Licence Math. Appliquées 2004-05
Géométrie

Feuille 2

Exercice 1. Donner un systèmes d'équations cartésiennes du sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ engendré par les points $A = (1,0,0,0)$, $B = (0,1,0,0)$ et $C = (0,0,1,0)$.

Exercice 2. Soient α, β, a, b, c des réels. Considérons, dans $\mathbb{R}^3$, le plan P_1 d'équation $3x + 2y + \beta z = a$, le plan P_2 d'équation $6x + 4y = b$, et le plan P_3 d'équation $\alpha x + (\alpha - 1)y = c$. Quelle est, en fonction de α, β, a, b, c la dimension de $F = P_1 \cap P_2 \cap P_3$?

Exercice 3. Alignement et déterminant

On considère trois points $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$, $a_3 = (x_3, y_3)$ de $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que a_1, a_2, a_3 sont alignés si et seulement si le déterminant de la matrice suivante est nul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Peut-on généraliser en dimension supérieure ?

Exercice 4.

a) Montrer que les trois points suivants de $E = \mathbb{R}^3$ sont alignés: $a_1 = (3,1,0)$, $a_2 = (2,-1,1)$, $a_3 = (5,5,-2)$.

b) Déterminer la direction vectorielle de la droite D passant par a_1, a_2, a_3.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $m = (x,y,z)$ soit sur D. En déduire un système d'équations cartésiennes de D (en coordonnées dans la base canonique)

Exercice 5. Construction géométrique des opérations algébriques.

On suppose ici que E est un plan affine. On se donne deux droites D, D' sécantes en un point ω. Sur $D - \{\omega\}$ et $D' - \{\omega\}$ on considère deux points a et a'.

1) Construction de la somme.

Pour tout point x de E on note D_x la parallèle à D passant par x, donc la droite $x + \vec{D}$ (et de même on pose $D'_x = x + \vec{D}'$). On se donne deux points m, n sur D.

a) Justifier que les droites $D_{a'}$ et D'_m sont sécantes en un point p.

b) Vérifier que $p \neq \omega$, puis que la parallèle à (ωp) passant par n est sécante à $D_{a'}$ en un point q.

c) Vérifier que D'_q est sécante à D en un point σ et montrer que $\overrightarrow{\omega\sigma} = \overrightarrow{\omega m} + \overrightarrow{\omega n}$. en déduire que si $\overrightarrow{\omega m} = \mu\overrightarrow{\omega a}$ et $\overrightarrow{\omega n} = \nu\overrightarrow{\omega a}$ alors $\overrightarrow{\omega\sigma} = (\mu + \nu)\overrightarrow{\omega a}$ (ainsi l'abscisse de σ est la somme des abscisses de m et n sur la droite D rapportée au vecteur directeur $\overrightarrow{\omega a}$).

d) Proposer une construction (n'utilisant que des tracés de droites et de parallèles) du symétrique d'un point $m \in D$ par rapport à ω.

2) Construction du produit.

a) Montrer que la parallèle à (aa') passant par n est sécante à D' en un point n'.

b) Montrer que la parallèle à $(a'm)$ passant par n' est sécante à D en un point π et que l'abscisse de π sur $(D, \overrightarrow{\omega a})$ est le produit des abscisses de m et n.

c) Proposer une construction géométrique de l'inverse d'un nombre réel.

Exercice 6. Positions relatives de plans de $\mathbb{R}^4$

1) Montrer que si deux plans affines de $\mathbb{R}^4$ s'intersectent selon une droite, alors ils sont contenus dans un même hyperplan affine.

2) Quel peut être l'intersection d'un hyperplan affine et un plan affine dans $\mathbb{R}^4$?

3) Donner un exemple de trois plans affines P_1, P_2, P_3 dans $\mathbb{R}^4$, tels que P_1, P_2 sont contenus dans un même hyperplan affine, et tels que P_3 intersecte P_1 et P_2 en deux points distincts (vous définirez les plans P_1, P_2, P_3 par des équations cartésiennes).

4) Lesquels parmi les configurations suivantes peuvent se réaliser dans $\mathbb{R}^4$ (justifier soit par un exemple, soit par un raisonnement) :

a) P_1, P_2, P_3 sont des plans affines, l'intersection de P_1 avec P_2 est une droite affine, et P_3 intersecte P_1 et P_3 en deux points distincts.

b) P_1, P_2, P_3 sont des plans affines, qui s'intersectent deux à deux en un même point A.

c) P_1, P_2, P_3 sont des plans affines, qui s'intersectent deux à deux à des points distincts, c'est-à-dire $P_1 \cap P_2 = A$, $P_1 \cap P_3 = B$ et $P_2 \cap P_3 = C$.

Exercice 7.

a) Soit D une partie de E de cardinal ≥ 2. Montrer que D est une droite de E si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées:

i) si $\{a, b, c\} \subset D$ alors a, b, c sont alignés;

ii) si $\{a, b, c\} \subset E$ sont alignés avec $a \neq b$ et $\{a, b\} \subset D$, alors $c \in D$.

b) Soient a, b deux points distincts de E. On note (ab) l'ensemble des points $c \in E$ alignés avec a, b. Montrer que (ab) est une droite de E, qu'elle passe par a et b, et que c'est la seule droite de E passant par a et b. Montrer que (ab) est aussi l'ensemble de tous les barycentres des points a et b.

c) Montrer que tout sous-espace affine $F \subset E$ vérifie la condition ii) du a). Si a et b sont deux points distincts d'un sous-espace affine F, que peut-on dire de (ab) ? Montrer qu'une partie non vide $F \subset E$ est un sous-espace affine si et seulement si on a

$$(\{a, b\} \subset F \text{ et } a \neq b) \Rightarrow (ab) \subset F.$$

Exercice 8. Soient a, b, c trois points non alignés du plan affine, g leur isobarycentre, et a', b', c' les milieux respectifs des segments $[b, c], [a, c], [ab]$. Montrer que g est le point d'intersection des médianes $[aa'], [bb'], [cc']$, et qu'il est situé au tiers de chacune d'entre elles (par exemple, $a'g = \frac{1}{3}a'a$).

Exercice 9. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère les trois points $a = (1, 3)$, $b = (1, 2)$ et $c = (0, -1)$. Montrer que $(a, b, c$ est un repère affine de $\mathbb{R}^2$ Détreminer les points p et q dont les coordonnées barycentriques dans ce repère sont respectivement $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Quels sont les coordonnées barycentriques dans (a, b, c) du point r de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées cartésiennes dans $(a, \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ sont $(2, 1)$? Donner les coordonnées barycentriques dans (a, b, c) du point g, barycentre de $\{(p, 1), (q, 2), (r, 5)\}$.

Exercice 10. Soient i, j et k les points de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Donner une équation cartésienne du sous-espace affine P engendré par ces points. Détreminer les coordonnées barycentriques dans le repère (i, j, k) d'un point $p = (x, y, z)$ quelconque de P.