École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2010-2011
Travaux dirigés de Topologie et Calcul différentiel
François Béguin

---

# Feuille d'exercices n°11

## Théorème d'inversion locale et études locales de fonctions

---

### 1 - Résolution d'une équation différentielle via le théorème d'inversion locale

Soit $F = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et $E$ le sous-espace fermé de $C^2([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions qui s'annulent en 0 et 1, muni de la norme $\|y\|_E = \|y''\|_\infty + \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty$. On se donne deux fonctions $h$ et $k$ réelles continues sur $[0,1]$, et on considère l'application $\phi : E \to F$ définie par $\phi(y) = y'' + hy'^2 + ky^2$.

1. Montrer que l'application $\psi : E \times E \to F$ définie par $\psi(y,z) = h \cdot y' \cdot z' + k \cdot y \cdot z$ est bilinéaire continue.

2. Montrer que $\phi$ est de classe $C^1$ sur $E$ et calculer la différentielle $d\phi_{(0)}$ de $\phi$ en 0.

3. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in F$ vérifiant $\|f\|\infty < \epsilon$, il existe $y \in E$ tel que $\phi(y) = f$, c'est-à-dire une solution de l'équation différentielle $y'' + h(x)y'^2 + k(x)y^2 = f(x)$ qui s'annule en 0 et en 1.

---

### 2 - Une preuve du théorème de D'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme non constant, et $S$ l'ensemble des zéros de $P'$. En considérant $\mathbb{C} \setminus P(S)$, montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. On utilisera le théorème d'inversion locale et un argument de connexité.

---

### 3 - Isométries de $\mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne. Rappelons que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une *isométrie* si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$. Soit $f$ une application de classe $C^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On va montrer qu'une isométrie est nécéssairement affine.

1. Que peut on dire de la différentielle de $f$ ?

2. Montrer que pour tout $h, k, l \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left\langle d^{(2)}f(x).(h,l)\ ,\ df(x).k \right\rangle + \left\langle df(x).h\ ,\ d^{(2)}f(x).(k,l) \right\rangle = 0.$$

.

3. On note $g(h,k,l) = \langle d^{(2)}f(x).(h,l)\ ,\ df(x).k \rangle$. Déduire de la question précédente que $g(h,k,l) = -g(k,h,l)$ puis montrer que $g(h,k,l) = 0$.

4. Montrer que $df(x)$ est un isomorphisme, puis que $d^{(2)}f(x) = 0$.

5. Conclure que $f$ est affine.

---

## 4 - Lemme de Morse

1. *(Lemme de réduction régulière des formes quadratiques)* On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées symétriques réelles de taille $n$. On fixe une matrice $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible, et on considère l'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, définie par $\phi(M) = {}^tMA_0M$. Montrer que $\phi$ est $C^\infty$ ; calculer $d\phi(I)$, vérifier qu'elle est surjective et trouver son noyau. En déduire qu'il existe un voisinage $V$ de $A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $A \mapsto P(A)$ de classe $C^\infty$ de $V$ dans $GL_n(\mathbb{R})$, avec $P(A_0) = I$, telle que $A = {}^tP(A)A_0P(A)$ pour tout $A \in V$.

2. Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f \in C^3(U;\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et que $d^{(2)}f(0)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$ de classe $C^1$ d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, avec $\varphi(0) = 0$, tel que $f(x) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ au voisinage de l'origine.
*Indication.* On commencera par écrire $f(x) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)x_ix_j$ avec des fonctions $a_{i,j}$ de classe $C^1$.

3. *(Une application classique)* Montrer que les points critiques non dégénérés d'une fonction $f \in C^3(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ sont isolés.

