Feuille d'Exercices 8

Révisions

Exercice 8.1.— Champs de tangentes et tracé de solutions. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = -x^2y + y^2.$$

1. Déterminer l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes de (1) est nulle, positive, négative. Tracer l'allure du champ de tangentes.

2. Esquisser l'allure des solutions de (1) passant par $(0,-2)$, $(0,-1)$ $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$.

Exercice 8.2.— Utilisation de Cauchy-Lipschitz. On considère à l'équation différentielle

$$(2) \qquad y' = -x^2y + y^2.$$

Soit f une solution de (2) satisfaisant une condition initiale du type $y(x_0) = y_0$ avec $y_0 < 0$.

1. Montrer que le graphe de f est contenu dans le demi-plan $y < 0$ et que f est strictement croissante sur son intervalle de définition.

2. En déduire que f est définie sur $[x_0, +\infty[$ (au moins), et que $f(x)$ a une limite lorsque $x \to \infty$.

3. Quelle semble être cette limite ? (question subsidiaire et difficile) Prouvez-le.

Exercice 8.3.— Une équation à variables séparables. Résoudre (en justifiant proprement les raisonnement) l'équation différentielle

$$(3) \qquad y' = \cos(x)y^2.$$

Déterminer les solutions de (3) qui satisfont les conditions initiales $y(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = 1$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = 2$. Quels sont les intervalles de vie de ces solutions ? Esquisser l'allure de leurs graphes.

Exercice 8.4.— Une équation linéaire d'ordre 1. Résoudre (en justifiant proprement les raisonnement) l'équation différentielle

$$(4) \qquad y' + x.y = x^3.$$

Exercice 8.5.— Utilisation de barrières. On considère l'équation différentielle

$$y' = x(\cos(y^2) + y). \tag{5}$$

1. Soit g une solution maximale de l'équation différentielle $y' = x(-1+y)$ définie sur une intervalle I. Montrer que le graphe de g est une une barrière montante pour (5) sur $I \cap [0, +\infty[$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = x(-1+y)$ (pourquoi peut-on diviser par $-1+y$?...).

3. Soit f une solution maximale de l'équation différentielle (() satisfaisant une condition initiale du type $y(0) = y_0$ avec $y_0 > 1$. On note $]a, b[$ l'intervalle de définition de f. En utilisant les questions précédentes, montrer soigneusement que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to b^-$.

4. (Question subsidiaire) Soit maintenant h une solution maximale de l'équation différentielle (5) satisfaisant une condition initiale du type $y(0) = y_0$ avec $y_0 < -1$. On note $]a, b[$ l'intervalle de définition de f. En utilisant les questions précédentes, montrer soigneusement que $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to b^-$.

Exercice 8.6.— Une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Résoudre les équations différentielles

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}. \tag{6}$$

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}. \tag{7}$$

$$y'' + 2y' + 2y = e^{2x}. \tag{8}$$