École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2010-2011
Travaux dirigés de Topologie et Calcul différentiel
François Béguin

Feuille d'exercices n°1
Exemples d'espaces topologiques

Les exercices sont classés *grosso modo* par ordre de difficultés. Les premiers exercices n'ont guère d'autre intérêt que celui de vous faire manipuler les définitions principales du course (topologie, base d'ouverts, *etc.*). Par contre, certaines notions (topologie de Hausdorff, distance sur une surface définie comme infimum des longueurs des chemins, topologie p-adique, etc.) présentée dans les exercices suivants jouent un rôle important en mathématiques. Certains exercices utilisent la notion suivante, que vous verrez très bientôt en cours :

Définition. Une topologie sur un espace X est dite *séparée* si deux points distincts quelconques de X admettent des voisinages disjoints.

---

1 - Espace topologique tel que les singletons sont ouverts.

Soit X un ensemble. Combien y-a-t'il de topologie(s) sur X telles que tous les singletons $\{x\}$, $x \in X$, soient des ouverts ?

---

2 - Topologie sur $\mathbb{R}^2$ dont les ouverts sont les boules centrées à l'origine.

Montrer que la famille des boules $B(0,r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < r\}$ pour $r \in [0,+\infty]$ forme une topologie sur $\mathbb{R}^2$. Cette topologie est-elle séparée ? Est-elle plus ou moins fine que la topologie usuelle ?

---

3 - Droite réelle avec un point double.

On considère l'ensemble E obtenue comme union disjointe de $\mathbb{R} \setminus \{0\})$ et de deux points notés 0_A et 0_B. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E de la forme :

- soit $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \epsilon < |x|$,
- soit $\{0_A\} \cup (]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\})$ pour $\epsilon > 0$,
- soit $\{0_B\} \cup (]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\})$ pour $\epsilon > 0$.

Montrer que $\mathcal{B}$ forme la base d'une topologie. Montrer que cette topologie ne peut être métrisable (indication : si elle l'était, quelle devrait être la distance entre 0_A et 0_B ?). Identifier la topologie induite sur $E - \{0_A, 0_B\}$.

---

4 - Topologie des complémentaires de parties finies.

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini (*i.e.* $C \in \mathcal{C}_0$ si et seulement si ${}^cC = X \setminus C$ est fini), et $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_0$ et de l'ensemble vide. Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X. Cette topologie est-elle séparée ?

---

5 - Une topologie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $U_{a,b} := \{an + b \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\mathcal{B} = \{U_{a,b}$, a et b premiers entre eux$\}$ est la base d'une topologie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cette topologie est-elle séparée ? Que se passe-t-il si on se restreint aux $U_{a,b}$ tels que a est sans facteurs carrés ?

---

6 - Distance SNCF

Soit $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour toute paire de points $x, y \in \mathbb{R}^2$, on note

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & \text{si } x,\ y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que d défini une distance sur $\mathbb{R}^2$; on l'appelle parfois la *distance SNCF* pour des raisons que je vous laisse deviner.

2. Décrire géométriquement la boule ouverte de centre x et de rayon r, pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ quelconque.

3. Identifier la distance induite par d sur une droite vectorielle ? sur le cercle unité ?

4. Quelles similitudes directes sont continues pour d ?

---

7 - Distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier. On note d la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des partie compactes non-vides de $\mathbb{R}^n$.Étant donné un compact $K \in \mathcal{K}$, on note $\phi_K : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ la fonction "distance à K" définie par

$$\phi_K(y) = \inf_{x \in K} d(x,y).$$

Étant donnés deux éléments K_1, K_2 de $\mathcal{K}$, on note alors

$$\delta(K_1, K_2) := \|\phi_{K_1} - \phi_{K_2}\|_\infty$$

1. Montrer que δ défini une distance sur $\mathcal{K}$. C'est la *distance de Hausdorff.*

2. Pour tout compact $K \in \mathcal{K}$ et tout réel $\epsilon > 0$, on note

$$V_\epsilon(K) := \bigcup_{x \in K} B(x, \epsilon)$$

où $B(x, \epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ dans $(\mathbb{R}^n, d)$. Montrer que, étant donnés deux compacts $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, on a $d(K_1, K_2) \leq \epsilon$ si et seulement si $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

3. Soit $\mathcal{K}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ constitué des parties finies de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{K}_0$ est dense dans $(\mathcal{K}, \delta)$.

