Feuille d'exercices n^{o} 1

Points fixes d'un système dynamique discret

Exercice 1.— Un exemple concret : évolution d'un capital.
On investit un capital $C_0 > 0$. Le placement a un taux de 5% par an, et des frais de gestion fixes : 50 euros sont prélevés par an.

a. Décrire le système dynamique correspondant : quel est son ensemble d'états et sa loi d'évolution.

b. Donner les points fixes du système. Sont-ils attractifs ? Répulsifs ?

c. Étudier l'évolution du capital au fil des ans selon la valeur de C_0.

Exercice 2.— Détermination des points fixes attractifs et répulsifs ; application à l'étude du système.

a. On considère le système dynamique sur $[0,1]$ donné par la loi dévolution $f(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$. Quels sont ses points fixes ? Sont-ils attractifs ? répulsifs ? Tracer le graphe de f, ainsi que les orbites e quelques points. Déterminer les comportement des orbites des différents points de $[0,1]$.

b. Mêmes questions pour le système dynamique sur $\mathbb{R}$ de loi d'évolution $f(x) = e^x$.

c. Mêmes questions pour le système dynamique sur $[0,1]$ de loi d'évolution $f(x) = \frac{1}{2}(x+x^2)$.

d. Mêmes questions pour le système dynamique sur $\mathbb{R}$ de loi d'évolution $f(x) = \frac{1}{2}(x+x^3)$.

e. Mêmes questions pour le système dynamique sur $[0,\pi]$ de loi d'évolution $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin(x)$.

Exercice 3.— Points fixes où la dérivée vaut 1.
On considère les systèmes dynamiques sur $[0,1]$ donnés par les lois d'évoluion suivantes :

(i) $f : x \mapsto x - x^3$,

(ii) $g : x \mapsto x + x^3$,

(iii) $h : x \mapsto x + x^2$.

Dans chacun des cas, montrer que 0 est un point fixe du système, et que la dérivée de la loi d'évoluion en 0 est égale à 1. Dans chacun des cas, tracer le graphe de la loi d'évoution, et quelques orbites. Dans quel cas le point fixe 0 est -il attractif ? répulsif ? Essayez de le démontrer.

Exercice 4.— Points fixes de l'application unimodale en fonction de la valeur du paramètre.
On considère le système dynamique sur $[0,1]$ donné par la loi dévolution $f_a : x \mapsto a.x.(1-x)$, où a est un paramètre vérifiant $1 < a \leq 4$.

a. Montrer que, pour tout a, le système possède exactement deux points fixes : le point 0, et un autre point que l'on déterminera en fonction de a.

b. Montrer que 0 est répulsif quelle que soit la valeur de a.

c. Pour quelles valeurs de a, l'autre point fixe est-il attractif ? répulsif ?

d. On prend $a = 2$. Montrer que le bassin du point fixe attractif est l'intervalle ouvert $]0,1[$ tout entier (on pourra commencer par montrer que ce bassin contient $]0,\frac{1}{2}[$).

e. (difficile) Généraliser la question précédente pour toute valeur de a telle qu'on a un point fixe attractif.

Exercice 5.— Existence d'un point fixe pour les systèmes dynamiques sur $[0, 1]$.

a. On considère le système dynamique sur $[0, 1]$ dont la loi dévolution f est continue. Montrer que le système a au moins un point fixe. Si f est décroissante, montrer que ce point fixe est unique.

b. Donner de système dynamique sur $\mathbb{R}$, à loi d'évolution continue, qui n'a aucun point fixe.

Exercice 6.— Exemples de systèmes dynamiques sur $[0, 1]$.
Donner de systèmes dynamiques à loi d'évolution continue sur $[0, 1]$ ayant :
– un seul point point fixe,
– plusieurs points fixes,
– une infinité de points fixes,
– une infinité de point fixes attractifs et une infinité de points fixes répulsifs,
– une infinité de points fixes tous répulsifs,
– une infinité de points fixes tous attractifs.
On pourra se contenter de dessiner le graphe de loi d'évolution, sans nécessairement donner une formule.

Exercice 7.— Systèmes dynamiques sur $[0, 1]$ dont la loi d'évolution est croissante.
On considère le système dynamique sur $[0, 1]$ dont la loi d'évolution est $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue et croissante.

a. Montrer qu'un tel système ne peut pas avoir de point périodique de période 2.

b. De façon plus générale, montrer qu'un tel système ne peut pas avoir de point périodique de période $d \geq 3$.

c. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, l'orbite de x converge vers un point fixe.