Licence Math. Fond. 2004-2005
Calcul intégral

Feuille n°3

Exercice 1

1) Pour tout entier $n \geq 0$, calculer $\int_0^1 x^n \ln x \, dx$. En déduire $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3) Montrer que la fonction définie sur IR par $f(x) = \sum_{n \in IN} \frac{2^n}{1+3^{2n}(x-3^n)^2}$ est intégrable sur IR et calculer son intégrale.

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to IR$ une fonction intégrable telle que pour tout B de $\mathcal{T}$, $\int_B f \, d\mu \geq 0$. Montrer que f est positive $\mu -$presque partout.

Exercice 3

On se place sur IR muni de la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens et de la mesure de Lebesgue λ et on fixe un borélien E. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in IN}$ définies sur IR par

$\begin{cases} f_n = 1_E & \text{si n pair} \\ \text{f} = 1_{\text{E}^c} & \text{sinon} \end{cases}$. Appliquer le lemme de Fatou. Que montre cet exemple ?

Exercice 4

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une application mesurable réelle positive définie sur X telle que l'intégrale de f sur X soit finie. On considère la suite $(A_n)_{n \in IN}$ de parties de X définie par : $A_n = f^{-1}([n, +\infty[)$.

1) Etablir que, pour tout $n \in IN$, l'ensemble A_n est de $\mu -$mesure finie. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} n\mu(A_n) = 0$

Indication :On pourra appliquer le théorème de Beppo Levi à la suite de fonctions $(f_n)_{n \in IN}$ *définie par :* $f_n = f.1_{A_n^c}$

2) Montrer, par contre, que la réciproque est fausse : l'hypothèse $\lim_{n \to +\infty} n\mu(A_n) = 0$ n'implique pas que l'intégrale de f sur X soit finie

Exercice 5

Expliciter la définition de l'intégrale dans un espace mesuré par une mesure de Dirac *(commencer par estimer l'intégrale d'une fonction étagée).*

Exercice 6

Soit $f : IR \to \overline{IR}$ une application $(\mathcal{B}(IR), \mathcal{B}(\overline{IR}))$ mesurable. On suppose que f est positive ou que f est $\lambda -$intégrable.

Montrer que , pour tout $a \in IR$, $\int_{IR} f(x+a)\, d\lambda(x) = \int_{IR} f(x) d\lambda(x)$.

Exercice 7

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{T})$.

Montrer que pour toute fonction mesurable à valeurs dans $\overline{IR}$ que :

$$\int_X f \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_X f \, d\mu_1 + \int_X f \, d\mu_2 \, .$$

Exercice 8

L'objet de cet exercice est de démontrer la remarquable identité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}$$

1) Montrer que $\int_{]0,1]} \frac{1}{x^x} d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{]0,1]} (-x \ln x)^n \, d\lambda(x)$.
2) Pour p et q entiers naturels, on pose $I(p,q)) = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$. Justifier la convergence de cette intégrale.
3) Evaluer $I(p,q))$ et conclure.

Exercice 9

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(\mu_j)_{j \in IN}$ une suite de mesures positives définies sur $\mathcal{T}$.

On suppose que pour tout $A \in \mathcal{T}$ et pour tout $j \in IN$, $\mu_j(A) \le \mu_{j+1}(A)$.

Pour $A \in \mathcal{T}$, on pose $\mu(A) = \inf_{j \in IN} \mu_j(A)$.

1) Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{T}$.
2) Soit $f : X \to \overline{IR}$ une fonction mesurable. Montrer que $\int_X f \, d\mu = \sup_{j \in IN} \int_X f \, d\mu_j$

   (On pourra commencer par examiner le cas où f est étagée).
3) On considère l'espace mesurable $(IN, \mathcal{P}(IN))$ et pour $j \in IN$, $A \subset IN$, on définit $\upsilon_j(A) = Card(A \cap [j, +\infty[)$ ($Card$ E désigne le nombre d'éléments de E si E est fini , $+\infty$ sinon).
   a) Montrer que υ_j est une mesure positive définie sur $\mathcal{P}(IN)$ telle que, pour tout $A \subset IN$, $\upsilon_j(A) \ge \upsilon_{j+1}(A)$.

      On pose $\upsilon(A) = \inf_{j \in IN} \upsilon_j(A)$.
   b) Montrer que $\upsilon(IN) = +\infty$ et que pour tout $k \in IN$, $\upsilon(\{k\}) = 0$.
   c) υ est-elle une mesure sur IN ?

Exercice 9

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1) Soit $(f_n)_{n \in IN}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives telle que $\int_X f_0 \, d\mu < +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in IN}$ converge simplement vers une fonction f, alors $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{T})$ et $\int_X f \, d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu < +\infty$.

