École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2010-2011
Travaux dirigés de Topologie et Calcul différentiel
François Béguin

Feuille d'exercices n°5
Groupes topologiques

---

1 - Propriétés topologiques d'un sous-groupe

Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G (muni de la topologie induite).

1. Montrer que H est ouvert dans G si et seulement si 1 est dans l'intérieur de H.

2. Montrer que si H est ouvert (dans G), alors H est fermé.

3. Montrer que si G est connexe, alors il est engendré par tout voisinage non-vide de 1.

4. Montrer que la composante connexe G_0 de 1 est un sous-groupe fermé et distingué. Que peut-on rajouter, si on suppose de plus que G est localement connexe ?

5. Montrer que si G est séparé et H est un sous-groupe discret, alors H est fermé dans G.

---

2 - Groupes topologiques et quotients

Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. On munit l'ensemble des classes d'équivalence G/H de la topologie quotient.

1. Montrer que si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.

2. Montrer que si H est fermé, alors G/H est séparé.

---

3 - Le cercle

Rappeler pourquoi le cercle $S^1 \cong \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| = 1\}$ est un groupe topologique isomorphe, en tant que groupe topologique, au quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. Quels sont les sous-groupes fermés de S^1 ?

2. Déterminer les endomorphismes continus du groupe S^1, ainsi que les morphismes continus de S^1 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. Déterminer toutes les représentations (de dimension finies) continues irréductibles de S^1, c'est-à-dire les morphismes continus $\rho : S^1 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (pour un certain entier n) tel que $\rho(S^1)$ ne laisse invariant aucun sous-espace vectoriel non-trivial de $\mathbb{C}^n$.

---

4 - Le groupe unitaire

Soit $U(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C})\,,\, {}^t\overline{M}M = I_n\}$ et $SU(n) = \{M \in U(n)\,,\, det(M) = 1\}$.

1. Montrer que $U(1)$ est homéomorphe à S^1, que $U(n)$ est homéomorphe à $SU(n) \times S^1$ et que $U(n)$ agit transitivement sur la sphère unité S^{2n-1} de $\mathbb{C}^n$.

2. On fixe un vecteur unitaire $e \in \mathbb{C}^n$ et on identifie $U(n-1)$ avec le sous-groupe de $U(n)$ des matrices M telles que $M(e) = e$. A quel espace topologique bien connu le quotient $U(n)/U(n-1)$ s'identifie-t-il ?

3. Déduire des questions précédentes que $U(n)$ et $SU(n)$ sont connexes.

---

5 - Décomposition polaire

1. Dire si les sous-groupes de $GL(n, \mathbb{C})$ suivants sont des sous-groupes fermés, compacts, connexes:

- le groupe orthogonal (euclidien) $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R})\,,\, M^tM = I_n\}$, et le groupe ortogonal complexe $O(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C})\,,\, M^tM = I_n\}$;
- le groupe spécial linéaire réel $SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R})\,,\, \det(M) = 1\}$, et le groupe spécial linéaire complexe $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C})\,,\, \det(M) = 1\}$;
- les groupes unitaire $U(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C})\,,\, {}^t\overline{M}M = I_n\}$ et spécial unitaire $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$;
- les groupes spéciaux orthogonaux $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$;
- le groupe triangulaire $B(n, \mathbb{K})$, constitué des matrices triangulaires supérieures dans $GL(n, \mathbb{K})$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{H}_n^+$ l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives de taille n.

2. Montrer que toute matrice M de $GL(n, \mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = U.H$ avec $U \in U(n)$ et $H \in \mathcal{H}_n^+$ (on pourra chercher une "racine carrée" de la matrice hermitienne ${}^t\overline{M}.M$).

3. Montrer que l'application $U(n) \times \mathcal{H}_n^+ \to GL(n, \mathbb{C})$ induite par la multiplication $(U, H) \mapsto U.H$ est un homéomorphisme. *(Noter que ce n'est un morphisme de groupes puisque $\mathcal{H}_n^+$ n'est pas un groupe.)*

4. Montrer que l'exponentielle matricielle définit un homéomorphisme de l'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices hermitiennes dans l'ensemble $\mathcal{H}_n^+$ des matrices hermitiennes définies positives.

5. En déduire que :

- $GL(n, \mathbb{C})$ est homéomorphe à $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$,
- $GL(n, \mathbb{R})$ est homéomorphe à $O(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$,
- $SL(n, \mathbb{C})$ est homéomorphe à $SU(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$,
- $SL(n, \mathbb{R})$ est homéomorphe à $SO(n) \times \mathbb{R}^{-1+n(n+1)/2}$,
- $O(n, \mathbb{C})$ est homéomorphe à $O(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

---

6 - Groupes pseudo-algébriques

Un sous groupe fermé $G \in GL(n, \mathbb{C})$ est dit pseudo-algébrique s'il est défini par une famille finie de polynômes en les parties réelles et imaginaires des coefficients des matrices, c'est à dire si $G = P_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap P_l^{-1}(0)$ où $P_1, \dots P_l : \mathbb{R}^{2n^2} \to \mathbb{C}$ sont des polynômes en les parties réelles $Re(m_{ij})$ et imaginaires $Im(m_{ij})$ des coefficients d'une matrice $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $O(n)$, $U(n)$, $SL(n, \mathbb{K})$ et $B(n, \mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sont pseudo-algébriques.

2. On suppose désormais que le groupe G est stable par conjugaison-transposition, c'est à dire que ${}^t\overline{G} = G$. On veut montrer qu'il existe un entier $d \ge 0$ tel que G soit homéomorphe à $(G \cap U(n)) \times \mathbb{R}^d$.

i) En utilisant la décomposition polaire, écrire tout élément $g \in G$ sous la forme $g = U \exp(H)$, $U \in U(n)$, H hermitienne et montrer que $\exp(2kH) \in G$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Soit K une matrice hermitienne telle que $\exp(K) \in G \cap \mathcal{H}^+$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tK) \in G \cap \mathcal{H}^+$.

iii) Montrer que U et $\exp(tH)$ $(t \in \mathbb{R})$ sont dans G et conclure.

3. On note $O(p,q)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique standard non-dégénérée de signature (p,q) sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire la forme quadratique dont la matrice est $I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$.

i) Montrer que $O(p,q)$ est un sous-groupe fermé pseudo-algébrique de $GL(n, \mathbb{R})$. Quelle est l'image de $O(p,q)$ par l'application déterminant ?

ii) Soit $K_{p,q} = O(p,q) \cap O(p+q)$. Montrer que $K_{p,q}$ est homéomorphe à $O(p) \times O(q)$ et que $O(p,q)$ est homéomorphe à $K_{p,q} \times \mathbb{R}^d$.

iii) Déterminer les composantes connexes de $O(p,q)$, et montrer que

$$SO(p,q) = \{k \in O(p,q) \mid \det(k) = 1\}$$

est un sous-groupe d'indice 2 de $O(p,q)$ avec 2 composantes connexes. Montrer que l'application $SO(p,q) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $M \mapsto \frac{\det(A)}{|\det(A)|}$, où on écrit M comme la matrice par blocs $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est un morphisme surjectif de groupes topologiques de noyau $SO_0(p,q)$, la composante connexe de l'identité de $SO(p,q)$.