École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2010-2011
Travaux dirigés de Topologie et Calcul différentiel
François Béguin

Feuille d'exercices n°3
Connexité, axiomes de séparation

1 - Le cas le plus facile du théorème de l'invariance du domaine

Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

---

2 - Connexité du groupe linéaire, du orthogonal, et du groupe spécial orthogonal

On munit $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ de leurs topologies usuelles (induites par n'importe une norme quelconque). Les groupes linéaires, orthogonaux, et spéciaux orthogonaux $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{C})$ sont munis de la topologie induite.

1. Montrer que le plan complexe privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

2. Les espaces $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont-ils connexes ? Que peut-on dire avec $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$?

---

3 - Parties connexes de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

On considère que $\mathbb{Q}$ et son complémentaire sont munis de la topologie induite par leur inclusion dans $\mathbb{R}$.

1. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire ?

2. Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

---

4 - Union et intersection de parties connexes

Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique X.

1. Montrer que si $A \cap \overline{B}$ n'est pas vide, alors $A \cup B$ est connexe. La conclusion reste-t-elle vraie si l'on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$?

2. Montrer que, si B rencontre A et le complémentaire de A, l'intersection de B avec la frontière de A est non vide.

---

5 - Partie dont l'union et l'intersection sont connexes.

Soit X un espace topologique, A et B deux parties **fermées** de X telles que :

- $A \cup B$ est connexe,
- $A \cap B$ est connexe.

Le but de l'exercice est de montrer que A et B sont connexes. On suppose que A s'écrit comme la réunion disjointe de deux fermés F_1 et F_2 (de A).

1. Justifier que $F_1 \cap B$ et $F_2 \cap B$ sont des fermés de l'espace topologique $A \cap B$ pour la topologie induite et en déduire que $F_1 \cap B$ ou $F_2 \cap B$ est vide.

2. En déduire que $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$. Conclure.

3. Montrer que le résultat peut se révéler faux si on ne suppose pas A et B conjointement fermés.

---

6 - Peignes

Considérons les peignes de $\mathbb{R}^2$:

$$P_1 = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times [0,1] \right) \quad \text{et}$$

$$P_2 = (R \times \{-1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x + \sqrt{2}\} \times [-1,0] \right).$$

Montrer que $P_1 \cup P_2$ est connexe mais n'est pas connexe par arc.

---

7 - Topologie cofinie.

Considérons un ensemble infini X, que l'on munit de la topologie cofinie, c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les ensembles de complémentaire fini[1].

1. Montrer que X est connexe, et même localement connexe.

2. Dans le cas où X est dénombrable, montrer que X n'est pas connexe par arcs.

3. Dans le cas X n'est pas dénombrable, et où l'on admet l'hypothèse du continu (tout ensemble non-dénombrable à au moins la puissance de $\mathbb{R}$), montrer que X est connexe par arcs, et même localement connexe par arcs.

---

8 - Ordre lexicoraphique

On munit l'ensemble $[0,1]^2$ de l'ordre lexicographique : $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ ou si $x_1 = x_2$ et $y_1 < y_2$. Cet ordre définit une topologie sur $[0,1]^2$: celle engendrée par les intervalles du type $](x_1, y_1), (x_2, y_2)[$, du type $[(0,0), (x,y)[$, ou du type $](x,y), (1,1)]$. Montrer que $[0,1]^2$ muni de cette topologie est connexe, localement connexe, mais pas connexe par arcs.

[1] Voir l'exercice 4 de la feuille 1.

9 - Quelques remarques et propriétés de la topologie produit.

1. Montrer que pour A et B des parties d'espaces topologiques X et Y, on a $\partial(A \times B) = ((\partial A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times (\partial B))$.

2. Montrer que si les A_i sont des parties non vides des espaces topologiques X_i, on a que ΠA_i est dense dans ΠX_i si et seulement si chaque A_i est dense dans X_i.

3. Montrer qu'un produit d'espaces connexes est connexe pour la topologie produit. Quelle réciproque peut-on énoncer de ce fait ?

4. Montrer qu'un produit d'espaces connexes par arcs est encore connexe par arcs.

5. *Une fausse topologie produit.* Soient $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.

a. Montrer que l'ensemble des pavés du type $\Pi_{i\in I} U_i$, avec U_i ouvert non-vide de $\mathcal{T}_i$ pour tout i, forme la base d'une topologie. Quand cette topologie coïncide-t-elle avec *la topologie produit* au sens du cours ?

b. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe lorsqu'il est muni de cette topologie.

c. On suppose maintenant que chaque X_i est métrique, de distance d_i, et que I est infini. Soit (Y, d) un autre espace métrique. À quelle condition une fonction f de Y dans le produit des X_i est-elle continue (pour la fausse topologie produit) ? Comparer avec le cas de la topologie produit usuelle.

---

10 - Il n'y a pas de version topologique du théorème de Cantor-Bernstein.

Rappelons que le théorème de Cantor Bernstein affirme qu'étant donnés deux ensembles A et B, si A s'injecte dans B et B s'injecte dans A, alors A et B sont en bijection.

On considère les ensembles

$$A =]0,1[\cup \{2\} \cup]3,4[\cup \{5\} \cup]6,7[\cup \dots$$
$$B =]0,1] \cup]3,4[\cup \{5\} \cup]6,7[\cup \{8\} \cup]9,10[\cup \dots$$

munis de la topologie induite par $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'un homéomorphisme envoie une composante connexe sur une composante connexe. En déduire que A et B ne sont pas homéomorphes.