---

8 - Distance sur la sphère

On note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine pour cette norme. Si p et q sont deux points de $\mathbb{S}^2$, on note $\mathcal{C}(p,q)$ l'ensemble des chemins $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ qui sont C^1 par morceaux, et tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(0) = q$. On note $L(\gamma) = \int_0^1 \|c'(s)\| ds$ la longueur d'un tel chemin, et on pose

$$d(p,q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(p,q)\}.$$

On rappelle qu'un *grand cercle* de $\mathbb{S}^2$ est un cercle obtenu comme intersection de $\mathbb{S}^2$ avec un plan passant par l'origine de $\mathbb{R}^3$. Si p et q sont deux points de $\mathbb{S}^2$ qui ne sont pas antipodaux, on note $\gamma_{p,q}$ le plus court des deux arcs de grand cercles qui joignent p à q. Si p et q sont des points antipodaux, on note $\gamma_{p,q}$ l'un quelconque des demi-grands cercles joignants p à q.

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{S}^2$.

2. Montrer que la topologie définie par d sur $\mathbb{S}^2$ est la même que celle induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que, quels que soient p et q sur $\mathbb{S}^2$, la distance $d(p,q)$ est égale à la longueur de l'arc $\gamma_{p,q}$.

---

9 - Distances ultramétriques.

Une distance d sur un ensemble E est dite *ultramétrique* si elle vérifie

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) \qquad \text{pour tous } x,\ y \text{ et } z.$$

1. Dans un espace munit d'une distance ultramétrique, montrer que :

   a. tout triangle est isocèle ;

   b. n'importe quel point d'une boule est le centre de cette boule ;

   c. étant données deux boules, soit elle sont disjointes, soit l'une et contenue dans l'autre ;

   d. les boules ouvertes sont fermées, et les boules fermées sont ouvertes ;

   e. une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si $d(x_n, x_{n+1})$ tend vers 0.

2. *Un exemple trivial.* Soit X un ensemble. Pour $x, y \in X$, on pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$. Montrer que d est une distance ultramétrique sur X.

3. *Un exemple important : la distance p-adique.* Soit p un nombre premier. On considère *valuation p-adique* $v_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty]$ définie de la manière suivante : pour $a \in \mathbb{Z}^*$, $v_p(a)$ est la puissance de p dans la décomposition de a en facteurs premiers ; puis $v_p(a/b) := v_p(a) - v_p(b)$; enfin $v(0) := +\infty$. Pour $x, y \in \mathbb{Q}$, on note alors $d_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)}$. Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$. Comparer cette distance avec la distance usuelle. Montrer que tout voisinage p-adique de 0 est dense dans $\mathbb{Q}$ pour la distance usuelle.

4. *Un autre exemple important : séries formelles* Soit $E = K[[X]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans le corps K (les éléments de E sont les séries de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ avec $a_0, a_1, \dots \in K$). On considère la valuation $v : E \to [0, +\infty]$ définie par

$$v(0) := +\infty \text{ et si } S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \neq 0, v(S) := \min\{n \in \mathbb{N} \ / \ a_n \neq 0\}.$$

Pour $S, T \in E$, on note alors $d(S,T) = 2^{-v(S-T)}$. Vérifier que d est une distance ultramétrique sur E.

---

10 - Topologie "de la limite supérieure" sur $\mathbb{R}$.

On munit $\mathbb{R}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\lim\sup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$.

1. Cette topologie est-elle moins fine que la topologie usuelle ? Plus fine ?

2. Montrer que les intervalles $]a, b]$ (avec $a < b$) forment une base d'ouverts de cette topologie.

3. Déterminer l'adhérence de $]a, b]$.

4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour cette topologie.

5. Montrer que cette topologie n'est pas métrisable (*indication: montrer qu'il n'existe pas de base dénombrable d'ouverts et penser à la question précédente*).

6. On note $\mathcal{T}_{\lim\inf}$ la topologie sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a[$ et $[b, +\infty[$. Montrer que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est l'intersection de $\mathcal{T}_{\lim\sup}$ et $\mathcal{T}_{\lim\inf}$.

---

11 - Topologie de Fort.

Soit X un ensemble infini et x_0 un point de X. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties de X dont le complémentaire est soit fini soit contient x_0.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ forme une topologie de X.

2. On suppose maintenant que X est dénombrable et on note X sous la forme $X = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Soit $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par

- $d(x_m, x_n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ pour m et n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- $d(x_n, x_0) = d(x_0, x_n) = |\frac{1}{n}|$ pour n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- $d(x_0, x_0) = 0$.

Montrer que d est une distance dont la topologie induite est $\mathcal{T}$.

3. On suppose que X est non dénombrable. Montrer que $\mathcal{T}$ n'est pas métrisable.

---

12 - Théorème de plongement d'Arens-Fells.

Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de X, et $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On fixe un point $a \in X$, et, pour chaque $x \in X$, on définit :

$$f_x : A \in \mathcal{F} \ \mapsto d(x, A) - d(a, A).$$

Montrer que l'application $x \mapsto f_x$ est une isométrie. En déduire que tout espace métrique est isométrique à un fermé d'un espace vectoriel normé.