École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2010-2011
Travaux dirigés de Topologie et Calcul différentiel
François Béguin

Feuille d'exercices n°2
Intérieur, adhérence, frontière, continuité

Les exercices 1 et 6 sont là pour vous faire manipuler les définitions du cours ; la résolution de ces exercices ne devraient normalement pas vous poser de problème. Au contraire, la résolution des exercices 3, 4 et 5 requiert un peu d'imagination.

1 - Quelques questions sur intérieur, adhérence et frontière

1. Soient A et B deux parties d'un espace topologique X. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en général. Lorsqu'elles décrivent une égalité fausse, indiquez si au moins l'une des inclusions est vraie.

a. $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$

b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c. $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

d. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

e. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

f. $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \partial B$.

2. Soient A et B deux parties d'un espace topologique X, avec $B \subset A$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en général. Lorsqu'elles décrivent une égalité fausse, indiquez si au moins l'une des inclusions est vraie.

a. L'intérieur de B dans A (c'est-à-dire l'intérieur de B pour la topologie induite sur A) est égal à l'intérieur de B dans X.

b. L'adhérence de B dans A est égale à la trace sur A de l'adhérence de B dans X.

c. La frontière de B dans A est égale à la trace sur A de la frontière de B dans la topologie de X.

3. Montrer que, dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte est toujours la boules fermée correspondante, et l'intérieur d'une boule fermée est toujours la boule ouverte correspondante. Est-ce encore vrai dans un espace métrique ?

4. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, quels sont les parties de E dont la frontière est vide ?

5. Soit X un ensemble infini que l'on munit de la topologie dont les fermés sont les ensembles finis[1]. Déterminer la frontière d'une partie A de X.

---

[1]Voir l'exercice 4 de la feuille 1.

2 - Adhérence dans un espace non-métrisable.

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x, y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $y < y'$, on note

$$U_{x,y,y'} = \{f \in E \mid y < f(x) < y'\}.$$

On note $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par la famille $\{U_{x,y,y'}\}_{x,y,y' \in \mathbb{R},\, y<y'}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ n'est autre que la topologie de la convergence simple : une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers une fonction f pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f.

2. Soit F le sous-ensemble de E constitué des fonctions qui sont nulles partout sauf en un nombre fini de points. Déterminer l'adhérence de F pour la topologie $\mathcal{T}$.

3. Exhiber un élément de E qui n'est limite d'aucune suite d'éléments de F.

Morale. En général l'adhérence d'une partie F d'un espace topologique n'est pas l'ensemble des limites de suites d'éléments de F.

4. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas métrisable.

---

3 - Problème de Kuratowski.

Soit A un partie d'un espace topologique X. On considère la suite de parties de X :

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}},\ \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}},\ \text{etc.}$$

Combien de termes de cette suite peuvent-ils être deux à deux distincts ?

---

4 - Ensembles dérivés successifs.

Soit A une partie d'un espace topologique X. Un *point d'accumulation* de A est un point $x \in A$ qui est dans l'adhérence de $A \setminus \{x\}$. L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé *ensemble dérivé* de A et noté A'. L'ensemble dérivé de l'ensemble dérivé de A est noté A". Etc.

Combien la suite $A,\ A'\ A'',\ A''' \ldots$ peut-elle contenir de termes deux à deux distincts ?

---

5 - Théorème de Cantor-Bendixon

Soit A une partie d'un espace topologique X. On dit qu'un point $x \in X$ est un point de condensation de A si, pour tout voisinage V de x, l'intersection $V \cap A$ est non-dénombrable. On note A^* l'ensemble des points de condensation de A.

1. Si X admet une base dénombrable d'ouverts, montrer que $A \setminus A^*$ est dénombrable. En déduire que $A^* = A^{**}$.

2. En déduire le théorème de Cantor-Bendixon : tout espace topologique à base dénombrable d'ouverts s'écrit comme la réunion disjointe de deux sous-ensembles X_1 et X_2, où X_1 est fermé sans point isolé et X_2 est dénombrable.

---

6 - Quelques questions de continuité.

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, tel que pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle, f soit continue. Déterminer $\mathcal{T}$.

2. Quels sont les points de continuité d'une fonction caractéristique $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ pour A une partie d'un espace topologique X et $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle ? Donner un exemple où χ_A est continue sur X entier et un exemple où χ_A n'est continue en aucun point.

3. Soient X et Y des espaces topologiques. Montrer que $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pour toute partie B de Y, $\partial(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\partial B)$. Que se passe-t-il si on considère l'adhérence à la place de la frontière ?

4. On munit $\mathbb{N}$ de la topologie dont les fermés sont les ensembles finis. A quelle condition une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est-elle continue ?

5. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Expliquer ou rappeler pourquoi une forme linéaire sur E est continue si et seulement s'il existe une boule ouverte sur laquelle elle est bornée. En déduire qu'une forme linéaire sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé. On pourra même montrer que le noyau d'une forme linéaire non continue est dense dans E.

6. Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique séparé Y.

a) Vérifier que l'ensemble $\{x \in X / \ f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.

b) Montrer que si $D \subset X$ est une partie dense et $f_{|D} = g_{|D}$, alors $f = g$. Exhiber un contre-exemple élémentaire (avec Y non-séparé bien sur).

c) Montrer que le graphe de f est fermé dans $X \times Y$ (on munit $X \times Y$ de la topologie engendrée par les ensembles $O_1 \times O_2$, avec O_1 ouvert de X et O_2 ouvert de Y). Que pouvez-vous dire de la réciproque ? Que se passe-t-il si on retire l'hypothèse de séparation sur Y ?

d) On suppose que f est en plus injective. Montrer que X est séparé.