Suite des puissances d'un nombre complexe

Presque toutes les suites qu'on étudie dans les exercices en terminale, en DEUG, *etc.* ont un comportement très simple : soit elles convergent vers une limite finie, soit elles tendent vers l'infini. Pourtant les suites qui apparaissent dans des problèmes réels de mathématiques ou de physique (en particulier, en mécanique) ont souvent un comportement beaucoup plus compliqué. Le but de cette première feuille est de vous montrer qu'une suite définie de manière très simple peut avoir un comportement très compliqué...

On se donne un nombre complexe z. Étudier le comportement de la suite

$$(z^n)_{n\geq 0}.$$

Aide. Le comportement de la suite dépend du nombre z. Il y a des cas facile, et des cas difficiles. Essayer de trouver rapidement les cas faciles !

On suppose qu'on a compris le comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ dans les "cas faciles", c'est-à-dire dans les cas où le module de z est différent de 1.

Dans toute la suite, le module de z est donc supposé égal à 1.

Question 1. Vision géométrique de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$

Décrire un moyen géométrique de construire les termes successifs de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$.

Question 2. Cas périodique

Essayer de trouver tous les z tels que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ soit *périodique*. Autrement dit, compléter l'énoncé suivant :

Théorème *La suite* $(\exp(2i\pi n\theta))_{n\geq 0}$ *est périodique si et seulement si ...*

Question 3. Cas non périodique

a. Donner un exemple de nombre z tel que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ ne soit pas périodique.

On suppose dorénavant que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ n'est pas périodique. On veut montrer que, dans ce cas, "la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ rempli tout le cercle unité", et même "qu'elle repasse une infinité de fois dans n'importe quel petit arc du cercle unité"...

b. Montrer que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ ne prend jamais deux fois la même valeur.

c. Traduire en symboles mathématiques la propriété suivante (pour le moment, on ne demande pas de la démontrer !) :
On peut trouver des éléments de la suite aussi près qu'on veut de 1 *dans* $\mathbb{C}$.

d. Compléter l'énoncé suivant (qu'on appelle "principe des tiroirs") :
Si on a 1000 *points distincts sur le cercle unité, alors il y en a forcément deux qui sont à ditance plus petite que* ....

À l'aide de ce principe, démontrer que l'on peut effectivement trouver des éléments de la suite aussi près qu'on veut de 1 dans $\mathbb{C}$.

e. En déduire que tout arc de cercle de longueur plus grande que ... contient (au moins) un point de la suite.

f. En déduire que tout arc de cercle contient une infinité de points de la suite...

Commentaires. Il existe de très nombreux problèmes dans l'étude desquels apparaît la suite des puissances d'un nombre complexe de module 1. En fait, ce genre de suite apparaît dès qu'on étudie une situation où se superposent deux phénomènes périodiques de périodes différentes.

Voici un premier exemple simple. La terre tourne autour du soleil en environ 365,24 jours; c'est pourquoi l'année de notre calendrier grégorien (qui est un calendrier solaire) comporte en moyenne 365,24 jours (365 ou 366 selon que l'année est bissextile ou pas). Une lunaison dure environ 29,53 jours; c'est pourquoi l'année du calendrier musulman (qui est un calendrier lunaire) comporte en moyenne 12*29,53=354,36 jours (354 ou 355 jours selon que l'année selon que l'année est normale ou *abondante*). C'est pourquoi le début du ramadan (le 237^{ieme} jour de l'année musulmane) correspond chaque année à un jour différent du calendrier grégorien. Existera-t-il une année où le ramadan commencera le 1^{er} janvier ? En réfléchissant un peu, vous devriez comprendre pourquoi la réponse à cette question est liée au comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ avec $z = e^{i2\pi\frac{354,36}{365,24}}$.

Et maintenant un exemple nettement plus sophistiqué. On considère une planète $\mathcal{P}$ (par exemple, la Terre) soumise à l'attraction gravitationnelle d'une étoile $\mathcal{E}$ (le Soleil). Si la planète $\mathcal{P}$ n'est pas soumise à d'autres forces, on sait (depuis Newton) écrire et résoudre les équations du mouvement du système. En particulier, on sait que, dans ce cas, la planète $\mathcal{P}$ a un mouvement périodique, et que sa trajectoire est une ellipse "autour" de l'étoile $\mathcal{E}$. Notons T la période de "rotation" de la planète $\mathcal{P}$ autour de l'étoile $\mathcal{E}$. Supposons maintenant qu'il existe une deuxième panète $\mathcal{P}'$ nettement plus grosse que $\mathcal{P}$ (par exemple, Jupiter) qui gravite autour de $\mathcal{E}$, et notons T' la période de rotation de $\mathcal{P}'$ autour de l'étoile $\mathcal{E}$. La planète $\mathcal{P}'$ exerce une force d'attraction gravitationnelle sur la planète $\mathcal{P}$. Cette force est très petite par rapport à l'attraction de l'étoile $\mathcal{E}$; néanmoins, au bout d'un très long temps, cette force pourrait faire dévier beaucoup la planète $\mathcal{P}$, et même l'ejecter du système. La force d'attraction que la planète $\mathcal{P}'$ exerce sur la planète $\mathcal{P}$ perturbe-t-elle beaucoup la trajectoire de la planète $\mathcal{P}$? Un théorème mathématique (difficile et profond) affirme que la réponse dépend en particulier du comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ où $z = e^{i2\pi\frac{T}{T'}}$: si les termes de cette suite ne sont pas "bien répartis" sur le cercle unité, alors l'attraction de la planète $\mathcal{P}'$ risque de perturber beacuoup la trajectoire de la planète $\mathcal{P}$.