

Feuille d'exercices n°7
COMPACTITÉ

1 - Compacité et normalité

1. Montrer qu'un espace compact est normal.
 2. Soit A et B des compacts de deux espaces topologiques X et Y , et Ω un ouvert du produit $X \times Y$ contenant $A \times B$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de X et Y tels que $A \times B \subset U \times V \subset \Omega$.
-

2 - Compacité et séparabilité

1. Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.
 2. En déduire qu'un espace métrique compact est homéomorphe à une partie de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit comme il se doit).
-

3 - Changement de topologie sur un espace compact

Soit X un espace topologique compact. Montrer qu'il n'existe pas de topologie qui soit strictement plus fine ou strictement moins fine que celle de X , et qui rende encore ce dernier compact.

4 - Complémentaire d'un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie, et soit K une partie compacte de E . Montrer que $E \setminus K$ a exactement une composante connexe non bornée, puis qu'il est connexe.

5 - Une suite ayant une valeur d'adhérence mais pas de sous-suite convergente

Soit $E = [0, 1]^{[0, 1]}$ l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans lui-même, muni de la topologie produit. Pour $n + 1$ rationnels distincts q_0, \dots, q_n dans $[0, 1]$, classés dans l'ordre croissant et satisfaisant $q_0 = 0$ et $q_n = 1$, on associe l'application f_{q_0, \dots, q_n} de $[0, 1]$ dans lui-même selon les règles suivantes :

- l'application f_{q_0, \dots, q_n} est continue sur $[0, 1]$,
- l'application f_{q_0, \dots, q_n} est affine sur chaque $[q_k, \frac{q_k + q_{k+1}}{2}]$ et chaque $[\frac{q_k + q_{k+1}}{2}, q_{k+1}]$,
- pour chaque k , $f_{q_0, \dots, q_n}(q_k) = 0$ et $f_{q_0, \dots, q_n}(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}) = 1$.

1. Soit A l'ensemble des f_{q_0, \dots, q_n} pour n dans $\mathbb{N} - \{0\}$ et les q_k comme décrits ci-dessus. Montrer que A est dénombrable ; on le représentera par une suite (x_n) d'éléments de E . Montrer que 0 est une valeur d'adhérence de (x_n) .

2. La suite (x_n) admet-elle une sous-suite qui converge vers 0 ?

6 - Topologie compacte-ouverte

Soient X, Y deux espaces topologiques. On note Y^X l'espace topologique des fonctions *continues* de X dans Y , muni de la topologie engendrée par les ensembles $\widetilde{U^K} = \{f : X \rightarrow Y, f(K) \subset U\}$ pour tous $U \subset Y$ ouvert et $K \subset X$ compact.

1. Vérifier que, si Y est métrique, la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

2. Montrer que Y^X est séparé dès lors que Y l'est.

3. On suppose maintenant X localement compact.

a. (*évaluation*) Montrer que l'application d'évaluation $ev : X \times Y^X \rightarrow Y$ définie par $ev(x, f) = f(x)$ est continue.

b. (*adjonction*) A toute application continue $f : X \times Y \rightarrow Z$, on associe l'application $\tilde{f} : Y \rightarrow Z^X$ définie, pour tout $y \in Y$, par $\tilde{f}_y = f(-, y)$. Vérifier que \tilde{f}_y est bien dans Z^X .

c. (*loi exponentielle et composition*) On suppose que Y est séparé. Montrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ induit un homéomorphisme $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$. Montrer que la composition $(f, g) \mapsto g \circ f$ induit une application continue $c : X^Y \times Z^X \rightarrow Z^Y$.

d. Montrer que l'application qui à $(f, g) \in Y^X \times Z^X$ associe l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ induit un homéomorphisme $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$.

4. Donner des contre-exemples aux propriétés montrées dans la question précédente lorsque X n'est pas localement compact.

7 - Exemples de parties compactes d'espaces de suites.

1. (Cube de Hilbert) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que

$$C_a = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } |u_n| \leq a_n \text{ pour tout } n\}$$

est un sous-ensemble compact de $l^\infty(\mathbb{N})$.

Indication. Étant donnée une suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C_a , on pourra commencer par montrer que $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(u^{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement, puis montrer que la convergence de cette sous-suite a lieu au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2. Montrer que

$$C = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } u_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty\}$$

n'est pas un sous-ensemble compact de $l^\infty(\mathbb{N})$.

3. On considère l'espace $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ des suites réelles $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de carré sommable, muni de la norme $\|a\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2\right)^{1/2}$. On note

$$B := \left\{ a \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n^2)|a_n|^2 \leq 1 \right\}.$$

Montrer que B est une partie compacte de $\ell^2(\mathbb{N})$.

8 - Familles de fonction relativement compactes ou non.

