Fiche de TD no 2. Notion de probabilité dans le cadre des probabilités discrètes

——————————— Définitions et résultats fondamentaux ———————————

• Etant donné un ensemble $\mathcal{E}$ et une σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}$, on peut attribuer une probabilité d'apparition $\mathbb{P}(A)$ à chaque événement A de $\mathcal{F}$. Une condition naturelle est que, si A_1 et A_2 sont des événements *disjoints*, alors la probablité de réalisation de A_1 ou A_2 est la somme probabiltés de réalisation de A_1 et de A_2. Ceci est traduit par la définition suivante :

Définition *Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ telle que :*
— *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements 2 à 2 disjoints alors $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = \sum \mathbb{P}(A_n)$,*
— $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = 1$.

Le triplet $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec les définitions ci-dessus est alors un espace de probabilité.

• On déduit de la définition précédente que, pour tous événements A_1 et A_2, on a la relation $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et donc, qu'on a toujours

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

Il n'existe pas de relation valable en toute généralité entre $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. Si on a l'égalité $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$, on dit que les événements A_1 et A_2 sont *indépendants*. (Remarquez que ceci traduit la notion intuitive d'indépendance : la réalisation de l'événement A_2 n'influence pas la probabilité de réalisation de l'événement A_1.)

• L'exemple le plus simple d'espace de probabilité est certainement le cas où $\mathcal{E}$ est fini (on parle de probabilités discrètes). On suppose généralement tacitement que la σ-algèbre $\mathcal{F}$ est égale à $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ en entier et que la probabilité $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme (c'est à dire $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\mathcal{E})}$ pour tout A).

——————————————— Exercices ———————————————

Exercice 1 (Poker) On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32, chaque quintuplet étant équiprobable. Formaliser cette expérience en terme d'espace probabilisé. Calculer les probabilités des évènements consistant à obtenir exactement :

1 - Une paire	5 - Un carré
2 - Deux paire	6 - Une séquence (des cartes consécutives)
3 - Un brelan (3 cartes identiques)	7 - Un flush (séquence dans la même couleur)
4 - Un full (une paire et un brelan)	8 - Une couleur (5 cartes de la même couleur)

Exercice 2 (Formule de Poincaré)

1 - Soit Ω un ensemble et $A_1, ..., A_n$ des parties de Ω. Donner une formule pour $Card(\cup A_i)$ en fonction de cardinaux du type $Card(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$ (utiliser les fonctions indicatrices).

2- Un facteur fou distribue les quittances de loyer de n locataires complètement au hasard. Traduire cela en termes d'espace de probablité. Quelle est la probablité que p quittances exactement arrivent à leur destinataire? (on commencera par chercher le résultat pour $p = 0$ grâce à la question précédente, puis on se ramènera à ce cas)

3- Le facteur distribue maintenant q propectus dans les n boîtes aux lettres en oubliant au fur et à mesure l'endroit où il les a placés. Quelle est la probablité de finir avec exactement p boîtes aux lettres vides ?

Exercice 3 (Scrutin) On appelle *chemin* joignant $(0, 0)$ à (x, y) (x et y entiers) une suite d'entier relatifs $(s_0, ..., s_x)$ tels que $s_0 = 0$, $s_x = y$ et pour tout $1 \leq k \leq x$, $|s_k - s_{k-1}| = 1$.

1 - Calculer le nombre $N_{x,y}$ de chemins joignant $(0, 0)$ à (x, y).

2 - Montrer que le nombre de chemin joignant (x_0, y_0) à (x, y) touchant ou traversant l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins joignant $(x_0, -y_0)$ à (x, y) (on représentera graphiquement de tels chemins). En déduire, le nombre de chemins joignant $(0, 0)$ à (x, y) qui sont strictement positifs ($s_k > 0$ pour tout $k > 0$)? Quel est le nombre de chemins joignant $(0, 0)$ à $(2n, 0)$ qui sont strictement positifs ($s_1 > 0, ..., s_{2n-1} > 0$), positifs au sens large ($s_1 \geq 0, ..., s_{2n-1} \geq 0$)?

3 - Pour un scrutin à deux candidats et n suffrages exprimés, où l'on suppose que chaque vote revient de façon équiprobable à l'un ou l'autre des candidats, quelles sont les probabilités des évènements suivants :

i) Les candidats arrivent à égalité.

ii) Les candidats arrivent à égalité sans qu'il n'y est jamais eu égalité auparavant.

iii) Un candidat est toujours en tête.

iv) Un candidat est toujours en tête (ou a égalité) puis perd au dépouillement de la dernière enveloppe.