École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2010-2011
Travaux dirigés de Topologie et Calcul différentiel
François Béguin

Feuille d'exercices n°4
Constructions d'espaces topologiques

1 - Un exemple de topologie engendrée par une famille de parties.

Comparer la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$ avec la topologie (dite faible) induite par les droites affines (munies de leur topologie usuelle), c'est à dire la topologie induite par les familles d'applications $i_D : D \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ où D parcourt l'ensemble des droites affines.

---

2 - Ensemble de Cantor et courbes de Peano.

On considère $A = \{0, 2\}$ (muni de la topologie discrète) et l'application

$$\varphi : \begin{cases} A^{\mathbb{N}} \to [0,1], \\ (a_i) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}}. \end{cases}$$

On appelle ensemble de Cantor l'image de φ que l'on note C. On munira $A^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit et C de la topologie induite par $\mathbb{R}$.

1. Montrer que φ détermine un homéomorphisme entre $A^{\mathbb{N}}$ et C.

2. Montrer que $A^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à $\underbrace{A^{\mathbb{N}} \times \cdots \times A^{\mathbb{N}}}_{\text{k fois}}$, quel que soit $k \geq 1$.

3. Déterminer une surjection continue de $A^{\mathbb{N}}$ vers $[0, 1]$.

4. Conclure qu'il existe une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^k$, surjective. Autrement dit, il existe des courbes (dites *de Peano*), remplissant le cube de dimension k. Une telle application peut-elle être un homéomorphisme ?

---

3 - Ensemble de Cantor et entiers p-adiques

Soit p un nombre premier et $\pi_{n\leqslant m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ la projection canonique obtenue ne prenant les classes modulo p^n (n, m sont des entiers). Montrer que les $\pi_{n,m}$ forment un système projectif d'espaces topologiques discrets. On note $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ l'espace topologique limite projective des $\pi_{n\leq m}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est normal.

2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor triadique C définit dans l'exercice précédent (on pourra traiter par le cas $p = 2$, et utiliser la question 1 de l'exercice 2)

---

4 - Topologie quotient

Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation déquivalence sur X. On note $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ l'application canonique qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $[x] \in X/\mathcal{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique (à homéomorphisme près) espace topologique $\widetilde{X}$ et application continue $p : X \to \widetilde{X}$, constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, tels que pour toute application continue $f : X \to Y$ qui est constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, il existe une unique application continue[1] $\tilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ qui relève f, c'est à dire telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$. Décrire explicitement cette topologie. A quelle condition une application $g : \widetilde{X} \to Z$ est-elle continue ? Montrer que si f est ouverte, $\tilde{f}$ est ouverte.

2. Montrer que si X est connexe alors $\widetilde{X}$ est connexe. Même question avec connexe par arcs.

3. Montrer que si $X/\mathcal{R}$ est séparé alors le graphe $\mathcal{R} = \{(x, y),\, x\mathcal{R}y\} \subset X \times X$ est fermé. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose en plus que $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est ouverte.

4. Donner un exemple d'espace séparé X et de relation $\mathcal{R}$ tels que $X/\mathcal{R}$ soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-séparé tel que $X/\mathcal{R}$ soit séparé.

---

5 - Feuilletages linéaires sur le tore

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}^2$. On note $\mathbb{T}^2$ l'espace topologique quotient[2] $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$. On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ la projection canonique.

1. Soit D_α une droite de pente $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $\pi(D_\alpha)$ est homéomorphe à un espace topologique bien connu. Montrer que dans le cas contraire $\pi(D_\alpha)$ est dense dans T^2 et que $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue. Est-ce un homéomorphisme ?

2. On fixe maintenant $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et on munit $\mathbb{T}^2$ de la relation $[x]\mathcal{R}'[y]$ si et seulement si il existe une droite de pente α dans $\mathbb{R}^2$ telle que $[x]$ et $[y]$ sont dans $\pi(D)$. Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. L'espace quotient $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}'$ est-il séparé ? Identifier la topologie sur $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}'$.

---

6 - Cônes, suspensions, recollements ...

Soit X un espace topologique et $f : X \to Y$ une application continue.

1. Le **cône sur** X est l'espace topologique quotient $C(X) := (X \times [0,1])/\big((x,1) \sim (y,1)\big)$. Montrer que X s'identifie[3] à un sous-espace fermé de $C(X)$ et que l'application $(x,t) \mapsto (f(x),t)$ induit une application continue $C(f) : C(X) \to C(Y)$, compatible avec la composition des applications et l'identité[4].