2. Déterminer des bijections continues de A vers B et de B vers A. Conclure.

---

11 - Topologies droite et gauche; espaces T_0.

1. Soit $(X, \preceq)$ un ensemble (partiellement) ordonné. Pour $x \in X$, on introduit les parties :

$$D_x = \{y \in X \ / \ x \preceq y\} \text{ et } G_x = \{y \in X \ / \ y \preceq x\}.$$

Montrer que les ensembles D_x (respectivement les ensembles G_x) forment la base d'une topologie qu'on appellera topologie droite (resp. gauche). Montrer que dans ces topologies, une intersection d'ouverts est ouverte. Déterminer l'adhérence d'un singleton $\{x\}$. Ces topologies sont-elles séparées en général ?

2. On dit qu'un espace topologique est de Kolmogoroff (ou T_0) s'il satisfait que pour deux points distincts x et y, il existe un voisinage de l'un de ces points qui ne contient pas l'autre. Montrer que tout espace séparé est de Kolmogoroff. La réciproque est-elle vraie ?[2]

3. Montrer qu'un ensemble ordonné muni de la topologie droite est de Kolmogoroff.

4. Soit à présent X un espace de Kolmogoroff qui satisfait qu'une intersection d'ouverts est toujours ouverte. Montrer que la relation

$$y\mathcal{R}x \iff x \in \overline{\{y\}},$$

est une relation d'ordre et que la topologie sur X est la topologie droite associée à cette relation.

5. En déduire que si X est un espace de Kolmogoroff, toute partie finie non vide de X possède au moins un point isolé. Montrer que si X n'a pas de point isolé, alors toute partie ouverte est infinie.

---

12 - Axiomes de séparation[3]

Soit X un espace topologique.

(T_0) X est T_0 (ou de Kolmogoroff) si pour tout point $x \neq y$, il existe un ouvert contenant l'un des points et pas l'autre.

(T_1) X est dit[4] T_1 si pour tout points $x \neq y$, il existe un ouvert U_x contenant x et pas y et un ouvert U_y contenant y et pas x.

(T_2) X est T_2 si il est séparé (on dit aussi que X est Hausdorff).

(T_3) X est T_3 ou **régulier** s'il est T_0 et vérifie en plus la propriété ($\widetilde{T_3}$): pour tout fermé F et point $x \notin F$, il existe des ouverts O_x, O_F disjoints contenant respectivement x et F.

(T_4) X est T_4 ou **normal** s'il est T_1 et vérifie en plus la propriété ($\widetilde{T_4}$): si A, B sont des fermés disjoints dans X, il existe des ouverts O_A, O_B disjoints contenant respectivement A et B.

1. Etudier les différentes relations d'implication entre les axiomes T_0, T_1, T_2,($\widetilde{T_3}$) et ($\widetilde{T_4}$) (donner des contrexemples s'il n'y a pas de relation d'implication; ne pas comparer ($\widetilde{T_3}$) et ($\widetilde{T_4}$)). Montrer qu'il existe des espaces qui ne satisfont aucun de ces axiomes et des espaces satisfaisant ces axiomes.

2. Montrer qu'un espace X est (T_1) si et seulement si les points de X sont fermés. Montrer que si X est régulier, alors X est séparé. Montrer qu'un espace normal (*i.e.* (T_4)) est régulier (*i.e.* (T_3)). La définition donnée est-elle équivalente à celle du cours ?

3. Montrer qu'un produit ΠX_i d'espaces est régulier si et seulement si chaque X_i est régulier et qu'un sous-espace d'un espace régulier est régulier.

4. Montrer que si X contient un sous-ensemble dénombrable dense (*i.e.* est séparable) et un sous-ensemble discret fermé non-dénombrable, alors X n'est pas normal. En déduire que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}}) \times (\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est régulier mais pas normal.

5. Montrer qu'un espace topologique X (T_1) est normal si et seulement si pour tout fermé A, B, il existe existe des ouverts $U_A \supset A$, $U_B \supset B$ tels que $\overline{U_A} \cap \overline{U_B} = \emptyset$

6. On munit le demi-plan $\overline{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0\}$ de la topologie engendrée par les ouverts euclidiens usuels sur $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$ et pour tout z sur l'axe $y = 0$ et $\epsilon > 0$ par les ensembles $\{z\} \cup D_{z,\epsilon}$ où

[2] Un espace séparé est parfois appelé T_2. On reviendra sur différentes notions de séparation dans la feuille de TD n° 3

[3] Attention : la terminologie concernant les propriétés de séparation n'est pas complètement standardisée, et peu varier suivant les auteurs.

[4] parfois appelé de Fréchet, mais c'est une terminologie ambiguë et non-univoque qu'il vaut mieux proscrire

$D_{z,\epsilon}$ est le disque dans H de rayon ϵ, tangent en z à l'axe $y = 0$. Montrer que $\overline{H}$ muni de cette topologie est régulier, non-normal (on pourra considérer les ensembles $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{Q}\}$ et $B = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$.)

7. Terminer la comparaison entre les différents axiomes de séparation.

---

13 - Théorème de Tietze

Montrer qu'un espace séparé X est normal si et seulement si pour tout fermé F, toute fonction continue $f : F \to \mathbb{R}$ telle que $\sup\limits_{x \in F} |f(x)| \leq \alpha$ s'étend en une fonction continue $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ telle que $\sup\limits_{x \in X} |\tilde{f}(x)| \leq \alpha$.