Montrer par un exemple que l'hypothèse $\int_X f_0 \, d\mu < +\infty$ est nécessaire. Que devient cette remarque lorsque $f_n = 1_{A_n}$ où $(A_n)_{n\in IN}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$?

2) Soit $(f_n)_{n\in IN}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f et telle que pour tout entier n, $\int_X f_n \, d\mu < M$ où M est une constante donnée. .

Montrer que $\int_X f \; d\mu < M$

2) Soit $(f_n)_{n\in IN}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives simplement vers une telle que pour tout entier n, $\int_X f_n \, d\mu < M$ où M est une constante donnée.

a) Montrer que , pour $\mu -$presque tout x, $(f_n(x))_{n\in IN}$ est une suite bornée .

b) En déduire qu'il existe une fonction mesurable $f : X \to IR^+$, avec $\int_X f \, d\mu < +\infty$ telle que (f_n) converge vers f presque partout et que $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)_{IN}$ converge vers $\int_X f \, d\mu$.

Exercice 9 Absolue continuité de l'intégrale

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{IR}$ une application intégrable.

1) Prouver que $\lim_{n\to+\infty} \int_{|f|\geq n} |f| = 0$.

2) En déduire la propriété « d'absolue continuité » suivante

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{T}) \left(\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| \leq \varepsilon\right)$.

3) Soit $f : IR \to \overline{IR}$ $\lambda -$intégrable. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \int_{]-\infty, x[} f(t) d\lambda(t)$ est uniformément continue sur IR.

Exercice 10

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{IR}^+$ une application intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble F de $\mathcal{T}$ de mesure finie tel que : $\int_{F^c} f \, d\mu < \varepsilon$.

Exercice 11

Montrer que l'espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est $\sigma -$fini (i.e. $X = \bigcup_{n\geq 0} \uparrow E_n$ où pour tout $n \geq 0$, $E_n \in \mathcal{T}$ et $\mu(E_n) < +\infty$) si et seulement s'il existe une fonction intégrable et strictement positive

Exercice 12

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in IN}$ une suite de $\mathcal{L}^1_{IR}(\mu)$ qui converge $\mu - p.p$ vers $f \in \mathcal{L}^1_{IR}(\mu)$ et telle que $\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Montrer *le théorème de Scheffé* :

Si, pour tout $n \geq 0$, $f_n \geq 0$ $\mu - p.p$, alors $\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Cette convergence reste-t-elle vraie dans le cas général ?

Exercice 13

Soit $f:[0,1]\to IR$ définie par $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{E(nx)}{2^n}$

1) Montrer que f est limite uniforme dans $[0,1]$ de la suite $\left(f_n(x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{E(px)}{2^p}\right)$.
2) Montrer que pour tout entier n, f_n est continue *p.p.*
3) En déduire que f est continue *p.p.*
4) Montrer que f est bornée et Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et calculer son intégrale.

Exercice 14

Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré $f:X\to IR^+$ $\mathcal{T}$-mesurable. On définit l'application υ Sur $\mathcal{T}$ par $\upsilon(A):=\int_A fd\mu$.

1) Montrer que υ est une mesure sur (X,μ). On dit que υ admet **la densité** f **relativement à** μ et on note $d\upsilon(x)=f(x)d\mu(x)$ ou $\upsilon=f.\mu$.
2) Montrer que, pour tout $\phi:X\to IR^+$, on a $\int_X \phi\, d\upsilon=\int_X f\phi\, d\mu$.
3) Caractériser les ensembles mesurables de mesure nulle de υ.
4) On suppose $X=[-1,1]$, munit de $\mathcal{T}$ la tribu borélienne . Existe-t-il une fonction positive mesurable f (*resp.* g) telle que pour tout borélien A, on ait $\lambda(A)=\int_A f\, d\delta_0$ (*resp.* $\delta_0(A)=\int_A g\, d\lambda$) ?

Exercice 15

Soit $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur IR et μ une mesure positive définie sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu(K)<+\infty$ pour K compact (*on dira que* μ *est une mesure borélienne sur IR*). Soit

$$D=\{a\in IR,\mu(\{a\})>0\}.$$

1) Soient n,l des entiers ≥ 1, on pose $D_{n,l}=\left\{a\in IR,|a|\leq n \text{ et } \mu(\{a\})>\frac{1}{l}\right\}$.

   Montrer que $D_{n,l}$ est fini. En déduire que D est dénombrable.
2) On pose pour $E\in\mathcal{B}$, $\lambda(E)=\mu(D\cap E)$. Montrer que cela a un sens et que λ est une mesure borélienne sur IR. Montrer que $\lambda=\sum_{a\in D}\mu(\{a\})\delta_a$.
3) Montrer que $\mu=\lambda+\upsilon$ où υ est une mesure borélienne sur IR telle que pour tout $x\in IR$, $\upsilon(\{x\})=0$