Licence Math. Appliquées 2004-05
Géométrie

Feuille 1

Exercice 1. Montrer que, pour tout espace vectoriel E, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E \times E & \to & E \\ & (x, y) & \mapsto & y - x \end{array}$$

munit E d'une structure d'espace affine (dont l'espace vectoriel sous-jacent est E lui-même).

Exercice 2. Déterminer lesquels des sous-ensembles suivants sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$:

- $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1\}$;
- $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1 \text{ et } 3x + 2y = 0\}$;
- $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 6y = 4\}$;
- $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$;
- $V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2xy + y^2 = 1\}$;

Exercice 3. Montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire (avec second membre) est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^q$; autrement dit, montrer que : pour toute matrice $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, et tout vecteur $B \in \mathbb{R}^p$, l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^q \mid AX = B\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^q$.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble

$$V_1 = \left\{ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}$$

est un sous-espace affine de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ (qui, en tant qu'espace vectoriel, est muni d'une structure canonique d'espace affine). Quel est sa dimension ?

Exercice 5. Montrer que l'ensemble

$$V_1 = \left\{ f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f'(t) = cos(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de $C^1([0,1],\mathbb{R})$. De même, montrer que l'ensemble

$$V_2 = \left\{ f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f''(t) + 5f(t) = 3 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de $C^2([0,1],\mathbb{R})$. Généraliser.

Montrer que l'ensemble

$$V_3 = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} - 3u_n + 1 = n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Généraliser.

Exercice 6. Soit V l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à 4, et telle que $\int_0^1 f(t)dt = 1$. Montrer que V est un sous-espace affine de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Quel est sa dimension ?

Montrer que l'ensemble des fonctions de V qui, en tant que polynômes, sont divisibles par $(x - \frac{1}{2})^2$ est un plan affine de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit E et F deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que pour tout élément y de F, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est un sous-espace affine de E.

Exercice 8. Soit V et W deux sous-espaces affines d'un espace affine E. Montrer que $\overrightarrow{V} \oplus \overrightarrow{W} = \overrightarrow{E}$ si et seulement si $V \cap W$ est un singleton et l'espace affine engendré par V et W est l'espace E entier.

Exercice 9. (Équivalence des définitions du parallélogramme.) Soient a, b, c, d quatre points deux à deux distincts d'un espace affine E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$ et $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$;

ii) les droites (ab) et (cd), ainsi que les droites (ad) et (bc) sont parallèles, et a, b, c, d ne sont pas alignés ;

iii) les segments $[a, c]$ et $[b, d]$ ont même milieu et a, b, c, d ne sont pas alignés.

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que (a, b, c, d) est un parallélogramme.

Exercice 10. (Sous-espace affine engendré)
1) Décrire le sous-espace affine engendré par deux droites dans un espace affine (on envisagera différents cas).

2) Généralisation : on considère deux sous-espaces affines V et W d'un espace affine E, et on note T le sous-espace affine engendré par $V \cup W$.
a) Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer qu'on a $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})$.
b) Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer que V rencontre W si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{ab}$ est dans $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$.
c) En déduire que $\dim T = \dim(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) + 1$ si V rencontre W, et que $\dim T = \dim(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W})$ sinon.