Fiche de TD no 3 : Applications continues d'un intervalle dans lui-même

Exercice 1 (Théorème de Sharkovskii) Soit I un intervalle et $f : I \to I$ une application continue. On suppose que f possède une orbite périodique de plus petite période 3 et on note a, b et c les points de cette orbite, avec $a < b < c$.

1) Montrer soigneusement le résultat technique suivant : si A et B sont deux sous-intervalles de I tels que $f(A) \subset B$, montrer qu'il existe un sous-intervalle A' de A tel que $f(A') = B$.

2) On suppose $f(a) = b$ (ce qui implique $f(b) = c$ et $f(c) = a$). On note $K = [a, b]$ et $L = [b, c]$. Pour tout entier positif p, construire une suite finie d'intervalles compacts emboîtés $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_p$ avec les propriétés suivantes :

(i)	$A_0 = L$	
(ii)	$f(A_k) = A_{k-1}$	pour $k = 1, 2, \ldots, p-2$
(iii)	$f^k(A_k) = L$	pour $k = 1, 2, \ldots, p-2$
(iv)	$f^{n-1}(A_{n-1}) = K$	
(v)	$f^n(A_n) = L$	

3) En déduire que, pour tout entier positif p, l'application f possède une orbite périodique de plus petite période p.

4) Vérifier que le cas $f(a) = c$ se traite de même et conduit à une conclusion identique.

Commentaires Le résultat prouvé dans l'exercice 1 n'est en fait qu'un cas particulier du *théorème de Sharkovskii*. Le théorème général s'énonce comme suit : toute application continue d'un intervalle dans lui-même qui possède un point périodique de plus petite période $2^p m$ avec $\mathrm{pgcd}(m, 2) = 1$, possède également des points périodiques dont les plus petites périodes sont : $2^p n$ pour tout $n \geq m$ tel que $\mathrm{pgcd}(n, 2) = 1$
$2^q n$ pour tout $q \geq p$ et tout $n \in \mathbb{N}$
2^q pour tout $q \in \mathbb{N}$
La preuve de ce résultat général n'utilise pas d'argument fondamentalement différent de ceux utilisés dans l'exercice 1.

Par ailleurs, que l'exercice 1 ne présente, qu'une petite partie des conséquences de l'existence d'une orbite périodique de plus petite période 3. On peut, par exemple, montrer le résultat suivant : si f est une application continue d'un intervalle I dans lui-même qui possède une orbite périodique de plus petite période 3, alors il existe un ensemble non-dénombrable $S \subset I$ tel que, quelques soient les points $p, q \in S$, on a $\limsup \|f^n(p) - f^n(q)\| > 0$ et $\liminf \|f^n(p) - f^n(q)\| = 0$

Exercice 2 ("La" famille d'applications quadratiques) Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application $\begin{array}{rcl} f_a : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax(1-x) \end{array}$

On remarquera que, pour $a \in [0,4]$, l'application f_a préserve l'intervalle $[0,1]$.

1) Pour $a \in [0,1]$, comment se comporte asymptotiquement l'orbite (pour l'application f_a) de presque tout point de $[0,1[$? Pour $a \in [1,3[$? Expliquer le changement de comportement en $a = 1$. Pour a légèrement supérieur à 3, comment se comporte asymptotiquement l'orbite de presque tout point de $[0,1[$? Expliquer le changement de comportement en $a = 3$. Pour quelles valeurs de a observe-t-on des changements de comportements ?

2) Montrer que, pour tout entier positif p, l'application f_4 posssède une orbite périodique de plus petite période p.

3) Dans cette dernière question, on suppose $a > 2 + \sqrt{5}$ (l'application f_a ne préserve donc plus l'intervalle $[0,1]$).

a) Montrer que, pour tout point $x \in \mathbb{R}$, si l'orbite de x sort de $[0,1]$, alors l'orbite de x tend vers $-\infty$.

b) Pour tout entier n, étudier l'ensemble des points $x \in [0,1]$, tels que pour tout $k \leq n$, on a $f^k(x) \in [0,1]$. En déduire que l'ensemble des points dont l'orbite reste indéfiniment dans $[0,1]$ est un ensemble de Cantor de mesure nulle. On notera K ce Cantor.

c) Observer que, si x est un point extrémal de l'ensemble de Cantor K, alors il existe un entier $N(x)$ tel que, pour tout $n \geq N(x)$, on a $f^n(x) = 0$.

d) Montrer que, pour tout entier positif p, l'application f_a possède un point périodique de plus petite période p. Montrer que les points périodiques sont dense dans K.

e) Montrer que l'ensemble des points périodiques ou pré-périodiques de f est dénombrable. En particulier, l'orbite de presque tout point de $[0,1]$ n'est ni périodique, ni pré-périodique.

f) Montrer qu'il existe un point de K dont l'orbite est dense dans K.

Commentaires Le phénomène mis en lumière par les questions 1 et 2 de l'exercice 2 s'appelle *cascade de bifurcations de la famille quadratique*. De nombreux logiciels aident à entrevoir la rjchesse des comportements des orbites de l'application f_a en fonction des valeurs de a ; voir, par exemple, les adresses suivantes :
http://umastr1.math.umass.edu/ frankw/ccp/modeling/discrete/logistic/appwindow.htm
http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/gallery/doubling/
http://www.geom.umn.edu/ math5337/ds/applets/iteration/Iteration.htm

Pour $a \in [3,57..,4]$, la dynamique de l'application f_a est extrêmement compliquée pour la plupart de a, et dépend radicalement de la valeur de a ; l'étude de cette dynamique est un sujet de recherche très actif.