2. La **suspension de** X est l'espace topologique quotient $S(X) := (X \times [0,1])/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1) \sim (y,1)$ et $(x,0) \sim (y,0)$. Montrer que X s'identifie à un sous-espace fermé de $S(X)$ et que l'application $(x,t) \mapsto (f(x),t)$ induit une application continue $S(f) : S(X) \to S(Y)$, compatible avec la composition des applications et l'identité. Soit S^n la sphère de dimension n. Identifier $S(S^n)$. Montrer que $S(X) \cong C(X)/(X)$.

3. Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vide de X et $f : A \to Y$, une application continue. Le **recollement de** X **sur** Y **par** f est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \coprod Y)/\big(x \sim f(x),\, x \in A\big).$$

[1] ceci est une caractérisation de la topologie quotient par une *propriété universelle*

[2] c'est en fait le quotient par les classes déquivalence de l'action naturelle du *groupe topologique* $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ que l'on note en général simplement $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

[3] c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme entre X et un sous-espace de $C(X)$.

[4] Ces propriétés de $C(f)$ traduisent sa fonctorialité

i) Que peut on dire si il existe deux applications continues $g : X \to Z$, $h : Y \to Z$ qui vérifie $g(a) = h \circ f(a)$ pour tout $a \in A$? Montrer que si $Z \subset X$ est un sous-espace non-vide de X, l'espace quotient X/Z s'identifie à un recollement.

ii) Montrer que $X \cup_f Y$ est connexe si X et Y sont connexes. Même question avec connexe par arcs.

iii) Montrer que si A est fermé, alors Y s'identifie à un sous-espace de $X \cup_f Y$. Si de plus X, Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact.

---

7 - Bouquets de cercles

On considère les espaces topologiques suivants :

1. A est l'espace topologique obtenu comme quotient de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) par le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ (attention, il ne s'agit pas du groupe topologique $\mathbb{R}$ par son sous-groupe $\mathbb{Z}$; il s'agit du quotient de l'espace topologique $\mathbb{R}$ par son sous-ensemble $\mathbb{Z}$) ;
2. B est l'espace topologique quotient du cercle unité S^1 par son sous-ensemble $\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\ n \in \mathbb{N}^*\}\big)$;
3. R_1 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $n \in \mathbb{N}$ et tangents en $(0,0)$ à l'axe $y = 0$;
4. R_2 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et tangents en $(0,0)$ à l'axe $x = 0$;
5. $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$ est l'espace topologique donné par le recollement de $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ sur le point $Y = \{pt\}$ par l'unique application $f : F \to \{pt\}$ où $F = \coprod_{n\in\mathbb{Z}}\{x_n\}$ est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle).

Dire lesquels de ces espaces sont homéomorphes entre eux.

---

8 - Espaces projectifs réels et complexes.

L'espace projectif réel de dimension n est l'espace topologique des droites vetcorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est, *par définition*, l'espace topologique quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^*$$

où le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ agit par multiplication scalaire. On définit de même *l'espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. On note $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ du point $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (et de même dans $\mathbb{C}$). On définit aussi $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})} = S^n/\{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ agit sur la sphère comme précédemment. Enfin, on notera $\mathbb{B}^n$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

1. On identifie dans cette question $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et S^1 au cercle unité de $\mathbb{C}$.

a) On considère la fonction $f(z) = z^2$ $(z \in S^1)$. Montrer que f définit par passage au quotient un homéomorphisme de $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ sur S^1.

b) À quel espace topologique bien connu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est-il homéomorphe ?

2. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

3. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$ sont homéomorphes et qu'ils sont aussi homéomorphe à l'espace quotient $\mathbb{B}^n/\sim$, où $x \sim x$ pour tout $x \in \mathbb{B}^n$ et $x \sim -x$ pour tout $x \in S^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$. Quel résultat analogue peut-on énoncer pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

4. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont compacts[5].

5. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que l'image de H dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Est-ce encore vrai pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

6. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peut sécrire comme une suite finie de recollements d'espaces topologiques bien connus (et bien compris).

7. (plus difficile) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est métrisable. Qu'en est-il de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

[5] On rappelle qu'un espace compact est séparé par définition