Licence Math. Appliquées 2004-05
Géométrie

Feuille 4

Exercice 1. Homothéties dans $\mathbb{R}^2$ Dans cet exercice, on se place dans le plan affine $E = \mathbb{R}^2$.

1) Soit $\omega = (1,2)$, $k = 3$, et h l'homothétie de centre ω et de rapport k. Déterminer l'équation analytique de h dans le repère canonique (c'est-à-dire, pour tout point $m \in E$, exprimer les coordonnées dans le repère canonique du point $h(m)$ en fonction de celles de m).

2) Soient $\overrightarrow{u} = (1,-1)$ et $\overrightarrow{v} = (2,1)$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\overrightarrow{E}$. Déterminer l'équation analytique de h dans le repère $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3) Soit $g : E \to E$ l'application envoyant (x, y) sur (x', y') avec $x' = 5x + 2$ et $y' = 5y - 1$. Montrer que g est une homothétie, déterminer son centre et son rapport.

4) On considère la composée $f = g \circ h$. Montrer que f est une homothétie, déterminer son équation analytique, son centre et son rapport.

Exercice 2. Tourniquet On suppose donnée une suite de n points $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ (avec $n \geq 1$). Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $a_k = a_r$ avec $k = nq + r$ et $0 \leq r < n$ (division euclidienne de k par n). On recherche une suite de points $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le point a_k soit le milieu de b_k et b_{k+1}.

1) Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit s_k la symétrie centrale de centre a_k. Montrer qu'une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ répond au problème si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $b_{k+1} = s_k(b_k)$. En déduire que pour tout $b \in E$ il existe une unique solution au problème avec b_0 fixé arbitrairement.

2) On pose $f = s_{n-1} \circ s_{n-2} \circ \cdots \circ s_1 \circ s_0$. Discuter de la nature de f suivant la parité de n.

On recherche maintenant les solutions périodiques.

3) Montrer que si n est impair alors f est une symétrie centrale et il existe une unique solution périodique (dont n est une période).

4) Montrer que si n est pair il y a une condition sur les points $a_0, \ldots, a_n$ pour qu'il existe une solution périodique. Montrer que si cette condition est remplie, alors toutes les solutions sont n-périodiques.

Exercice 3. Symétries et translations Montrer que l'ensemble $ST(E)$ des symétries centrales et des translations de E forme un groupe pour la composition des applications. Montrer que $ST(E)$ est engendré par une symétrie centrale et toutes les translations.

Exercice 4. Soient D, D' deux droites parallèles dans un plan affine E.

1) Montrer que, lorsque a parcours D et a' parcours D', le milieu de $[a, a']$ parcours une droite Δ, parallèle à D et D'.

2) Montrer que Δ est l'ensemble des points m de E tels que la symétrie centrale de centre m échange D et D'.

Exercice 5. **Projecteurs vectoriels** Dans cet exercice, $E = \overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

1) On considère un endomorphisme f de $\overrightarrow{E}$ de valeurs propres distinctes λ et μ. Soit P un polynôme valant 1 en λ et 0 en μ. Montrer que l'application $P(f)$ est un projecteur vectoriel; donner son noyau et son image. Montrer que le projecteur complémentaire est de la forme $Q(f)$ avec Q le polynôme tel que $P+Q = 1$. Donner un exemple de polynôme P avec $\deg(P) = 2$.

2) Montrer qu'une application linéaire $\vec{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ commute avec un projecteur vectoriel $\overrightarrow{p}$ si et seulement si $\overrightarrow{f}$ préserve le noyau et l'image de $\overrightarrow{p}$. Montrer que si $\overrightarrow{p}$ est non trivial (i.e. image et noyau ne sont pas réduits à $\{\overrightarrow{0}\}$) alors $\overrightarrow{f}$ est diagonalisable.

Exercice 6. Dans cet exercice, E désigne le plan affine $\mathbb{R}^2$.

1) Soit $f : E \to E$ l'application définie par $f(x, y) = (2x-2y+1, x-y+1)$. Montrer que f est une projection affine; déterminer son image et la direction de projection. Montrer que $(x, y) \mapsto f(x, y) + (2, 1)$ est affine. Est-ce une projection ?

