Master Maths Fonda. et Appliquées — Orsay 2008–09
1ère année - 2 ème semestre - Analyse

Feuille d'exercices n°2

Espaces métriques complets

Les deux premiers exercices concernent la notion de *complété d'un espace métrique*. Les exercices 3,4 et 5 montrent trois exemples d'applications intéressantes du théorème du point fixe de Banach-Picard, et l'exercice 6 une application importante du fait que "dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente". Les 7, 8 et 9 ont pour but de vous faire manipuler la notion d'ensemble G_δ-dense et le théorème de Baire. Enfin, les exercices 10 et 11 sont des applications du théorème de Banach-Steinhaus.

1 - Complété d'un espace métrique.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un espace métrique complet (Y, δ) est un complété de (X, d) si il existe une isométrie $i : X \to Y$ (c'est-à-dire que $\delta(i(x), i(x')) = d(x, x')$) telle que $f(X)$ soit dense dans Y.

1. (*Unicité*) Montrer que si (Y_1, δ_1) et (Y_2, δ_2) sont deux complétés de (X, d) alors Y_1 et Y_2 sont isométriques.

2. Si $X \subset Y$ avec (Y, d) complet. Donner un complété de X.

3. (*Existence*) Soit (X, d) un espace métrique non vide et $a \in X$ fixé. Pour $x \in X$, on définit $f_x : X \to \mathbb{R}$ par $f_x(y) = d(x, y) - d(a, y)$.
Montrer que l'application $i : x \to f_x$ est une isométrie de (X, d) vers l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles bornées sur X, muni de la norme du sup. En déduire que (X, d) possède un complété.

---

2 - Exemples d'espaces complets ou non

Les espaces suivant sont-ils complets? Sinon pouvez-vous en décrire un complété?

1. L'espace $\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ouégal à n sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$.

2. L'espace $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$.

3. L'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

4. L'espace $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$.

5. L'espace $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_d = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$?

6. L'espace $E = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à supports compacts, muni de la norme $\|f\|_\infty$.

---

3 - Équation intégrale de Volterra.

Soit $k \in C([0,1]^2, \mathbb{C})$. On note $M = \|k\|_\infty$ et $E = C([0,1], \mathbb{C})$. On définit une application $K : E \to E$ par $K(f)(x) = \displaystyle\int_0^x k(x,y)f(y)dy$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application itérée K^n satisfait $\forall x \in [0,1]$, $|K^n f(x)| \leq \dfrac{(Mx)^n}{n\,!}\|f\|_\infty$.

2. Soit $\lambda \neq 0$ et $f \in E$ donnée. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} K^n f$ converge dans E.

3. En déduire que l'équation de Volterra : $(\lambda \mathrm{Id} - K)g = f$ possède une unique solution g dans E.

---

4 - Escalier du diable.

On note $E = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Soit $T : E \to E$ l'application définie par

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(3x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2}(1 + f(3x-2)) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

1. Vérifier que T est bien définie et $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

2. Soit ϕ l'unique point fixe de T. Montrer que ϕ est dérivable, de dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor.

On a donc "construit" une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, telle que $f(1) - f(0) = 1$, mais telle que f' est nulle presque partout !

---

5 - Courbe de Péano.

On veut construire une application continue surjective de $[0,1]$ sur un triangle plein $T \subset \mathbb{R}^2$.

On note $E = \{f \in C([0,1], \mathbb{C}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. À $f \in E$, on associe la fonction $Sf : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et pour $t \in]j/4, (j+1)/4]$ avec $j = 0,1,2,3$ par $Sf(t) = s_j(f(4t-j))$, où s_j sont les quatres similitudes définies par

$$s_0(z) = \frac{z}{2}, \quad s_1(z) = \frac{1+iz}{2}, \quad s_2(z) = \frac{1+i-iz}{2}, \quad s_3(z) = \frac{1+z}{2}.$$

On note $f_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f_0(t) = t$.

