MMA2 - Systèmes Dynamiques Année 2001-2002

Fiche de TD no 7 : Autour du théorème de Grossman et Hartman

Le but de cette fiche de TD est essentiellement de montrer qu'on ne peut pas obtenir mieux qu'une conjugaison *topologique* dans le théorème de Grossman et Hartman.

Exercice 1 (Conjugaison des applications linéaires de $\mathbb{R}$) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications linéaires distinctes. Exhiber explicitement un homéomorphisme qui conjugue f et g. Récirpoquement, montrer qu'il n'existe aucun homéomorphisme lipschitzien qui conjugue f à g.

Exercice 2 (Un point fixe hyperbolique qui n'est pas C^2-linéarisable) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (ax, a^2y + x^2)$ où a est une constante positive. Montrer que f n'est pas C^2-conjuguée à sa partie linéaire.

Exercice 3 (Un point fixe hyperbolique qui n'est Lipschitz-linéarisable) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $T(x,y,z) = (ax, by, abz + abxy)$ où $a > 1 > b > a^{-1} > 0$. L'objet de cet exercice est de montrer que T n'est pas conjuguée de façon Lipschitz à sa partie linéaire. Commencer par prouver que n'importe quelle conjugaison $h = (h_1, h_2, h_3)$ préserve l'axe des y au voisinage de 0. Ensuite, en supposant h Lipschitz on montrera que h préserve l'axe des x près de 0 et vérifie :

$$b^{-n}h_3(x, b^n y, 0) - a^n h_3(a^{-n}x, y, 0) = nh_1(x, b^n y, 0)h_2(a^{-n}x, y, 0)$$

Obtenir une contradiction en faisant tendre n vers $+\infty$.

Commentaires L'exercice précédent montre qu'en toute généralité, un difféomorphisme local est différentiellement conjugué à sa partie linéaire. Cependant, on notera le résultat important suivant, dû à Sternberg:

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire *non-résonnante*, c'est-à-dire une application linéaire dont les valeurs propres $\lambda^1, \ldots, \lambda_n$ ne satisfont aucune égalité du type

$$\lambda_i = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}$$

où $m_1, \ldots, m_n$ sont des entiers positifs ou nuls de somme supérieure ou égale à 2. Soit $\eta : U \to \mathbb{R}^n$ une application, de classe C^∞, défini sur un voisinage U de 0, et tel que $\eta(0) = D\eta(0) = 0$. Alors, il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que le difféomorphisme $(T + \eta)_{|V}$ est C^∞-conjugué à $T_{|V}$.