Fiche de TD no 8 : Étude explicite de quelques systèmes simples

Le but de cette fiche de TD est d'étudier explicitement des exemples de systèmes ayant une dynamique simple (typiquement, une dynamique de type Morse-Smale), qui apparaissent naturellement dans différent contextes.

Exercice 1 (Un champ linéaire sur $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$) On considère le champ de vecteurs linéaire $\widetilde{X}$ sur l'espace vectoriel $M = \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, défini par $\widetilde{X}(A) = X_0 A$ où X_0 est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On note $(\widetilde{\phi}^t)$ son flot.

1) Montrer que $\widetilde{\phi}^t$ est la multiplication à gauche par $h(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

2) Montrer que $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ est une sous-variété lisse de M invariante par $\widetilde{\phi}^t$. Montrer que l'espace tangent en A à cette sous-variété admet la base $(X_0 A, Y_0 A, Z_0 A)$, où

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) On fait agir à droite $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$. On note $V = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})/\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ le quotient et $\pi : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) \to V$ la projection. On admettra que V admet une unique structure de variété différentiable telle que π est un difféomorphisme local.
Montrer que $(\widetilde{\phi}^t)$ induit un flot différentiable (ϕ^t) sur V. Quel est son champ de vecteurs générateur X ?

4) Soit $T \in]0, +\infty[$ fixé. Montrer que X a une orbite périodique de période T si et seulement si $h(T)$ est conjuguée dans $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ à un élément de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. En déduire que l'ensemble des périodes des orbites périodiques de X est

$$\left\{ \mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N},\, n \geq 3 \right\}.$$

5) Montrer que toute orbite périodique de (ϕ^t) est hyperbolique.

Exercice 2 (Un champ hamiltonien sur $\mathbb{T}^2$) On considère le champ de vecteurs X défini sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ défini par

$$X(x, y) = (\sin y, -\sin x).$$

1) Quelles sont les singularités de X ? Sont-elles non-dégénérées ? Hyperboliques ? Dans ce dernier cas, donner les espaces tangents aux variétés stable et instable.

2) Montrer que tous les points qui ne sont pas sur une variété stable ou instable d'une singularité sont périodiques (on cherchera deux preuves : l'une utilisant l'existence d'une

fonction constante le long des orbites de X, l'autre utilisant un argument de symétrie). Dessiner en le justifiant le diagramme de phase de X (on représentera le tore comme un carré avec des côtés identifiés).

3) Montrer que l'ensemble des périodes minimales est un intervalle de $]0,+\infty[$ qui contient $]2\pi,+\infty[$ (en fait, il lui est égal).

Exercice 3 (Action d'un élément Gl$(3,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{CP}^2$) Soit $A \in \mathrm{Gl}(3,\mathbb{C})$, qu'on fait agir sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

1) Montrer que cela induit un difféomorphisme ϕ_A de classe C^∞ de l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{Sl}(3,\mathbb{C})$ tel que $\phi_A = \phi_B$.

2) On suppose que A a 3 valeurs propres de modules différents. Montrer que les points périodiques de ϕ_A sont hyperboliques, et décrire leurs variétés stables et instables. Donner pour tout point de $\mathbb{CP}^2$ son ensemble α-limite et son ensemble ω-limite. Montrer que ϕ_A est de Morse-Smale.

Rappel : la variété différentiable $\mathbb{CP}^2$ a un atlas à 3 cartes, toutes isomorphes à $\mathbb{C}^2$:
$U_0 = \{[1 : x : y] \mid (x,y) \in \mathbb{C}^2\}$, $\phi_0([1 : x : y]) = (x,y)$
$U_1 = \{[t : 1 : y] \mid (t,y) \in \mathbb{C}^2\}$, $\phi_1([t : 1 : y]) = (t,y)$
$U_2 = \{[t : x : 1] \mid (t,x) \in \mathbb{C}^2\}$, $\phi_2([t : x : 1]) = (t,x)$.

3) On suppose que A est diagonalisable, mais que les modules des valeurs propres sont tous égaux. Montrer

— que ϕ_A est conjugué dans $\mathrm{Diff}(\mathbb{CP}^2)$ à ϕ_B où $B \in SU(3)$

— que toute orbite est contenue dans un tore de dimension au plus 3

— que tout point est non-errant.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $x_0 = [1 : 0 : 0]$, $x_1 = [0 : 1 : 0]$, $x_2 = [0 : 0 : 1]$. Montrer que pour tout $x \in U_0$ on a $\alpha(x) = \omega(x) = \{x_2\}$. Que se passe-t-il pour $x \in \mathbb{CP}^2 \setminus U_0$?