices n°1

Autour de la convergence uniforme

Exercice 1 - Séries entières (lemme d'Abel)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ définit une fonction de classe C^∞ sur le disque ouvert $D(0,R)$, où

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}.$$

Montrer que cette série diverge en tout point z tel que $|z| > R$.

Exercice 2 - Fonction continue dérivable nulle part

Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2\pi 100^n x)}{10^n}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, mais que cette fonction f n'est dérivable en aucun point. Pour ce faire, on cherchera, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers x telle que $\frac{|f(x_n)-f(x)|}{|x_n-x|} \to \infty$.

Remarque. C'est Kal Weierstrass qui a le premier remarqué l'existence de telles fonctions à la fin du XIXème siècle.

Moralité. La somme d'une série normalement convergente de fonctions dérivables n'est pas du tout dérivable en général. Pour qu'elle le soit, il faut que la série des dérivées converge.

Exercice 3 - Lemme de Borel : construction d'une fonction à dérivées en 0 imposées

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On veut montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support compact telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^∞ telle que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq 1/2$ et $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.

2. Montrer qu'il existe une suite $\lambda_n \in]0,1]$ telle que les fonctions

$$f_n(x) = a_n.\varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right).\frac{x^n}{n!},$$

satisfassent

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq 2^{-n} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n-1\,.$$

Indication. On utilisera la formule de Leibniz $(fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p f^{(p)} g^{(k-p)}$, en remarquant que le support de $\varphi^{(p)}(x/\lambda_n)$ est inclus dans $[-\lambda_n, \lambda_n]$.

3. En déduire que la série de fonctions $f = \sum_{n\geq 0} f_n$ est C^∞ à support compact et répond à la question.

4. *Application.* Montrer que toute fonction de classe C^∞ sur $[a,b]$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 - Régularité et décroissance de coefficients de Fourier

Soit f une fonction continue 2π-périodique. On note $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier.

1. Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si la suite $c_n(f)$ est à décroissance rapide, i.e pour tout k fixé la suite $|n|^k c_n(f)$ est bornée.

2. Montrer que f est analytique sur $\mathbb{R}$ dès lors que la suite $c_n(f)$ est à décroissance exponentielle, i.e dès lors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $e^{\varepsilon|n|}c_n(f)$ soit bornée.

3. Soit $0 < \alpha < 1$ montrer que la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-n^\alpha} e^{inx} dx$ est de classe C^∞ mais pas analytique au voisinage de 0.

Indication. Pour k entier fixé, estimer le maximum de $n^k e^{-n^\alpha}$ et en déduire que $\left(\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\right)^{1/k} \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$.

Remarque. En fait, la réciproque de la question 2 est vraie! (Cf Zuily-Queffelec p 96-98).

Exercice 5 - Régularité et décroissance de la transformée de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt$ sa transformée de Fourier.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^k dès lors que $t \to |t|^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\widehat{f}$ est analytique sur $\mathbb{R}$ dès lors que f est à décroissance exponentielle, c'est-à-dire dès lors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $e^{\varepsilon|x|}f(x)$ soit borné lorsque $|x| \to +\infty$.

Indication. On rappelle que $\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt = (k-1)!$

3. Montrer que si f est à support compact, alors $\widehat{f}$ est une fonction entière, i.e. une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.

Exercice 6 - Séries trigonométriques à coefficients poistifs décroissants

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissantes de nombres positifs qui tend vers 0. On considère la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} a_n \sin(nx)$. Montrer que cette série:

   1. converge simplement sur $\mathbb{R}$,
   2. converge uniformément sur $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ pour tout $\epsilon > 0$,
   3. converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\sum a_n < \infty$,
   4. converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $na_n \to 0$.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n \log n}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ mais ne converge absolument en aucun point $]0, 2\pi[$. On pourra utiliser le fait que $|\sin(nx)| \geq 1 - cos(2nx)$.