Fiche de TD no 5 : Quelques exercices sur les champs de vecteurs

Exercice 1 (Quelques propriétés liées à la connexité des orbites)
1) Soit f un difféomorphisme d'une variété M. On suppose que f a un point périodique x de période $p > 1$, isolé (c'est-à-dire, pour $y \neq x$ suffisamment proche de x, $f^p(y) \neq y$). Montrer que f n'est pas le temps t du flot d'un champ de vecteurs.

2) Soit X un champ de vecteurs sur une variété M. Montrer q u'une orbite de X est périodique si et seulement si elle est compacte.

3) Soit X un champ de vecteurs sur une variété M, soit x un point de M, et O l'intérieur de l'ensemble $\omega_X(x)$. On suppose que O est non-vide. Montrer alors que O est connexe, et que l'adhérence de O est égale à l'ensemble $\omega_X(x)$ tout entier.

Exercice 2 (Un critère de complétude) Soient M une variété riemannienne complète (sans bord), X un champ de vecteurs localement Lipschitz et x_0 un point de M. On suppose que la norme de X vérifie une inégalité du type $|X(x)| \leq f(d(x_0, x))$, où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_*$ est une fonction croissante qui satisfait $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = +\infty$ (par exemple, $f(x) = c$ ou $f(x) = cx$). Montrer que X est complet.

Exercice 3 (Théorème de Lyapunov)
1) Soit X un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbb{R}^n$ tel que $X(0) = 0$. On note $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de X. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On fait l'hypothèse qu'il existe un fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq 0$.

a) On suppose $\frac{d}{dt}V(\phi^t(x))|_{t=0} \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x| < \delta$, alors on a $|\phi^t(x)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$ (on dit que le point 0 est *stable*).

b) On suppose maintenant $\frac{d}{dt}V(\phi^t(x))|_{t=0} < 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus 0$. Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{t\to+\infty} \phi_t(z) = 0$ pour tout $z \in U$ (on dit que le point 0 est *asymptotiquement stable*).

2) Soit X le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donné par $X(x, y) = (-y - \sin^3 x, x - \sin^3 y)$. Vérifier que X est complet. Montrer que 0 est un point fixe asymptotiquement stable.

Commentaires L'orgine du théorème de Lyapunov est mécanique. Ainsi, dans l'exercice ci-dessus, V représente l'énergie du système. Selon qu'on est en présence de frottement ou non, l'énergie du système est conservée, ou décroit strictement (et le théorème de Lyapunov permet de montrer l'existence d'une position d'équilibre stable ou asymptotiquement stable).

Exercice 4 (Théorème de Poincaré-Bendixon) Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur la sphère S^2.

1) Montrer qu'une orbite positivement récurrente de X est périodique.

2) Pour tout point $p \in S^2$, montrer que l'ensemble ω-limite de p contient une orbite récurrente.

3) Soit $p \in S^2$. On suppose que l'ensemble ω-limite de p ne contient aucune singularité de X. Montrer alors que l'ensemble ω-limite de p est une orbite périodique.

4) Que se passe-t-il si on remplace la sphère S^2 par le plan $\mathbb{R}^2$, par le tore $\mathbb{T}^2$, par une surface compacte de genre plus grand que 2, par la sphère S^3, par une variété de dimension supérieure à 3 ?

Commentaires Le théorème de Poincaré Bendixon fait des champs de vecteurs sur la sphère S^2 des systèmes dynamiques très particuliers, et assez simples (ce qui est loin d'être le cas des difféomorphismes de la même sphère S^2). Ce théorème est tout-à-fait spécifique aux surfaces de genre nul comme remarqué dans la question 4 ci-dessus.