2) Soit $g : E \to E$ l'application définie par $g(x, y) = (x-2y+2, 2-y)$. Montrer que g est une symétrie affine; déterminer son axe et sa direction. Déterminer la valeur du paramètre réel a pour laquelle $(x, y) \mapsto g(x, y)+(a, 1)$ est une symétrie. Montrer que pour les autres valeurs de a, l'application admet une unique droite invariante, et déterminer cette droite.

Exercice 7. Montrer que toute projection p de E vérifie $p \circ p = p$. Montrer que toute symétrie affine est une involution.

Exercice 8. **Tourniquet bis** Soit abc un triangle (non aplati) du plan affine $E = \mathbb{R}^2$.

1) A tout point $p = p_0$ de (ab) on associe p_1 le point d'intersection de (bc) avec la parallèle à (ac) passant par p. Puis à tout $p_1 \in (bc)$ on associe p_2 le point d'intersection de (ac) avec la parallèle à (ab) passant par p_1. Enfin à tout $p_2 \in (ac)$ on associe p_3 le point d'intersection de (ab) avec la parallèle à (bc) passant par p_2.

Montrer que pour tout $p = p_0 \in (ab)$ la suite des points $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 6 (on pourra interpréter le problème en terme de projections et reconnaître l'application $p_0 \mapsto p_3$ de (ab) dans (ab)). Montrer qu'il existe un unique point p_0 tel que la suite $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit périodique de période 3 et montrer que le triangle $p_0p_1p_2$ associé est homothétique de cab.

2) On se donne un autre triangle $a'b'c'$ tel que $(a'c')$ est sécante à (ab) et (bc), $(a'b')$ est sécante à (ac) et (bc) et $(b'c')$ est sécante à (ab) et (ac). On cherche les triangles pqr vérifiant:

(i) pqr est l'image de $c'a'b'$ par une homothétie-translation;

(ii) pqr est inscrit dans abc au sens où $p \in (ab)$, $q \in (bc)$, $r \in (ac)$.

En utilisant des projections comme à la question 1), associer à tout point p_0 de (ab) une suite de points $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $p_1 \in (bc)$, $p_2 \in (ac)$, $p_3 \in (ab)$, etc ... et telle que les suites périodiques de période 3 correspondent aux triangles pqr recherchés. Déterminer alors l'ensemble des solutions pqr suivant les valeurs des coordonnées de a_3 et b_3 sur la droite (ab) rapportée au repère d'origine a et de vecteur $\overrightarrow{ab}$.

Exercice 9. Composées de symétries On se place dans un plan affine E.

1) Soit s_1, s_2, s_3 trois symétries affines de même axe Δ et de directions $\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}$. Montrer que la composée $f = s_1s_2s_3$ est une symétrie affine d'axe Δ.

2) Soit s_1, s_2, s_3 trois symétries affines de même direction $\overrightarrow{\Delta}$ et de d'axes D_1, D_2, D_3; soit ω un point de E tel que $\omega \in D_1 \cap D_2 \cap D_3$.

a) Montrer que la composée $f = s_1s_2s_3$ est une symétrie affine de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et d'axe D_4 passant par ω. Lien avec la question précédente ? (on pourra introduire la symétrie centrale s_ω)

b) Soit Δ' une parallèle stricte à Δ ; on note a_1, a_2, a_3, a_4 les points d'intersection de D_1, D_2, D_3, D_4 avec Δ. Montrer que $s_{a_1}s_{a_2}s_{a_3}s_{a_4} = \mathrm{Id}_E$, puis que $\frac{\overrightarrow{a_1a_2}}{\overrightarrow{a_1a_3}}.\frac{\overrightarrow{a_4a_3}}{\overrightarrow{a_4a_2}} = -1$.

c) On propose la construction suivante de D_4 : la justifier.

- Tracer deux droites distinctes Δ', Δ'' parallèles à Δ.
- Choisir un point p_0 sur Δ'.
- Soient p_1 le projeté de p_0 sur Δ'' dans la direction de D_1, p_2 le projeté de p_1 sur Δ' dans la direction de D_2, p_3 le projeté de p_2 sur Δ'' dans la direction de D_3.
- Alors les points p_0 et p_3 sont distincts et D_4 est la parallèle à (p_0p_3) passant par ω.