1. Dessiner les courbes images $S(f_0)([0,1])$ et $S^2(f_0)([0,1])$.

2. Montrer que $Sf \in E$ si $f \in E$, puis que $S : E \to E$ est contractante. En déduire que S possède un unique point fixe $\varphi \in E$.

On considère le triangle $T = \{x + iy \mid 0 \leq y \leq x \text{ et } y \leq 1 - x\}$.

3. Vérifier que $T = \displaystyle\bigcup_{0 \leq j \leq 3} s_j(T)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S^n(f_0)([0,1]) \subset T$.

4. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in T$, $d\big(x, S^n(f_0)([0,1])\big) \leq C2^{-n}$.

Indication. Procéder par récurrence et écrire x sous la forme $s_j(y)$ avec un $y \in T$.

5. En déduire que l'image $\varphi([0,1])$ est dense dans T, puis qu'elle est égale à T.

---

6 - Exponentielle d'un endomorphisme.

Soit E un espace de Banach. Pour $A \in \mathcal{L}(E)$, on définit l'exponentielle de A

$$\exp(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

1. Montrer que $\exp(A)$ est bien définie.

2. Montrer que, si A, B sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent (i.e. $A \circ B = B \circ A$) alors $\exp(A + B) = \exp(A) \circ \exp(B)$.

3. Montrer que $\exp(A)$ est un isomorphisme pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$.

4. Soient $x_0 \in E$, $A \in \mathcal{L}(E)$, et ϕ la fonction de $\mathbb{R}$ dans E définie par $\phi(t) = \exp(tA)(x_0)$. Montrer que ϕ est différentiable et solution de l'équation différentelle linéaire

$$\phi'(t) = A(\phi(t)).$$

---

7 - Propriétés des G_δ.

1. Dans $\mathbb{R}^k$ montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'une intersection dénombrables d'ouverts denses n'est jamais dénombrable.

2. Donner dans $\mathbb{R}$ un G_δ (une intersection dénombrable d'ouverts) dense de mesure nulle.

---

8 - $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace de Banach.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Montrer, grâce au théorème de Baire, qu'il n'existe aucune norme sur E le rendant complet.

---

9 - Ensemble des points de continuité d'une fonction.

1. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Omega_n = \{x \in X \mid \exists V_x$ voisinage ouvert de x tel que $\delta(f(y), f(z)) < 1/n$ pour tout $y, z \in V_x\}$.

Montrer que Ω_n est un ouvert, puis que $\bigcap \Omega_n$ est l'ensemble $C(f)$ des points de continuité de f.

2. Soit (Y, δ) un espace métrique. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to Y$ avec $C(f) = \mathbb{Q}$. En existe-t-il une avec $C(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

3. Soit (Y, δ) un espace métrique et $f : \mathbb{R} \to Y$ une focntion. On suppose que f est limite simple d'une suite de fonctions continues. Que peut-on dire sur l'ensemble de l'ensemble des points de continuité de f ? En déduire par exemple que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas limite simple de fonctions continues.

---

10 - Une caractérisation des suites de $\ell^2(\mathbb{R})$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge pour toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n\geq 0} b_n^2 < +\infty$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n^2 < +\infty$. *Indication : on pourra considérer les suites du type* $(a_0, a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$.

---

11 - Divergence des séries de Fourier des fonctions continues.

On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques. On munit cet espace vectoriel de la norme uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'opérateur linéaire de $C_{2\pi}$ dans l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$ qui associe à chaque fonction f sa série de Fourier d'ordre n :

$$S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}.$$

1. Montrer que

$$|||S_n||| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

où $|||S_n|||$ désigne la norme d'opérateur de S_n, et $D_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ est le noyau de Dirichlet d'ordre n.

2. En déduire que $|||S_n|||$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

3. En déduire qu'il existe un sous-ensemble dense D de $C_{2\pi}$ tel que, pour tout f dans D, la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers une fonction continue.