Feuille d'Exercices 2

Primitives

Exercice 2.1.— Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^*$ et qui vérifient $f' = 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2.2.—

1. Trouver toutes les primitives de la fonction $f(x) = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $x + 1$?

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \qquad G(x) = \frac{x^2}{2} + x + x \qquad H(x) = \frac{x^2}{2} + x + \pi.$$

3. Résoudre l'équation différentielle $y' = x + 1$ avec condition initiale $y(2) = 1$.

Exercice 2.3.— (Quelques primitives classiques)

1. Donner une primitive de $f(x) = x^\alpha$.

2. Donner une primitive de sin, puis de cos, puis de exp.

Exercice 2.4.—

1. **a.** Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable ; rappeler la formule pour la dérivée de la fonction $x \mapsto u(x)^2$. **b.** En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

2. Soit u une fonction dérivable ; donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes : **a.** u^3 ; **b.** $\frac{1}{u}$ (si u ne s'annule pas) ; **c.** $\ln(u)$ (si u ne prend que des valeurs > 0 : pour tout x, $u(x) > 0$.) ; **d.** $\ln(-u)$ (si u ne prend que des valeurs < 0).

3. En déduire les primitives des fonctions $u'u^2$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{u}$.

4. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

Exercice 2.5.—

1. **a.** Donner les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$; **b.** même question sur $]-\infty, 0[$.

2. Trouver les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}$ sur l'intervalle $]0, 1[$. **Aide :** Commencer par trouver α et β tels que, pour tout x,

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1}.$$

Exercice 2.6.— Trouver toutes les courbes paramétrées $M(t) = (x(t), y(t))$ telles que pour tout temps t, le vecteur vitesse $OM'(t)$ est orthogonal au vecteur $OM(t)$. Aide : traduisez la condition en une équation différentielle, et intégrez cette équation.

Exercice 2.7.— (M) Trouver les primitives de $x \mapsto \tan(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Même question sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 2.8.— (M)

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = \tan(x)$ avec la condition initiale $y(\pi) = 1$.

3. Résoudre l'équation différentielle $y'' = \cos(x)$.

Réponses

Exercice 2.6.— Trouver toutes les courbes paramétrées $M(t) = (x(t), y(t))$ telles que pour tout temps t, le vecteur vitesse $OM'(t)$ est orthogonal au vecteur $OM(t)$. Aide : traduisez la condition en une équation différentielle, et intégrez cette équation.

Réponse : la condition d'orthogonalité se traduit en disant que le produit scalaire des vecteurs $OM'(t)$ et $OM(t)$ est nul. Ceci donne (en utilisant la formule habituelle pour le produit scalaire) :

$$x'(t).x(t) + y'(t).y(t) = 0$$

ce qui est une équation différentielle un peu spéciale : elle fait intervenir *deux* fonctions inconnues x et y.

On peut résoudre cette équation : puisque $x'x$ a pour primitive $\frac{1}{2}x^2$, de même $y'y$ a pour primitive $\frac{1}{2}y^2$. L'équation est donc équivalente à

$$\frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2 = C$$

où C est une constante.

On remarque que $x(t)^2 + y(t)^2$ est la distance du point $M(t)$ à l'origine. L'équation revient donc à dire que cette distance est constante au cours du temps. Autrement dit, la condition est que la courbe image est incluse dans un cercle centré au point $(0, 0)$.

Finalement, on trouve toutes les courbes dont l'image est incluse dans un cercle centré en $(0, 0)$ (remarquez qu'il n'y a aucune condition sur la vitesse scalaire : le cercle n'est pas forcément parcouru à vitesse constante).

Exercice 2.7.— (M) Trouver les primitives de $x \mapsto \tan(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Même question sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Réponses : on reconnait la forme $\frac{u'}{u}$; une primitive est $\log(\mid u \mid)$, soit ici $x \mapsto \log(\mid \cos(x) \mid)$. Sur le premier intervalle la fonction cosinus est positive, elle est négative sur le second intervalle ; on obtient donc $\log(\cos))$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\log(-\cos))$ sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 2.8.— (M)

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' = 1$. Réponse : on trouve toutes les fonctions $f(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta$ où α et β sont deux constantes.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = \tan(x)$ avec la condition initiale $y(\pi) = 1$. Réponse : on utilise l'exercice précédent. Le plus grand intervalle où tan est définie et qui contient π est $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Les primitives de la fonction tangente sur cet intervalle sont les fonctions $f = \log(-\cos) + c$, où c est une constante. On cherche f telle que $f(\pi) = 1$, ce qui donne $c = 1$. La solution est donc la fonction

$$f : x \mapsto \log(-\cos(x)) + 1$$

définie sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

3. Résoudre l'équation différentielle $y'' = \cos(x)$. On trouve toutes les fonctions

$$f : x \mapsto -\cos(x) + \alpha x + \beta$$

avec α,β deux constantes.