---

## 5 - Théorème des extrema liés, *dit aussi* des multitplicateurs de Lagrange

Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $F, g_1, \ldots, g_k \in C^1(U;\mathbb{R})$ (avec $k < n$). On note $Z$ l'ensemble suivant :

$$Z := \Big\{x \in U \;\mid\; g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0\Big\}.$$

On suppose qu'en tout point $x \in Z$, les formes linéaires $dg_1(x), \ldots, dg_k(x)$ sont linéairement indépendantes[1]. On note $g := (g_1, \ldots, g_k)$.

1. On suppose que le point $a \in Z$ est un extremum local de la restriction de $F$ à $Z$. On va montrer l'existence de coefficients réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que la relation suivante soit satisfaite :

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(a).$$

a. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert $V$ de $a$ inclus dans $U$ dans lesquels $Z$ se représente sous la forme :

$$Z = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\mid\; (x_1, \ldots, x_k) = \varphi(x_{k+1}, \ldots, x_n)\Big\},$$

pour une certaine application de classe $C^1$ définie au voisinage de $\alpha := (a_{k+1}, \ldots, a_n)$, où $a$ s'écrit $(a_1, \ldots, a_n)$ dans la base.

b. Montrer que $\operatorname{Ker} dg(a) = \Big\{(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \;\mid\; (h_1, \ldots, h_k) = d\varphi_\alpha(h_{k+1}, \ldots, h_n)\Big\}$.

c. En déduire que $\operatorname{Ker} dg(a) \subset \operatorname{Ker} dF(a)$. Conclure.

2. L'espace tangent en $a$ à $Z$ est l'espace affine $T_aZ := a + \operatorname{Ker} dg(a)$. On appelle Hessienne de $F$ en $a$, notée $\operatorname{Hess}_a(F)$, la restriction à $T_aZ$ de la forme bilinéaire $d^{(2)}F(a) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, d^{(2)}g_i(a)$. Montrer que si $\operatorname{Hess}_a(F)$ est définie positive, alors $a$ est un maximum (local) strict de $F$ restreint à $Z$. Que peut-on dire de la réciproque?

[1] ceci établit que $Z$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

3. *(Un exemple d'application)* Montrer que, pour pour tous réels $x, y, z$ on a

$$| xyz | \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}(| x | + | y | + | z |)^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

*Indication:* on pourra introduire la fonction $f : [0, +\infty[^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} &f(x, y, z) = \frac{xyz}{(x + y + z)^2} \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ &f(0, 0, 0) = 0 \end{aligned}$$

et appliquer le théorème des extrema liés à un compact bien choisi.

---

## 6 - Un résultat dû à Borel : fonction à dérivées successives prescrites

On rappelle que le *support* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'adhérence de $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Dans cet exercice, on souhaite montrer le résultat suivant :

> Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, $I$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe $f \in C^\infty(I)$, à support dans $I$, tel que
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = c_n.$$

1. Montrer l'existence d'une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $] - 1, 1[$, qui vaut 1 au voisinage de 0.

2. On introduit, pour $\varepsilon_n$ suffisamment petit pour que $] - \varepsilon_n, \varepsilon_n[ \subset I$, la fonction

$$g_n(x) = c_n\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que si $\varepsilon_n$ est assez petit, on a $\left|g_n^{(\alpha)}(x)\right| \leq 2^{-n}$ sur $\mathbb{R}$, si $\alpha \in \{0, \ldots, n - 1\}$.

3. Conclure, en utilisant la fonction $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

---

## 7 - Un théorème de Whitney

Soit $F$ un fermé de $\mathbb{R}^n$. Un théorème de Whitney établit que $F$ est le lieu des zéros d'une fonction réelle de classe $C^\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

1. Montrer qu'il existe une famille dénombrable de boules $(B_i)_{i\in I}$ et d'applications $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telles que $F = \mathbb{R}^n - \bigcup_{i\in I} B_i$,et pour tout $i \in I$, on a

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ f_i(x) = 0\Big\} = \mathbb{R}^n - B_i.$$

2. Construire l'application $f$ recherchée à partir des $f_i$.

---