1. Dans $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme du sup, on considère pour $k \geq 0$, l'espace F des fonctions C^1 avec $\|f'\|_\infty \leq k$ et $f(0) = 0$. F est-il relativement compact dans E ? compact?

2. Soit f une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = f(nt)$. Montrer que la famille de fonctions $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte dans $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme du sup si et seulement si f est constante. Qu'en est-il avec la famille $\{g_n \in E \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $g_n(t) = f(t/n)$?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$. Montrer que la famille de fonctions $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue sur \mathbb{R} . Est-elle relativement compacte (pour la norme du sup)?

9 - Distance de Hausdorff : l'espace des compacts est compacts.

Soit (X, d) un espace métrique compact non vide. On note $\mathcal{F} = \{\text{parties fermées non vides de } X\}$. Pour $A \in \mathcal{F}$, on pose $\phi(A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(A)(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Pour $A, B \in \mathcal{F}$, on note $\delta(A, B) = \|\phi(A) - \phi(B)\|_\infty = \sup_{x \in X} |\phi(A)(x) - \phi(B)(x)|$.

1. Vérifier que δ est une distance sur \mathcal{F} (appelée distance de Hausdorff).

2. On suppose que $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite de \mathcal{F} telle que $\phi(A_n) \rightarrow f$ uniformément sur X , quand $n \rightarrow +\infty$, pour une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On note $A = f^{-1}(\{0\})$.

a) Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe $a_n \in A_n$ avec $\phi(A_n)(x) = d(x, a_n)$. En déduire qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = f(x)$.

b) Montrer que f est 1-lipschitzienne, et en déduire que $f \leq \phi(A)$.

c) Conclure que $f = \phi(A)$.

3. En déduire, à l'aide du théorème d'Ascoli, que (\mathcal{F}, δ) est compact.

10 - Opérateurs à noyaux continus.

On note $E = C([0, 1], \mathbb{C})$ que l'on munit de la norme du sup. Pour $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $f \in E$, on pose

$$K(f)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy$$

(k s'appelle le noyau de K).

1. Vérifier que K définit une application linéaire continue de E dans E .
2. Montrer que l'image par K de $\overline{B_E}(0, 1)$, la boule unité fermée de E , est relativement compacte dans E . (On dit que K est un opérateur compact.)
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $E_\lambda = \ker(K - \lambda \text{Id})$. Montrer que E_λ est de dimension finie si $\lambda \neq 0$.

11 - Trois compactifications du plan euclidien.

Dans cet exercice on va étudier trois compactifications du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Rappelons qu'une compactification d'un espace topologique X est la donnée d'un espace topologique compact Y et d'une application continue $i : X \rightarrow Y$ tels que

- $i(X)$ est dense dans Y ,
- i est un plongement, c'est-à-dire un homéomorphisme de X sur $i(X)$ où $i(X)$ est muni de la topologie de sous-espace.

1. (*La sphère*) Soit $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^3 . On appelle pôle nord le point N de coordonnées $(0, 0, 1)$. Soit $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ l'application qui associe au point de coordonnées (x, y) le point P de la sphère tel que la droite reliant P au pôle nord passe par $(x, y, 0)$. Montrer que (S^2, i) est une compactification de \mathbb{R}^2 , qui est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff du plan. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le pôle nord ?

2. (*La demi-sphère*) Soit $S^2_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}$ l'hémisphère supérieur de la boule unité de \mathbb{R}^3 . On note $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2_+$ l'application qui associe au point de coordonnées (x, y) le point de S^2_+ sur la droite reliant $(1, x, y)$ à l'origine de \mathbb{R}^3 . Vérifier qu'il s'agit d'une compactification de \mathbb{R}^2 et dire à quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le point $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ de S^2_+ ?

3. (*Le plan projectif*) Le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^3 . Rappeler¹ pourquoi $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est le quotient de la sphère S^2 par la relation d'antipodie, c'est-à-dire la relation qui identifie $x \in S^2$ à $-x$ et montrer que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est compact. En déduire que l'application i de \mathbb{R}^2 dans le plan projectif qui associe au point de coordonnées (x, y) la droite vectorielle engendrée par $(x, y, 1)$ est une compactification du plan. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$?

12 - Compactification de Stone-Čech.

Soit X un espace métrique. On considère l'ensemble F des fonctions continues de X dans $[0, 1]$, puis l'espace $T = \prod_{f \in F} [0, 1]$, (muni de la topologie produit). Enfin on introduit l'application $\theta : X \rightarrow T$ et l'espace \hat{X} définis

par $\theta(x) = (f(x))_{f \in F}$ et $\hat{X} := \overline{\theta(X)}$ muni de la topologie induite.

1. Montrer que θ est continue.
2. Montrer que θ est injective.
3. Montrer que θ est ouverte et conclure que (\hat{X}, θ) est une compactification de X .

¹voir l'exercice 8 de la feuille 4