Feuille d'Exercices 6

Étude qualitative : barrières et explosion

Exercice 6.1.— Barrières horizontales et non-explosion des solutions. On considère l'équation différentielle

$$y' = \cos(y) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

dont le champ de tangentes est représenté sur le dessin.

1. À l'aide du dessin, trouver quelques droites horizontalesqui sont des barrières montantes. Vérifier par le calcul. Même question pour des barrières descendantes.

2. Soit f la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$. Montrer qu'elle est bornée et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que toute solution est bornée et définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.2.— Non-explosion des solutions. On considère l'équation différentielle

$$y' = y^2 - x.$$

1. Déterminer les trois régions du plan où le champ de tangentes a une pente nulle, positive, négative.

2. Soit $M_0 = (x_0,y_0)$ un point de la région où la pente du champ est négative, et f la solution vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$, c'est-à-dire dont le graphe passe par le point M_0. Montrer que f n'explose pas.

Exercice 6.3.— Barrières et limite en $+\infty$ des solutions. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = -y - \frac{y}{x}$$

sur l'intervalle $x \in]0, +\infty[$. On remarque que la fonction nulle est solution.

1. Montrer que, si g est une solution positive de l'équation différentielle $y' = -y$, alors le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1). Montrer de même que, si h est une solution négative de $y' = -y$, alors le graphe de h est une barrière montante pour l'équation différentielle (1).

2. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$?

3. Soit f la solution maximale de l'équation différentielle (1) de condition initiale $f(x_0) = y_0$. En utilisant les deux premières questions, montrer que f est définie (au moins) sur $[x_0, +\infty[$, et que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 6.4.— (M) **Barrières et limite en $+\infty$ des solutions.** Même exercice que le précédent avec l'équation $y' = -y^3 - \frac{y}{x}$.

Exercice 6.5.— Barrières et divergence des solutions. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = \cos(y) - x.$$

1. Soit g une solution maximale de l'équation différentielle $y' = 1 - x$. Montrer que le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1).

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 1 - x$.

3. Soit f une solution maximale de l'équation différentielle (1) d'intervalle de vie $I =]a,b[$ (avec a et b éventuellement infinis). En utilisant les questions précédentes, montrer que $f(x) \to -\infty$ quand $x \to b^-$ (on distinguera les cas $^b < +\infty$ et $b = +\infty$).

Exercice 6.6.— Barrières et explosion en temps fini. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = e^y + x.$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et soit f la solution de (1) vérifiant la condition initiale $f(1) = y_0$. On voudrait montrer que f "explose en temps fini" : l'intervalle de vie de f_1 est du type $I =]a,b[$ avec b fini, et on a $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

1. Déterminer la solution g de l'équation différentielle $y' = e^y$ avec la condition initiale $y(1) = y_0$. Quel est son intervalle de vie. Tracer grossièrement son graphe.

2. Montrer que le graphe g est une barrière montante pour l'équation différentielle (1). Conclure.

Exercice 6.7.— Barrières et explosion en temps fini. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = y^2 + x^2.$$

1. Soit f_1 la solution de (1) vérfiant la condition initiale $y(0) = 1$. On voudrait montrer que f_1 "explose en temps fini" : l'intervalle de vie de f_1 est du type $I =]a,b[$ avec b fini et on a $\lim_{x \to b-} f_1(x) = +\infty$. On considère une solution maximale g de l'équation différentielle $y' = y^2$.

a. On considère une solution maximale g de l'équation différentielle $y' = y^2$. Montrer que le graphe de g est une barrière montante pour l'équation différentielle (1).

b. Trouver la solution de cette équation différentielle $y' = y^2$ qui vérifie la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Quel est son intervalle de vie? Tracer son graphe.

c. En déduire l'explosion de f_1.

2. (optionnelle) On considère maintenant la solution f_{-1} de l'équation différentielle (1) vérifiant $y(0) = -1$. On voudrait montrer que f_{-1} explose aussi.

a. Montrer que, si h est une solution de l'équation différentielle $y' = x^2$, alors le graphe de h est une barrière montante pour l'équation différentielle (1). Trouver la solution de l'équation différentielle $y' = x^2$ vérifiant $y(0) = -2$. En déduire que f_{-1} prend des valeurs posistives : il existe x tel que $f_{-1}(x) > 0$.

b. En utilisant la méthode de la question (1), en déduire que l'explosion de f_2.

Exercice 6.8.— Barrières et divergence des solutions On considère l'équation différentielle (définie pour $y > 0$)

$$(1) \qquad y' = x^2/y + 1.$$

1. Soit f une solution de (1) vérifiant la condition initiale $f(2) = 1$. Montrer que f est croissante sur son intervalle de définition.

2. Déterminer l'ensemble des points (x,y) en lesquels la pente du champ vaut 2. Tracer cet ensemble. En déduire une barrière descendante.

3. Montrer que f est définie (au moins) sur $[2, +\infty[$.

4. Soit g une solution de l'équation différentielle $y' = x^2/y$ (définie pour $y > 0$). Montrer que le graphe de g est une barrière montante pour l'équation différentielle (1). En déduire que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 6.9.— Non-extinction de population On considère l'équation différentielle

$$y' = (2 - \cos(x))y - y^2$$

pouvant représenter l'évolution d'une population animale avec un taux de fécondité qui varie annuellement.

1. Dessiner les trois régions du plan où la pente du champ est nulle, positive, négative.

2. Montrer que toute droite horizontale d'équation $y = k$ avec $k > 3$ est le graphe d'une sur-solution.

3. Montrer que toute droite horizontale d'équation $y = k$ avec $0 < k < 1$ est le graphe d'une sous-solution.

4. Soit f une solution avec une condition initiale $f(0) > 0$. Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

5. Soit f la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 0{,}1$ (population initiale très faible). On voudrait montrer qu'il existe un moment où la population devient supérieure à 0,9.

6. Montrer que la population est toujours supérieure à 0,1.

a. Montrer que la fonction $\Phi(x,y) = (2-\cos(x))y - y^2$ est partout supérieure à $0{,}1 - 0{,}01 = 0{,}09$ dans la bande $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0{,}1 < y < 0{,}9\}$.

b. On raisonne par l'absurde en supposant que la population reste toujours inférieure à 0,9. Montrer que $f'(x) \geq 0{,}09$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure.