Feuille d'exercices n°4

Espaces de Hilbert

1 - Exemples de projections sur des convexes fermés.

1. Soit H un espace de Hilbert, $x_0 \in H$ et $R > 0$. Décrire la projection orthogonale sur la boule fermée de centre y_0 de rayon R.

2. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}\}$. Décrire la projection orthogonale sur C.

3. Soit $H = L^2([0,1])$ et $F = \{f \in H$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Décrire la projection orthogonale sur F.

---

2 - Orthogonal dans un espace préhilbertien incomplet.

Soit $c_{00}(\mathbb{N})$ l'espace préhilbertien des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $\langle u \mid v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$. Soit f la forme linéaire sur $c_{00}(\mathbb{N})$ définie par

$$f(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n+1}$$

Montrer que f est continue. Montrer que $F := \mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé propre de $c_{00}(\mathbb{N})$, et que $F^\perp = \{0\}$.

L'équivalence (F est dense) $\Leftrightarrow$ ($F^\perp = \{0\}$) est donc fausse dans un espace préhilbertien incomplet.

---

3 - Le théorème de représentation de Riesz est faux dans un espace préhilbertien incomplet.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace préhilbertien des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour $p \geq 0$ et $a \in]0,1[$ fixé, on définit l'application $u(f) = \int_0^a t^p f(t)dt$.

1. Montrer que u est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.

2. Montrer qu'il n'existe pas d'élément g de E tel que $u(f) = \langle f \mid g\rangle$ pour tout f.

---

4 - Polynômes de Legendre.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynômiale $P_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ défini par

$$P_n(x) := \frac{2n+1}{n!2^{n+1}} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right).$$

1. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal dans $L^2([-1,1])$, puis que c'est une base hilbertienne de $L^2([-1,1])$.

2. Calculer e_0, e_1, et e_2, et en déduire les valeurs des réels a, b et c qui minimisent l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 dx.$$

---

5 - Théorème de Lax-Milgram.

Soit H un espace de Hilbert. On considère une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$. On suppose que a est continue et coercive, c'est-à-dire on suppose qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\begin{aligned} |a(x,y)| &\leq C\|x\|\|y\| \\ a(x,x) &\geq \alpha\|x\|^2 \end{aligned}$$

1. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu $T : H \to H$ tel que

$$a(x,y) = \langle T(x) \mid y \rangle$$

pour tous $x, y \in H$. En utilisant la coercivité de a, montrer que $T(H)$ est dense dans H, que $T(H)$ est fermé dans H, et que T est injectif. Conclure que T est un isomorphisme.

2. Soit $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que

$$L(y) = a(x_0, y) \qquad \text{pour tout } y \in H.$$

3. On suppose maintenant que a est symétrique. Montrer que x_0 est caractérisé par la propriété suivante :

$$\frac{1}{2}a(x_0,x_0) - L(x_0) = \min_{x\in H} \left(\frac{1}{2}a(x,x) - L(x) \right).$$

6 - Lien entre un opérateur et son adjoint

Soit H un espace de Hilbert, et $T : H \to H$ un opérateur continu.

1. Montrer que $|||T||| = |||T^*|||$.

2. Quel sont les liens entre le noyau de T, l'image de T, le noyau de T^*, et l'image de T^* ? En déduire les liens entre l'injectivité de T, la surjectivité de T, l'injectivité de T^*, et la surjectivité de T^*.

3. Dans cette question, on suppose que T est auto-adjoint (i.e. $T = T^*$). Montrer que

$$|||T||| = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx \mid x \rangle.$$

4. En déduire que, dans le cas général, on a $|||T||| = |||T^*||| = \sqrt{|||TT^*|||} = \sqrt{|||T^*T|||}$.

---

7 - Spectre des opérateurs.

Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur continu. On note

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx \mid x \rangle \quad \text{et} \quad M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx \mid x \rangle.$$

Le spectre de T est l'ensemble $\sigma(T)$ des réels λ tel que $T - \lambda Id_H$ n'est pas bijectif.

1. Montrer que l'on a l'inclusion $\sigma(T) \subset [m, M]$. *Indication. Pour $\lambda > M$, vérifier que la forme bilinéaire $a(x, y) := \langle \lambda x - T(x) \mid y \rangle$ est coercive.*

2. Si T est auto-adjoint, montrer que m et M sont des éléments de $\sigma(T)$. *Indication. Considérer la forme bilinéaire $a(x, y) := \langle Mx - T(x) \mid y \rangle$.*

---

8 - Opérateurs à noyau

Soit μ une mesure σ-finie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On considère l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$. Soit $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$. On définit, pour tout $f \in L^2(X, \mu)$

$$A_K(f) := \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y).$$

1. Montrer que A_K est un opérateur linéaire continu de $L^2(X, \mu)$ dans lui-même de norme majorée par la norme $\|K\|_2$ de K dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

2. A quelle condition A_K est-il auto-adjoint ?