École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2010-2011
Travaux dirigés de Topologie et Calcul différentiel
François Béguin

Feuille d'exercices n°6
Espaces métriques complets, convergence, suites

---

1 - La complétude est une propriété métrique

Donner deux distances d et d' sur un même ensemble X, qui définissent la même topologie sur X, telles que (X, d) est complet, mais pas (X, d').

---

2 - Espaces complets et applications uniformément continues

Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces métriques.

1. Montrer que, si f est uniformément continue, l'image d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy. Qu'en est-il de la réciproque ?

2. Supposons que f est un homéomorphisme uniformément continue. Si Y est complet, montre que X l'est aussi.

---

3 - Une petite amélioration du théorème du point fixe contractant

Soit f une application continue d'un espace métrique complet dans lui-même telle que f^p soit contractante pour un certain p. Montrer que f possède un unique point fixe.

---

4 - Complété d'un espace métrique.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un espace métrique complet (Y, δ) est un complété de (X, d) si il existe une isométrie $i : X \to Y$ (c'est-à-dire que $\delta(i(x), i(x')) = d(x, x')$) telle que $f(X)$ soit dense dans Y.

1. (*Unicité*) Montrer que si (Y_1, δ_1) et (Y_2, δ_2) sont deux complétés de (X, d) alors Y_1 et Y_2 sont isométriques.

2. Si $X \subset Y$ avec (Y, d) complet. Donner un complété de X.

3. (*Existence*) Soit (X, d) un espace métrique. Construire une injection isométrique de X dans un espace de fonctions (on pourra considérer la fonction "distance à un point"), et en déduire un complété de (X, d).

---

5 - Exemples d'espaces complets ou non

Les espaces suivant sont-ils complets? Sinon pouvez-vous en décrire un complété?

1. L'espace $\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ouégal à n sur $[0,1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$.

2. L'espace $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$.

3. L'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

4. L'espace $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$.

5. L'espace $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_d = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$?

6. L'espace $E = C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à supports compacts, muni de la norme $\|f\|_\infty$.

7. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers muni de la valuation p-adique (définie $|n|_p = p^{-k}$ où k est la puissance de p dans la décomposition de n en facteurs premiers si $n \neq 0$ et $|0|_p = 0$).

---

6 - Espaces de Hölder. Considérons X un espace métrique compact. Pour $\alpha \in]0,1]$, on introduit l'espace $C^\alpha(X,\mathbb{R})$ des fonctions hölderiennes d'indice α de X comme l'ensemble des fonctions telles que

$$\|f\|_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{(x,y)\in X^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha} < +\infty.$$

(On retrouve en particulier les fonctions lipschitziennes pour $\alpha = 1$.)

Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\alpha$ munit $C^\alpha(X,\mathbb{R})$ d'une structure d'espace de Banach.

---

7 - Escalier du diable.

On note $E = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Soit $T : E \to E$ l'application définie par

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2}(1 + f(3x-2)) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

1. Vérifier que T est bien définie et $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

2. Soit ϕ l'unique point fixe de T. Montrer que ϕ est dérivable, de dérivée nulle, sur le complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor.

On a donc "construit" une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, telle que $\phi(1) - \phi(0) = 1$, mais telle que ϕ' est définie et nulle presque partout !

---

8 - Une équation fonctionnelle

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une application continue non identique à 1 ou α. En considérant l'application $T : C([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$ donnée par

$$(Tf)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y))dy,$$

montrer qu'il existe une unique solution $f \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle (et non pas différentielle) suivante :

$$f(0) = \alpha \text{ et } f'(x) = f(\varphi(x)).$$

---

9 - Espace des suites périodiques

Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées, munies de la norme sup. Soit E le sous-espace de ℓ^∞ composé des suites périodiques. On considère l'endomorphisme T de E défini par:

$$T : (u_0, u_1, u_2, \dots) \mapsto (0, \frac{u_0+1}{2}, 0, \frac{u_1+1}{2}, \dots).$$

Montrer que cet opérateur est strictement contractant et en déduire que E n'est pas fermé.

---

10 - Distance de Hausdorff et complétude.

Soit E un espace métrique. On notera $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des compacts non vides de E. Montrer que si E est complet, alors $\mathcal{K}(E)$, muni de la distance de Hausdorff l'est aussi. (Indication: pour une suite (A_n) dans $\mathcal{K}(E)$, considérer l'ensemble

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{p>n} A_p}).$$

La réciproque est-elle vraie ?

---

11 - À propos des valeurs d'adhérence.

1. Montrer que si une suite numérique (u_n) est telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est connexe. Est-ce encore vrai pour une suite complexe ?

2. Soit f une fonction continue de $]0,1]$ dans un espace topologique X. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers 0 est-il nécessairement connexe ?
